Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 6, 2020, стр. 51 – 67

ФУНКЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ УОЛША

М. Г. ГРИГОРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *gmarting@ysu.am*

Аннотация. В данной работе построена интегрируемая функция универсальна для $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно системы Уолша в смысле знаков, ряд Фурье - Уолша, которой сходится всюду на $(0,1)$ и в метрике $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$, ее коэффициенты Фурье по системе Уