

УДК 52—852—6

СТАНДАРТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОБРАЗОВАНИЯ ЛИНИЙ
В ДВИЖУЩИХСЯ АТМОСФЕРАХ

В. М. СЕРБИН

Поступила 25 июля 1984

Принята к печати 20 ноября 1984

При стандартных для теории образования линий предположениях (плоскопараллельная изотермическая атмосфера, двухуровневый атом, полное перераспределение по частотам в локальной системе отсчета) и доплеровском коэффициенте поглощения в линии численно точно (с погрешностью $\sim 1\%$) из основного интегрального уравнения для функции источников в линии (ФИ) найдены ФИ, а также профили выходящего излучения для случая, когда атмосфера расширяется с малым постоянным по глубине градиентом скорости. Рассматриваются как полубесконечные атмосферы, так и атмосферы конечной оптической толщины. Результаты численных расчетов сопоставляются с аналитическими результатами. Показано, что для атмосфер, в пределах которых разность скоростей расширения превышает тепловую скорость движения атомов в несколько раз, профили линий излучения на верхней и на нижней границах существенно различны, несмотря на симметрию ФИ относительно середины слоя. Для ФИ предложена простая аппроксимация. Показано, что при любых значениях параметров, входящих в задачу, приближенная ФИ отличается от точной не более, чем вдвое. Для полубесконечных же атмосфер погрешность $\approx 25\%$.

1. *Введение.* В ряде астрофизических объектов, таких, как квазары, молекулярные облака межзвездного газа, оболочки некоторых звезд дифференциальные макроскопические движения сильно влияют на формирование линий. Наличие градиента скорости приводит к тому, что удаленные объемы либо перестают радиационно взаимодействовать между собой, либо, наоборот, их взаимодействие усиливается, в зависимости от того, каков градиент скорости.

В случае больших градиентов задача об определении поля излучения в линии упрощается и становится алгебраической (так называемое приближение Соболева [1], см. также [2]). В данной работе рассматривается противоположный случай, когда вещество движется с малым градиентом скорости. При этом делаются стандартные для теории образования линий предположения. Атмосфера считается плоскопараллельной и состоящей из

атомов, имеющих два связанных состояния. Предполагается, что при рассеянии происходит полное перераспределение по частотам в локальной системе отсчета. Далее, считается, что градиент скорости направлен по нормали к слоям и не зависит от глубины. Задача об определении поля излучения в линии сводится к нахождению функции источников в линии (ФИ), пропорциональной степени возбуждения атомов.

Для ФИ этой задачи В. В. Соболевым еще в 50-е годы [3] получено линейное интегральное уравнение и предложен простой способ его приближенного решения, применимый для достаточно глубоких слоев атмосферы. Для случаев бесконечной и полубесконечной атмосфер это интегральное уравнение аналитически исследовано С. И. Грачевым [4, 5]. В работах [6—8] из интегро-дифференциального уравнения переноса излучения численно найдены ФИ для движущихся атмосфер конечной оптической толщины и рассчитаны профили линий, образующихся в таких атмосферах. В [8] рассматривался и случай полубесконечной атмосферы, малая часть которой расширяется с постоянным градиентом скорости, а остальная часть покоится. Однако ФИ для полубесконечных атмосфер, расширяющихся с постоянным на всех глубинах градиентом скорости, вообще не рассчитывалась, для атмосфер же конечной оптической толщины практически не изучена зависимость ФИ от параметров задачи.

В настоящей работе предпринята попытка изучить задачу о формировании линий в движущихся атмосферах столь же детально, как это было сделано ранее для неподвижных атмосфер (см., например, [9—11]). С этой целью путем прямого численного решения интегрального уравнения для ФИ рассчитаны ФИ и профили выходящего излучения для полубесконечных атмосфер и для атмосфер конечной оптической толщины. Результаты расчетов сравниваются с аналитическими результатами. Подробно обсуждается зависимость решения от параметров задачи. Предлагается простой приближенный способ нахождения ФИ, применимый при любых значениях параметров, входящих в задачу, и при достаточно малом градиенте скорости. Показано, что ошибки в ФИ при использовании этого приближения не превосходят множителя 2.

2. Основные уравнения. Уравнение переноса излучения в частотах линии, записанное в системе отсчета наблюдателя, для плоской атмосферы, состоящей из двухуровневных атомов и расширяющейся с постоянным градиентом скорости $\gamma = \frac{dv}{dt}$, имеет вид (см., например, [2], § 14.1)

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = \alpha(x + \mu\gamma\tau) [I(\tau, \mu, x) - S(\tau)]. \quad (1)$$

Здесь $I(\tau, \mu, x)$ — интенсивность излучения, τ — оптическая глубина в

центре линии для неподвижной атмосферы, μ — косинус угла между направлением распространения излучения и внешней нормалью к границе $z = 0$, x — безразмерная частота, отсчитываемая от центра линии в доплеровских ширинах, $z(x)$ — профиль коэффициента поглощения в линии ($z(0) = 1$, $A \int_{-\infty}^{\infty} z(x) dx = 1$), $S(\tau)$ — функция источников в ли-

нии, $v(\tau) = \gamma\tau$ — скорость расширения, измеряемая в единицах средней тепловой скорости движения атомов. Если при рассеянии происходит полное перераспределение по частотам в локально неподвижной относительно вещества системе отсчета, то

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^1 I(\tau, \mu, x) z(x + \mu\gamma\tau) d\mu + S^*(\tau), \quad (2)$$

где λ — вероятность выживания фотона при рассеянии, $S^*(\tau)$ описывает распределение первичных источников возбуждения. Профиль $z(x)$ и параметр λ считаются постоянными в атмосфере, а функция $S^*(\tau)$ — заданной.

Пользуясь граничными условиями, выражающими отсутствие падающего извне излучения ($I(0, -\mu, x) = 0$, $I(\tau_0, \mu, x) = 0$; $\mu > 0$; τ_0 — оптическая толщина неподвижной атмосферы, $\tau_0 \in]0, \infty[$), и подставляя формальное решение уравнения переноса (1) в (2), получим интегральное уравнение для ФИ

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K_1(\tau - \tau') S(\tau') d\tau' + S^*(\tau). \quad (3)$$

Нормировка ядра $K_1(\tau)$ следующая:

$$\int_0^{\infty} K_1(\tau) d\tau = 1 - \beta. \quad (4)$$

Явный вид ядерной функции $K_1(\tau)$ и выражение для β будут приведены ниже. Введем еще вторую ядерную функцию

$$K_2(\tau) \equiv \int_{\tau}^{\infty} K_1(t) dt \quad (5)$$

и перенормируем ядро $K_1(\tau)$. Обозначим $\tilde{\lambda} = \lambda K_2(0)$; $\tilde{K}_i(\tau) = K_i(\tau)/K_2(0)$, $i = 1, 2$. Тогда ФИ удовлетворяет уравнению, совпадающему по форме с (3), но с нормированным на 1 на $[0, \infty[$ ядром $\tilde{K}_1(\tau)$ и с λ , замененным на $\tilde{\lambda}$.

Ядерные функции K_1 и K_2 , а также величина β и параметр $\tilde{\lambda}$ имеют простой физический смысл. Функция $(K_2(\tau) + \beta)/2$ есть вероятность прямого выхода фотона через границу $\tau = 0$ при его „старте“ с глубины τ . Следовательно, величина β есть вероятность прямого выхода фотона из бесконечно глубоких слоев среды с $\tau_0 = \infty$. Далее, вероятность прямой радиационной передачи возбуждения с глубины τ на глубину τ' равна $\frac{\lambda}{2} K_1(\tau - \tau')$ или $\frac{\tilde{\lambda}}{2} \tilde{K}_1(\tau - \tau')$, а полная вероятность выбывания фотона из процесса случайных блужданий в расчете на одно рассеяние $1 - \tilde{\lambda} = 1 - \lambda + \lambda\beta$ складывается из вероятности гибели вследствие ударов второго рода и фотоионизаций $(1 - \lambda)$ и вероятности $\lambda\beta$ того, что фотон будет переизлучен (λ), но сместится по частоте из-за эффекта Доплера и уйдет на бесконечность (β).

В дальнейшем мы будем рассматривать важнейший случай изотермической атмосферы ($S^* = \text{const}$). Если ФИ измерять в долях функции Планка, то $S^* = 1 - \lambda$. Задачу об определении ФИ и выходящего излучения в такой атмосфере будем называть стандартной задачей теории образования линий в движущихся атмосферах. Ниже рассматривается случай малых градиентов: $\gamma \ll 1$.

Не ограничивая общности, положим $S^* = 1$ и обозначим соответствующую ФИ $S_0(\tau)$. Очевидно, что ФИ при $S^* = b = \text{const}$ отличается от $S_0(\tau)$ лишь множителем b .

Следует обратить внимание на то, что знание $S_0(\tau)$ позволяет сделать важные заключения об энергетике атмосфер, в которых мощность первичных источников произвольным образом зависит от глубины, т. е. $S^* = S^*(\tau)$. Как и в случае статических атмосфер (см. [11], § 8.9), функция $S_0(\tau)$ численно равна среднему числу рассеяний фотона, стартующего на глубине τ . Поэтому величина $e(\tau) = 1 - (1 - \lambda) S_0(\tau)$ равна вероятности выхода такого фотона из среды, вообще говоря, после любого числа рассеяний. Значит, если функция $S_0(\tau)$ известна, то легко находится доля излучаемой первичными источниками энергии, уносимая радиацией за пределы атмосферы. Пусть распределение первичных источников есть $S^*(\tau)$, тогда эта доля равна

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \int_0^{\bar{\tau}} e(\tau) S^*(\tau) d\tau / \int_0^{\bar{\tau}} S^*(\tau) d\tau = \\ &= 1 - (1 - \lambda) \left(\int_0^{\bar{\tau}} S_0(\tau) S^*(\tau) d\tau \right) / \left(\int_0^{\bar{\tau}} S^*(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Исследовать уравнение (3) или даже стандартную задачу ($S^* = \text{const}$) чисто аналитическими средствами сложно и не всегда рационально. Поэтому ниже при изучении ФИ мы будем опираться в первую очередь на результаты численных расчетов, впрочем, сравнивая их везде, где это возможно, с аналитическими результатами.

Мы решали уравнение (3) с нормированным ядром $\bar{K}_1(\tau)$ и $S^* = 1$ хорошо известным методом коллокации (см., например, [12], [13], стр. 93). В этом методе значения ФИ в точках коллокации $\bar{\tau}_i$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$S(\bar{\tau}_i) = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{N-1} S(\bar{\tau}_j) \int_{\bar{\tau}_j}^{\bar{\tau}_{j+1}} K_1(\bar{\tau}_i - t) dt, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (7)$$

где $\bar{\tau}_j$ — точки разбиения по оптической глубине, распределенные равномерно в логарифмической шкале. В наших вычислениях $N = 40 + 80$, $\bar{\tau}_j = \sqrt{\bar{\tau}_j \bar{\tau}_{j+1}}$ (другой выбор точек коллокации, например, $\bar{\tau}_j = (\bar{\tau}_j + \bar{\tau}_{j+1})/2$ приводит к неприемлемо большим ошибкам в ФИ). Сравнение значений ФИ, найденных методом коллокации для неподвижной среды, с результатами расчетов, выполненных нами другими методами (методом аппроксимации ядра суммой экспонент [13] и методом Шармера [14]), показало, что коллокация дает погрешность $\sim 1\%$.

Методы, основанные на использовании при расчете ФИ интегро-дифференциального уравнения переноса (1) с $S(\tau)$ из (2), гораздо сложнее метода коллокации и практически неприменимы для полубесконечных атмосфер (см., например, [2], § 14.1). В то же время, если ядерные функции $K_1(\tau)$ и $K_2(\tau)$ предварительно рассчитаны, решить систему (7) не составляет труда. Значения параметров, входящих в задачу, могут при этом быть практически любыми.

3. *Ядерные функции.* При малых γ ядро $K_1(\tau)$ отличается от соответствующего ему статического ядра ($\gamma = 0$) лишь в области больших τ . Для
12—145

доплеровского профиля это отличие гораздо значительнее, чем для Фойгтовского или лоренцовского (см., например, [15]). Поэтому в дальнейшем рассматривается только случай доплеровского профиля ($a(x) = e^{-x^2}$, $A = \pi^{-1/2}$), который, несомненно, является самым интересным для астрофизики. В этом случае

$$K_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -x^2 - (x + \mu\gamma|\tau|)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\mu} \int_0^{|\tau|} \exp [-(x + \mu\gamma t)^2] dt \right\} dx, \quad (8)$$

параметр β равен

$$\beta = \beta(\gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{\mu^2}} \right) \mu^2 d\mu = \frac{\gamma}{3\sqrt{\pi}} - \frac{\gamma^2}{2\pi} e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}} + \dots \quad (9)$$

Очевидно, что $K_2(0) = 1 - \beta(\gamma)$. При малых γ с очень хорошей точностью можно считать $\beta(\gamma) = \frac{\gamma}{3\sqrt{\pi}}$. Для $\gamma < 0.3$ погрешность этого выражения меньше 1%, причем она быстро убывает с уменьшением γ .

При $\gamma = 0$ параметр $\beta = 0$, функции же $K_1(\tau)$ и $K_2(\tau)$ переходят в ядерные функции для неподвижной среды

$$K_1^0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} E_1(e^{-x^2} |\tau|) dx, \\ K_2^0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} E_2(e^{-x^2} \tau) dx, \quad (10)$$

где E_1 , E_2 — интегральные показательные функции. В [9] даны коэффициенты экспоненциальной аппроксимации функции $K_1^0(\tau)$, в [16] — коэффициенты аппроксимации Падé функций K_1^0 и K_2^0 .

В работе [17] функции $K_1(\tau)$ и $K_2(\tau) + \beta$ при $\tau \geq 0$ табулированы с 5 значащими цифрами для $\gamma = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ до значений аргумента $\tau \approx \gamma^{-1}$. В [4] для них получены следующие асимптотические выражения, справедливые при $\gamma\tau \gg 1$, $\gamma \ll 1$:

$$K_1(\tau) \sim \frac{3}{\tau} K_2(\tau) \sim 3c (\gamma\tau^2)^{-2} [\ln(4\gamma\tau^2)]^{-3/2} \equiv K_1^{as}(\tau), \quad (11)$$

$$\text{где } c = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} = 0.3391.$$

Мы рассчитали функции K_1 и K_2 для значений $\gamma = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ и $\tau \geq 0$ таких, что $\gamma\tau \leq 10^3$. При $\tau \leq \gamma^{-1}$ расчет велся по алгоритму, описанному в [17]. Для $\tau > \gamma^{-1}$ в (8) производилась замена переменной $y = \frac{\tau}{\mu}$. Интеграл по y от τ до ∞ вычислялся по формуле трапеций.

Суммирование прекращалось, когда относительный вклад очередного интервала оказывался меньше 10^{-5} . Шаг выбирался таким, чтобы относительная погрешность интегрирования не превышала $5 \cdot 10^{-3}$.

Для всех указанных γ значения ядерной функции $K_1(\tau)$, даваемые (11), отличаются от результатов численного интегрирования менее, чем на 10% при $\gamma\tau \geq 10$ и менее, чем на 1% при $\gamma\tau \geq 70$. Отметим, что асимптотические формулы для K_1 и K_2 , приводимые в [15] (формулы (2.3), (A11) и первая из формул (2.22)), неверны. Значения $K_1(\tau)$, найденные по формуле (2.3) из [15], при $\gamma\tau \gg 1$ отличаются от наших численно точных значений более, чем в 6 раз. В связи с этим представляется странным делаемое в [15] утверждение, что „результат (A11) хорошо согласуется с результатами численного интегрирования для $\gamma\tau^2 > 10^{34}$ “.

Для быстрого вычисления функций $K_1(\tau)$ и $K_2(\tau)$ удобно воспользоваться следующим их представлением:

$$K_1(\tau) = \begin{cases} K_1^0(\tau)/f_0(\tau), & \tau \leq \gamma^{-1}, \\ K_1^{as}(\tau)/f_{as}(\tau), & \tau \geq \gamma^{-1}; \end{cases} \quad K_2(\tau) = K_2^0(\tau)/g_0(\tau), \quad \tau \leq \gamma^{-1}. \quad (12)$$

В табл. 1 приведены значения поправочных функций f_0, f_{as} и g_0 для $\gamma = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$. Кубическая интерполяция по значениям этих функций, данным в таблице, обеспечивает вычисление $K_1(\tau)$ с погрешностью менее 1% при любых $\tau > 0$. Функция же $K_2(\tau)$ вычисляется по (12) с точностью $\sim 1\%$ до значений аргумента $\tau \leq \gamma^{-1}$. Для больших значений τ эту функцию аппроксимировать не нужно, так как в расчетах используется величина $K_2(\tau) + \beta$, а при $\tau > \gamma^{-1}$ величина $K_2(\tau) < 0.01\beta$.

4. *Функция источников в расширяющейся изотермической атмосфере.* Обсудим зависимость ФИ стандартной задачи от входящих в задачу параметров — оптической толщины атмосферы τ_0 , вероятности выживания фотона λ и градиента скорости γ .

Таблица 1

ПОПРАВОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ
ЯДЕРНЫХ ФУНКЦИЙ $K_1(\tau)$ И $K_2(\tau)$

τ	f_0			g_0		
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
0.01	1.000	1.000	1.000	1.006	1.010	1.017
0.1	1.003	1.010	1.018	1.120	1.174	1.212
0.2	1.029	1.037	1.059	1.308	1.414	1.509
0.3	1.059	1.102	1.140	1.542	1.731	1.893
0.4	1.123	1.193	1.251	1.837	2.133	2.412
0.5	1.207	1.308	1.420	2.202	2.647	3.081
0.6	1.312	1.468	1.652	2.655	3.298	3.932
0.7	1.445	1.684	1.948	3.216	4.110	4.992
0.8	1.619	1.959	2.313	3.901	5.102	6.288
0.9	1.840	2.299	2.758	4.729	6.294	7.841
1.0	2.112	2.707	3.292	5.712	7.699	9.661

f_{ax}			
1.0	1.106	1.067	1.046
1.3	0.919	0.956	1.010
1.6	0.872	0.935	0.977
2.0	0.872	0.938	0.970
4.0	0.917	0.959	0.982
8.0	0.946	0.974	0.990
20.0	0.970	0.988	0.998
40.0	0.982	0.995	1.000
100.0	0.993	1.000	1.000

Сделаем вначале важное замечание, касающееся связи между ФИ в движущихся и неподвижных атмосферах. Если в уравнении для ФИ (3) с $S^* = 1$ и $\gamma > 0$ заменить λ на $\tilde{\lambda}$, а ядро $K_1(\tau)$ — на $K_1^0(\tau)$, то решение такого уравнения отличается от точной ФИ не более, чем на 25%, при любых значениях τ , λ и $\gamma \leq 10^{-2}$. Иначе говоря, ФИ в атмосферах с $\gamma \ll 1$ практически совпадают со статическими ФИ, вычисленными для эффективных значений вероятности выживания фотона $\lambda_{эфф} = \tilde{\lambda}$. Это утверждение неверно, если а) мощность первичных источников сильно меняется с глубиной (например, для $S^*(z) =$

$= \frac{\lambda}{2} K_1(\tau)$ — изотропный источник с профилем излучения, пропорциональным профилю поглощения в линии, расположенный на границе атмосферы); б) в случаях, когда скорость расширения $v(\tau)$ зависит от глубины не линейно (см. рис. 3 в [14]). Качественные заключения, касающиеся поведения ФИ в неподвижной изотермической атмосфере [9—11], непосредственно переносятся на движущиеся атмосферы. Ниже основное внимание уделяется отличиям ФИ в этих задачах.

Начнем с рассмотрения полубесконечных атмосфер ($\tau_0 = \infty$). Для ФИ $S_0(\tau)$, т. е. для решения уравнения (3) с $S^* = 1$ и $\tau_0 = \infty$ С. И. Грачевым [18] получено явное выражение в виде некоторого контурного интеграла. Однако оно настолько сложно, что для вычислений практически непригодно.

Значения ФИ на границе и в глубоких слоях полубесконечной атмосферы даются следующими точными формулами (см., например, [19]):

$$S_0(0) = (1 - \tilde{\lambda})^{-1/2}; \quad S_0(\infty) = (1 - \tilde{\lambda})^{-1}. \quad (13)$$

ФИ приближается к своему асимптотическому значению $S_0(\infty)$ на глубинах $\tau \geq \tau_1$, где τ_1 — длина термализации, по порядку величины равная среднему расстоянию от места рождения фотона в бесконечной среде до места его гибели. Величина τ_1 определяется равенством

$$\frac{\tilde{\lambda}}{2} \tilde{K}_2(\tau_1) = 1 - \tilde{\lambda}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что, в отличие от статического случая, в атмосфере с $\gamma > 0$ длина термализации конечна и при $\lambda = 1$.

Поведение $S_0(\tau)$ определяется соотношением величины двух параметров задачи — λ и γ . Когда $1 - \lambda \gg \beta$, выбывание фотонов из процесса рассеяний из-за гибели при рассеяниях преобладает над их выходом из среды вследствие эффекта Доплера. В этом случае можно положить $\gamma = 0$,

$\lambda = \tilde{\lambda}$, и ФИ практически не отличается от соответствующей статической ФИ.

Если считать, что атмосфера неподвижна, то в наиболее интересной для астрофизики области значений λ , именно, при $1 - \lambda \ll 1$, возникают дальнейшие упрощения. Для таких λ имеет место асимптотическое уменьшение числа аргументов функции $S_0^0(\tau)$ (параметр λ в данном случае рассматривается как аргумент). Верхний индекс 0 здесь и далее в статье будет означать, что рассматриваемая величина относится к случаю непо-

движной атмосферы. Функция $S_0^0(\tau)$, зависящая от τ и λ , асимптотически выражается через функции одной переменной (см. [11], § 5.5). В области $\tau \ll \tau_t^0$

$$S_0^0(\tau) \sim \tilde{S}(\tau)(1-\lambda)^{-1/2}. \quad (15)$$

Здесь $\tilde{S}(\tau)$ — решение соответствующего (3) однородного уравнения для неподвижной атмосферы ($\tilde{S}(0) = 1$). Функцию $\tilde{S}(\tau)$ можно считать известной — ее свойства детально изучены ([11], гл. 5 и 6; [20]). В работе [21] даны коэффициенты ее экспоненциальной аппроксимации, которая обеспечивает точность $\sim 1\%$. Начиная с глубин, сравнимых с глубиной термализации, функция $S_0^0(\tau)(1-\lambda)$ выражается через функцию одного аргумента $t = \frac{\tau}{\tau_t^0}$ ([11], § 5.5). Значение длины термализации для неподвижной среды τ_t^0 находится из уравнения $\frac{\lambda}{2} K_2^0(\tau_t^0) = 1 - \lambda$.

В противоположном случае, когда $1 - \lambda \ll \beta$, ФИ зависит лишь от τ и γ , но не от λ , так что рассеяние можно считать консервативным, т. е. полагать $\lambda = 1$. При $\gamma \ll 1$ здесь, как и для неподвижных сред, возникают существенные упрощения. Асимптотические формулы, описывающие поведение ФИ в консервативно рассеивающей расширяющейся атмосфере, получены в [18]:

$$S_0(\tau) \sim \begin{cases} \tilde{S}(\tau)(1-\tilde{\lambda})^{-1/2}, & \tau \ll \tau_c, \\ (1-\tilde{\lambda})^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{K_2(\tau)}{\beta} \right], & \tau \gg \tau_c, \end{cases} \quad (16)$$

где τ_c — длина термализации при $\lambda = 1$.

Мы рассчитали ФИ в полубесконечной изотермической атмосфере методом коллокации для многих значений λ и трех значений γ ($\gamma = 10^{-2}$, 10^{-3} , 10^{-4}). На рис. 1А даны кривые функций $S_0(\tau)(1-\tilde{\lambda})$, рассчитанных для $\gamma = 10^{-2}$. Цифры у кривых — значения $1 - \tilde{\lambda}$. Пунктирная кривая относится к следующему разделу. Во всех рассмотренных случаях соотношения (13) выполнялись с погрешностью $< 1\%$. В табл. 2 приведены значения консервативных ФИ, вычисленные кубической интерполяцией по значениям ФИ в точках коллокации, что обеспечивает в данном случае не менее трех верных цифр. Результаты наших вычислений хорошо согласуются с асимптотикой (16).

Недавно С. И. Грачев аналитически показал [22], что в полубесконечных одномерных (рассеяние вперед-назад) расширяющихся с постоянным градиентом скорости средах при $\gamma \ll 1$ имеет место асимптотическое

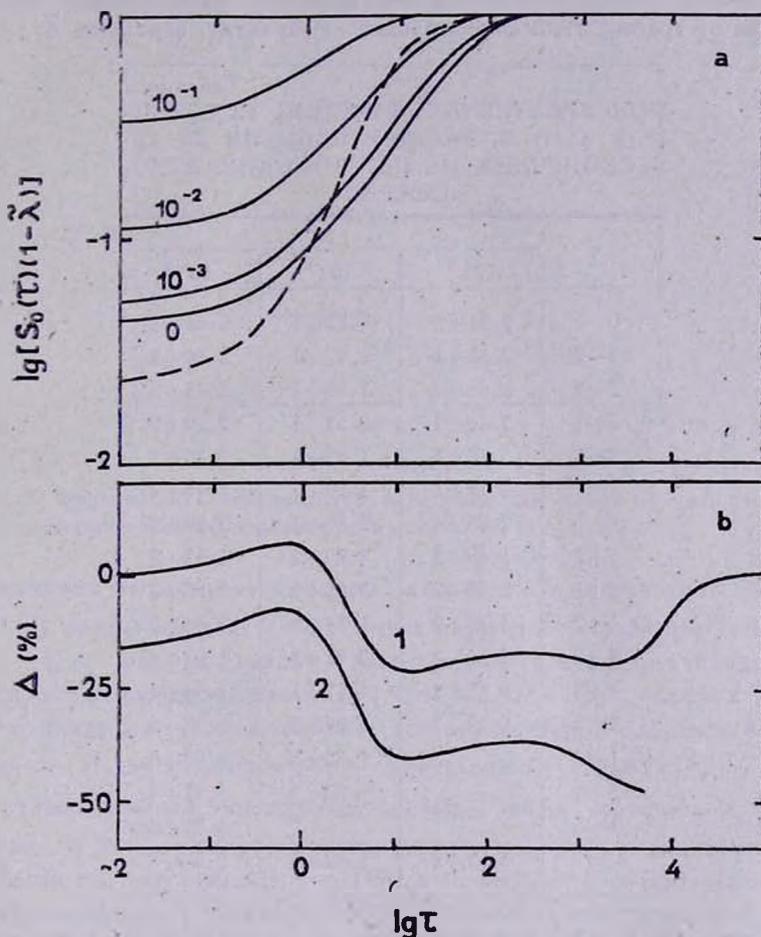


Рис. 1. а — нормированные функции источников в расширяющихся полубесконечных изотермических атмосферах. Градиент скорости $\gamma = 10^{-2}$; числа у кривых — значения $1 - \lambda$. Пунктирная кривая — ФИ, найденная в приближении L1. б — относительная погрешность $\Delta = 1 - S_0^{\text{прибл.}}/S_0^{\text{точн.}}$ приближения L2 для ФИ. Значения параметров следующие: $\gamma = 10^{-4}$, $\lambda = 1$; кривая 1 — полубесконечная атмосфера, кривая 2 — атмосфера с $\tau_0 = 9 \cdot 10^3$.

по γ уменьшение числа аргументов ФИ (в данном случае параметр γ считается переменной). Это упрощение возникает на глубинах, сравнимых с глубиной термализации, или на порядок меньших ее, и вполне аналогич-

но по своей природе сходному упрощению в статическом случае, упоминаемому выше. Для плоских сред (трехмерные среды, по терминологии [4, 5]) вывод явного выражения для функции, описывающей поведение ФИ вдали от границ атмосферы, сложен. Результат, вероятно, будет мало

Таблица 2
 КОНСЕРВАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ $S_0(\tau)$ В РАСШИРЯЮЩИХСЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ АТМОСФЕРАХ

τ	γ		
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
0	2.31+1	7.31+1	2.31+2
1-2	2.36+1	7.47+1	2.36+2
3-2	2.45+1	7.75+1	2.45+2
1-1	2.70+1	8.53+1	2.70+2
3-1	3.25+1	1.03+2	3.25+2
1	4.74+1	1.50+2	4.75+2
3	7.85+1	2.50+2	7.90+2
1+1	1.49+2	4.80+2	1.52+3
3+1	2.65+2	8.95+2	2.85+3
1+2	4.40+2	1.74+3	5.66+3
3+2	5.26+2	3.02+3	1.03+4
1+3	5.32+2	4.67+3	1.94+4
3+3	5.32+2	5.29+3	3.25+4
1+4		5.32+3	4.83+4
3+4		5.32+3	5.31+4
1+5			5.32+4
∞	5.32+2	5.32+3	5.32+4

Примечание. Числа в таблице представлены в нормализованном виде, например, $2.31+1 = 2.31 \cdot 10^1$.

пригоден для практического использования. Однако сам факт существования такой предельной функции не подлежит сомнению. И действительно, анализ результатов наших расчетов функции $S_0(\tau)$ для $\lambda = 1$ показал, что на глубинах $\tau \geq 0.1 \tau_c$ функция $S_0(\tau) \frac{\gamma}{3\sqrt{\pi}} \equiv s(t)$ фактически зависит не от двух переменных — τ и γ , а от одной — $t = \frac{\tau}{\tau_c}$. На рис. 2 приведен график функции $s(t)$, построенный для $\gamma = 10^{-4}$.

При $t > 0.1$ отличия значений функции $S_0(\tau) \frac{\gamma}{3\sqrt{\pi}}$ для $\gamma = 10^{-3}$ от значений этой функции для $\gamma = 10^{-4}$ не превосходят 5%.

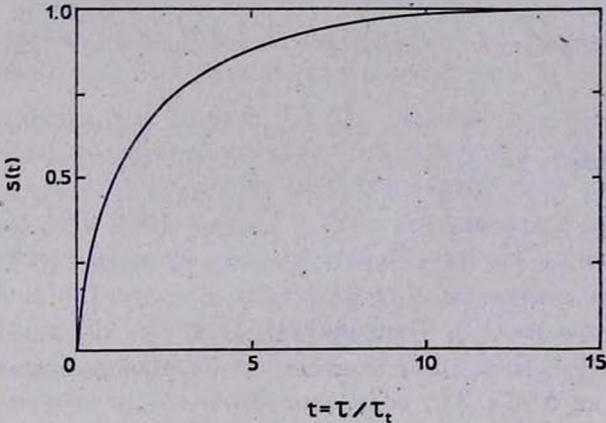


Рис. 2. Функция $s(t)$, описывающая поведение ФИ вдали от границы полубесконечной изотермической атмосферы при малых γ и $\lambda = 1$.

Обратимся теперь к атмосферам конечной оптической толщины. В задаче появляется еще один параметр — τ_0 . Ранее отмечалось, что при $\tau \ll \tau_0$ ядро уравнения (3) практически совпадает с ядром для неподвижных атмосфер. Поэтому для $\tau_0 \ll \tau_c$ ФИ при любых первичных источниках не отличаются от соответствующих статических ФИ. Функции $S_0^0(\tau)$ для атмосфер с $\gamma = 0$ детально изучены ([11], гл. 8).

Противоположный предельный случай, когда оптическая толщина атмосферы $\tau_0 \gg \tau_c$, уже рассмотрен выше. При любых значениях λ мы можем тогда считать атмосферу полубесконечной. Это значит, что степень возбуждения атомов у границ атмосферы дается первой формулой в (13), а значение ФИ в центре атмосферы — второй.

Осталось рассмотреть случай $\tau_0 \sim \tau_c$. Влияние параметров λ и γ можно оценить так же, как и для полубесконечных атмосфер.

При $1 - \lambda \gg \beta$ можно полагать $\gamma = 0$ — хорошо изученный ранее случай [11]. Если же $1 - \lambda \ll \beta$, то можно считать $\lambda = 1$. В [11], § 8.9 для статической консервативной ФИ получена асимптотическая формула, описывающая ход ФИ вдали от границ атмосферы,

$$\frac{S_0^0(t\tau_0)}{S_0^0(\tau_0/2)} \rightarrow 2t^{1/2}(1-t)^{1/2}, \quad \tau_0 \rightarrow \infty, \quad 0 < t < 1, \quad \lambda = 1. \quad (17)$$

Подчеркнем, что в правой части (17) стоит функция одной переменной.

Оказывается, что при $\gamma \ll 1$ имеет место аналогичное асимптотическое уменьшение числа переменных. Именно, функция $S_0(\tau)/S_n(\tau_0/2)$, зависящая от трех переменных (параметры τ_0 и γ здесь считаются аргументами функции), выражается через функцию двух переменных. Формально

$$\frac{S_0(t\tau_0)}{S_0(\tau_0/2)} = s(t, t_0); \quad \tau_0 \rightarrow \infty, \quad \gamma \rightarrow 0, \quad t_0 = \frac{\tau_0}{\tau_c} = \text{const}, \quad 0 < t < 1, \quad \lambda = 1. \quad (17a)$$

Явное выражение для функции $s(t, t_0)$ должно выглядеть очень сложно, и мы не будем пытаться его получить. Однако рассчитать эту функцию можно, если предварительно найти $S_0(\tau)$.

Мы решили уравнение (3) с $S^* = 1$ и $\gamma = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ для различных значений t_0 . На рис. 3 даны графики функций $s(t, 5)$ и $s(t, 25)$, построенные по значениям $S_0(t\tau_0)/S_0(\tau_0/2)$ для $\gamma = 10^{-4}$. Пунктирная кривая рассчитана по (17). Функции $s(t, 5)$ и $s(t, 25)$ при $0.1 < t < 0.9$, найденные для $\gamma = 10^{-2}, 10^{-3}$, отличаются от приведенных на графике не более, чем на 5% и 3% соответственно.

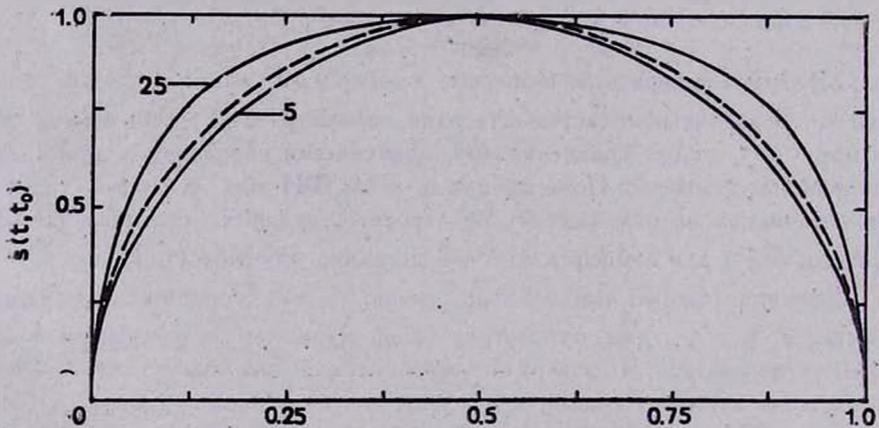


Рис. 3. Функции $s(t, t_0)$, описывающие поведение ФИ при $\lambda=1$ вдали от границ атмосфер конечной оптической толщины при $\gamma \rightarrow 0$. Числа у кривых — значения отношения $t_0 = \frac{\tau_0}{\tau_c}$. Пунктирная кривая соответствует предельному случаю $t_0 \rightarrow 0$.

Если $t_0 = \frac{\tau_0}{\tau_c} \gg 50$, то

$$s(t, t_0) \approx s\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (18)$$

с точностью до 3%. В противоположном случае малых t_0

$$s(t, t_0) \sim s(t, 0) = 2t^{1/2}(1-t)^{1/2}. \quad (19)$$

Наши численные данные не позволяют проверить, насколько хорошо выполняется (19), так как даже для $\gamma = 10^{-4}$ величина $\tau_c \sim 10^3$, а при $\tau_0 \ll 10^3$ (скажем, при $\tau_0 \lesssim 50$) поведение ФИ определяется в основном выходом фотонов через границы среды, и использовать (17) нельзя [23]. Однако для $t_0 = 1, 0.5, 0.1$ и $\gamma = 10^{-4}, 10^{-3}$ кривые $s(t, t_0)$ лежат между кривой $s(t, 5)$ и пунктирной кривой рис. 3.

5. *Приближенные выражения для ФИ.* Во многих астрофизических приложениях находить ФИ с высокой точностью не нужно, к тому же сделать это непросто. Исследуем область применимости и точность основных приближенных способов расчета ФИ на примере стандартной задачи.

Исторически первым является способ, предложенный В. В. Соболевым [3]. Его обычно называют вероятностным или методом вынесения, так как он заключается в вынесении функции $S_0(\tau')$ в точке $\tau' = \tau$ из-под знака интеграла в (3), откуда следует имеющее простой вероятностный смысл приближенное выражение для ФИ

$$L1: S_0(\tau) = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda} + (\tilde{\lambda}/2)[\tilde{K}_2(\tau) + \tilde{K}_2(\tau_0 - \tau)]}. \quad (20)$$

В формуле для ФИ полубесконечной атмосферы второго слагаемого в скобках нет, так как $\tilde{K}_2(\infty) = 0$. Нетрудно понять, что знаменатель в (20) представляет собой сумму вероятности гибели фотона из-за фотонизаций и ударов второго рода и вероятности прямого выхода через границы среды. В согласии с терминологией, введенной в [21] и [23], приближение (20) мы будем также называть приближением L1.

Вероятностный метод недавно был распространен Д. Хаммером и Дж. Райбики [15] на случай произвольных монотонных скоростей расширения $v(\tau)$. Авторы [15] привели графики функции $\frac{1}{2}[K_2(\tau/\sqrt{\pi}) + \beta(\gamma\sqrt{\pi})]$ для нескольких значений γ . Они не сравнивали значений ФИ, найденных в приближении L1, с точными ФИ. Однако хорошо известно, что в случае малых градиентов L1 можно использовать только на глубинах, больших длины термализации τ , [18]. Вблизи границ этот метод дает значения ФИ, ошибочные по порядку величины при любых оптических толщинах атмосферы (см. рис. 1А, где ФИ, найденная нами по (20), дана пунктиром). Ясно, что для атмосфер с $\tau_0 \ll \tau$, вероятностный метод неприменим.

В 1972 г. В. В. Иванов [24] предложил простое приближенное выражение для ФИ в неподвижной атмосфере (L2-приближение, по терминологии [21] и [23]). Это приближение применимо при любых значениях параметров τ_0 , λ , любом профиле коэффициента поглощения в линии — доплеровском, фойгтовском или лоренцовском и любом распределении первичных источников излучения. Приближенное решение отличается от точного не более, чем вдвое, во всех случаях. Вероятностное истолкование этого приближения для полубесконечной атмосферы, данное в [25], позволяет легко распространить L2 на атмосферы, движущиеся с постоянным градиентом скорости (в [18] приближение L2 вводится для полубесконечных атмосфер с $\lambda = 1$ из других соображений).

Процесс многократных рассеяний можно рассматривать как процесс случайных блужданий фотонов. В отличие от неподвижных атмосфер, фотоны выбывают из случайных блужданий не только из-за гибели при рассеяниях, но и вследствие смещения из-за эффекта Доплера. При $\gamma \ll 1$ дисперсия средних смещений фотона между последовательными рассеяниями, равная по определению

$$d \equiv \left[\int_0^{\infty} \tau^2 \tilde{K}_1(\tau) d\tau - (\bar{\tau})^2 \right]^{1/2}, \quad (21)$$

много больше величины среднего смещения

$$\bar{\tau} \equiv \int_0^{\infty} \tau \tilde{K}_1(\tau) d\tau, \quad (22)$$

т. е. $d/\bar{\tau} \gg 1$. Это значит, что процесс рассеяний носит недиффузионный характер. По этой причине диффузионное приближение, которое в данном случае формально можно ввести, приводит при нахождении ФИ к погрешностям, несколько превышающим погрешность L2. (О применимости диффузионного приближения для расчета функции источников в движущихся атмосферах см. [26—28] и [18]).

В [25] указано, что при $d/\bar{\tau} \gg 1$ можно приближенно заменить всю сложную ломаную траекторию фотона тем ее звеном (отрезком между двумя последовательными рассеяниями), которое имеет наибольшую проекцию на ось оптических глубин. Получающееся при этом приближенное выражение для ФИ в полубесконечной атмосфере с $\gamma \geq 0$ и $S^* = 1$ имеет вид:

$$\text{L2: } S_0(\tau) = (1 - \tilde{\lambda})^{-1/2} D^{-1/2}(\tau), \quad (23)$$

где

$$D(\tau) = 1 - \lambda \int_0^{\tau} K_1(t) dt = 1 - \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda} \tilde{K}_2(\tau). \quad (24)$$

Для атмосфер конечной оптической толщины в полной аналогии со статическим случаем введем следующее приближение:

$$L2: \quad S_0(\tau) = D^{-1/2}(\tau) D^{-1/2}(\tau_0 - \tau). \quad (25)$$

Формула (25) получена из соответствующей формулы для статической атмосферы [24] заменой $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$, $K_2^0(\tau) \rightarrow \tilde{K}_2(\tau)$. Назовем (23) и (25) L2-приближением для изотермических расширяющихся атмосфер.

Приближение L2, в отличие от L1, применимо при любых оптических толщинах, а также при произвольных λ и γ ($\gamma \ll 1$). Сравнение значений ФИ, найденных по (23) и (25) для различных τ_0 , λ и γ , с точными численными решениями уравнения (3) показало, что отличия в ФИ не превосходят множителя 2. В качестве иллюстрации на рис. 1b даны характерные кривые относительной погрешности L2 $\Delta = 1 - S_0^{\text{прибл.}}/S_0^{\text{точн.}}$. Значения параметров следующие: $\gamma = 10^{-4}$, $\lambda = 1$; кривая 1 — полубесконечная атмосфера, кривая 2 — атмосфера толщины $\tau_0 = 9 \cdot 10^3 \approx 5\tau_c$.

6. *Профили линий.* ФИ не зависит от направления движения вещества, а также от того, расширяется атмосфера или сжимается (так как ядро интегрального уравнения для ФИ четно по γ). Направление движения является одним из факторов, определяющих форму линии для наблюдателя. Будем считать, что наблюдатель неподвижен относительно границы $\tau = 0$, а атмосфера расширяется со скоростью $v(\tau) = \gamma\tau$. Тогда для доплеровского профиля и $S^* = 1 - \tilde{\lambda}$ интенсивность на границе $\tau = 0$ дается формулой

$$I(0, \mu, x) = (1 - \tilde{\lambda}) \int_0^{\tau} S_0(\tau) \exp \left\{ -(x + \mu\gamma\tau)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma\mu^2} [\operatorname{erfc}(x) - \operatorname{erfc}(x + \mu\gamma\tau)] \right\} \frac{d\tau}{\mu}, \quad \mu > 0. \quad (26)$$

Интенсивность на границе $\tau = \tau_0$ равна

$$I(\tau_0, -\mu, x) = (1 - \bar{\lambda}) \int_0^{\tau_0} S_0(\tau) \exp \left\{ - (x + \mu\tau)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma\mu^2} [\operatorname{erfc}(x + \mu\gamma\tau) - \operatorname{erfc}(x + \mu\gamma\tau_0)] \right\} \frac{d\tau}{\mu}, \quad \mu > 0, \quad (27)$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (28)$$

Потоки излучения на границах атмосферы равны

$$F_x(0) = \int_0^1 I(0, \mu, x) \mu d\mu; \quad F_x(\tau_0) = \int_0^1 I(\tau_0, -\mu, x) \mu d\mu. \quad (29)$$

Рассмотрим вначале полубесоконечные атмосферы ($\tau_0 = \infty$). Мы считали выходящую интенсивность и поток для $\gamma = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ и многих значений λ . В формуле (26) ФИ находилась кубической интерполяцией по ее значениям в точках коллокации, выражение в квадратных скобках раскладывалось в ряд при $\mu\gamma \leq 0.05$. Интегралы в (26) и (27) вычислялись с помощью адаптивной квадратурной программы QUANC8, описанной в [26]. Интегралы в (29) рассчитывались по квадратурной формуле Гаусса с $24 \div 32$ узлами.

На рис. 4А даны интенсивности выходящего по нормали излучения для атмосфер с консервативным рассеянием ($\lambda = 1$) и $S^* = 1 - \bar{\lambda} = \frac{\gamma}{3\sqrt{\pi}}$. Числа у кривых — значения γ . Из рисунка видно, что для интенсивности излучения существуют две характерные частоты $\pm x_c$. На частоте $-x_c$ происходит резкий спад интенсивности, на частоте $+x_c$ имеется максимум (см. также [4], где рассматривались рассеивающие вперед — назад среды).

В красном крыле линии, при $x \ll x_c$, излучение приходит из глубоких слоев атмосферы, где $I(\tau, \mu, x) \sim I(\infty) = S_0(\infty)(1 - \bar{\lambda}) = 1$. В синем крыле ($x \gg x_c$) из-за доплеровского сдвига по частоте глубокие слои вклада не вносят, и интенсивность быстро падает. В центре линии ($-x_c \leq x \leq x_c$) излучение приходит в основном из пограничного слоя, где ФИ быстро уменьшается к границе. В этом слое скорость расширения мала, поэтому центральная часть профиля такая же, как и для неподвижной атмосферы, в которой вероятность выжи-

вания фотона равна $\lambda_{\text{эфф.}} = \tilde{\lambda}$. Для частоты x_c оптическая толщина пограничного слоя, найденная с учетом расширения, должна быть порядка единицы:

$$\frac{1}{\tau \mu^2} \int_{x_c}^{x_c + \mu \tau_b} e^{-x^2} dz = 1, \quad (30)$$

где τ_b — толщина пограничного слоя для неподвижной атмосферы с $\lambda = \tilde{\lambda}$. Величина $\tau_b \approx (1 - \tilde{\lambda}) \sqrt{-\ln(1 - \tilde{\lambda})}$ (см. [11], § 6.3). Подставив это выражение для τ_b в (30), найдем

$$x_c \propto \sqrt{-\ln[\mu(1 - \tilde{\lambda})]}. \quad (31)$$

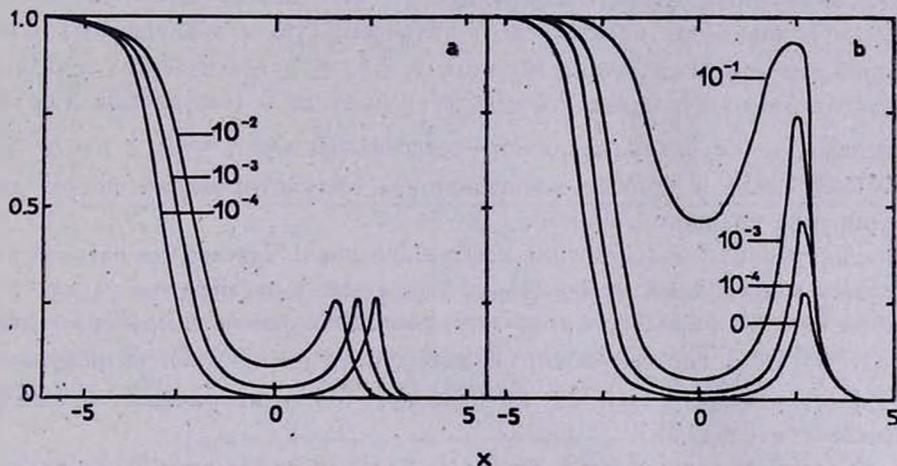


Рис. 4. Профили выходящего излучения в расширяющихся полубесконечных изотермических атмосферах. а — выходящая по нормали интенсивность, числа у кривых — значения γ , параметр $\lambda = 1$. б — поток на поверхности атмосферы, $\gamma = 10^{-4}$, числа у кривых — значения $1 - \lambda$.

Зависимость характерной частоты x_c от параметра γ и косинуса угла наклона μ слабая. Поэтому неудивительно, что поток на поверхности атмосферы мало отличается от выходящей по нормали интенсивности. На рис. 4б даны кривые потока для $\gamma = 10^{-4}$ и $1 - \lambda = 0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-1}$. Заметим, что существование у интенсивности узкого максимума было аналитически установлено С. И. Грачевым [22] (в приближении рассеяния вперед-назад). Отметим также, что замена γ на $-\gamma$ эквивалентна изменению направления оси x на обратное, так что профиль линии „разворачивается“ относительно частоты $x = 0$.

Для атмосфер конечной оптической толщины с равномерно распределенными первичными источниками несмотря на наличие градиента скорости ФИ симметрична относительно середины слоя. Однако профили линий на границе $\tau = 0$ отличаются от профилей на границе $\tau = \tau_0$, причем тем больше, чем выше разность скоростей расширения в пределах атмосферы.

Для расширяющихся атмосфер с $\tau_0 \ll \tau_c$ профили линий почти не отличаются от статических, так как ФИ практически совпадает со статической, а скорости в атмосфере малы ($v_{\max} = \gamma \tau_0 \ll 1$). Для статических же атмосфер $I(0, \mu, x) = I(\tau_0, -\mu, x)$, и профили симметричны относительно частоты $x = 0$. Между профилями в потоке и выходящей по нормали интенсивностью качественных отличий нет.

Для атмосферы с $\tau_0 \gg \tau_c$ ФИ равна ФИ в полубесконечной атмосфере (равенство функций источников надо понимать в смысле, указанном в разделе 4). Интенсивность на границе $\tau = 0$ атмосферы конечной оптической толщины будет отличаться от интенсивности на границе полубесконечной атмосферы только на частотах $x \ll -\mu \gamma \tau_0$, поскольку на этих частотах оптическая толщина атмосферы убывает до 0 (см. рис. 5а, где интенсивности — пунктирные линии — рассчитаны для $\gamma = 10^{-2}$, $\lambda = 1$, $\tau_0 = 2 \cdot 10^3$; числа у кривых — значения μ). Результирующий поток дан на рисунке сплошной кривой.

На границе $\tau = \tau_0$ картина совершенно иная. Частота, на которой наблюдается вторичный максимум, сильно зависит от значения μ , так как теперь вклад в выходящее излучение вносит пограничный слой на глубинах $\tau > \tau_0 - \tau_b$, где скорости велики ($v = \gamma(\tau_0 - \tau_b) \gg 1$). В результирующем профиле в потоке на границе $\tau = \tau_0$ вторичный максимум замывается (рис. 5b).

Характерные профили в потоке для случая, когда оптическая толщина атмосферы $\tau_0 \sim \tau_c$, приведены на рис. 6. Значения параметров следующие: $\gamma = 10^{-3}$, $\lambda = 1$; числа у кривых — значения $\gamma \tau_0$. На рис. 6а даны профили на границе $\tau = 0$, на рис. 6b — на границе $\tau = \tau_0$.

Мы также рассчитали профили линий, пользуясь L2-приближением ФИ. Эти профили отличаются от точных незначительно. Если в (26), (27)

и (29) подставить статические ФИ, найденные для эффективных $\tilde{\lambda}$, то результирующие профили отличаются от точных еще меньше. Однако для этого необходимо предварительно решить интегральное уравнение для ФИ в статической атмосфере, тогда как для применения L2 достаточно иметь ядерную функцию $K_2(\tau)$.

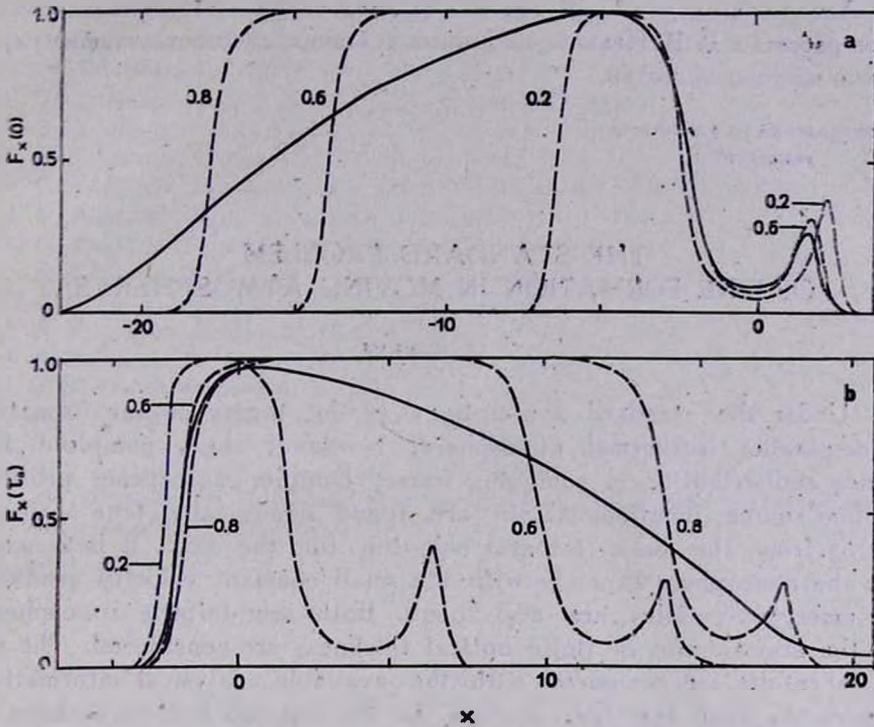


Рис. 5. Профили линий на границах расширяющейся атмосферы конечной оптической толщины. Пунктирные линии — интенсивность излучения, числа у кривых — значения μ ; сплошная кривая — поток. Градиент скорости $\gamma = 10^{-2}$, [оптическая толщина $\tau_0 = 2 \cdot 10^3$, $\lambda = 1$]. а — профили на границе $\tau = 0$; б — на границе $\tau = \tau_0$.

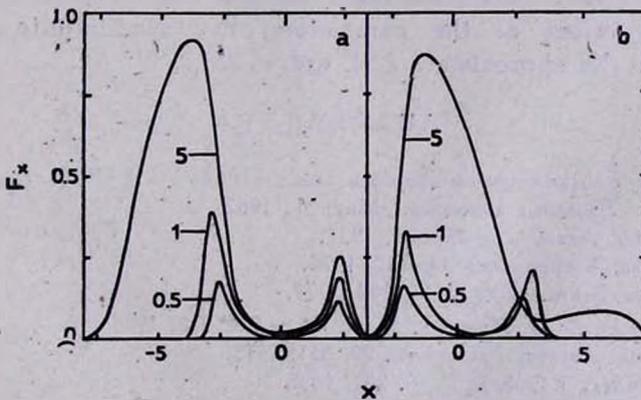


Рис. 6. Поток излучения на границах расширяющихся атмосфер конечной оптической толщины. Градиент скорости $\gamma = 10^{-3}$, $\lambda = 1$, числа у кривых — значения μ . а — профили на границе $\tau = 0$; б — на границе $\tau = \tau_0$.

Автор благодарит С. И. Грачева за плодотворное обсуждение результатов работы и В. В. Иванова за ценные указания, способствовавшие улучшению настоящей статьи.

Ленинградский государственный
университет

THE STANDARD PROBLEM OF LINE FORMATION IN MOVING ATMOSPHERES

V. M. SERBIN

Under the standard assumptions of the theory of line formation (plane-parallel isothermal atmosphere, two-level atom, complete frequency redistribution in comoving frame, Doppler absorption profile), the line source functions (LSF) are found numerically (the accuracy $\sim 1\%$) from the basic integral equation for the LSF. It is assumed that the atmosphere expands with the small constant velocity gradient. The emergent profiles are also found. Both semi-infinite atmospheres and the atmospheres of finite optical thickness are considered. The numerical results are compared with the available analytical information. It is shown that the line profiles at the top and bottom surfaces of the atmosphere are substantially different if the difference of expansion velocities within the atmosphere is substantially greater than the thermal velocity, in spite of the symmetry of the LSF relative to the center of the slab. The simple approximation for LSF is given. The approximate LSF differs from the exact one by no more than a factor of 2 for any values of the parameters. For semi-infinite atmospheres the errors in the approximate LSF are $\leq 25\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Движущиеся оболочки звезд, Изд-во ЛГУ, 1947.
2. Д. Михалас, Звездные атмосферы, Мир, М., 1982.
3. В. В. Соболев, Астрон. ж., 34, 694, 1957.
4. С. И. Грачев, Астрофизика, 14, 112, 1978.
5. С. И. Грачев, Вестн. ЛГУ, № 19, 114, 1977.
6. G. B. Rybicki, D. G. Hummer, M. N. RAS, 144, 313, 1968.
7. E. Simoneau, Astron. Astrophys., 29, 357, 1973.
8. J. L. Kulander, J. Q. S. R. T., 8, 273, 1958.
9. E. H. Avrett, D. G. Hummer, M. N. RAS, 130, 295, 1965.
10. D. G. Hummer, M. N. RAS, 138, 173, 1968.
11. V. V. Ivanov, Transfer of Radiation in Spectral Lines, NBS Spec. Publ., N 385, 1973.

12. Г. И. Марчук, Методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, М., 1961.
13. D. G. Hummer, G. B. Rybicki, Methods in Computational Physics, 7, 53, 1967.
14. G. Scharmer, Ap J., 249, 720, 1981.
15. D. G. Hummer, G. B. Rybicki, Ap. J., 254, 767, 1982.
16. D. G. Hummer, J. Q. S. R. T., 26, 187, 1981.
17. В. В. Витязев, Труды АО ЛГУ, 35, 30, 1979.
18. С. И. Грачев, Рукопись деп. в ВИНТИ 12 января 1978, № 1007-78.
19. U. Frish, H. Frish, M. N. RAS, 173, 187, 1975.
20. U. Frish, H. Frish, J. Q. S. R. T., 28, 361, 1982.
21. В. В. Иванов, В. М. Сербин, Астрон. ж., 61, 691, 1984.
22. С. И. Грачев, Астрофизика, 22, 1985 (в печати).
23. В. М. Сербин, Астрон. ж., 62, 272, 1985.
24. В. В. Иванов, Астрон. ж., 49, 115, 1972.
25. В. В. Иванов, Астрон. ж., 62, 283, 1985.
26. В. П. Гринин, Астрофизика, 10, 239, 1974.
27. В. П. Гринин, Изв. Крымской обс., 51, 65, 1974.
28. В. П. Гринин, Изв. Крымской обс., 53, 176, 1976.
29. Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер, Машинные методы математических вычислений, Мир, М., 1980.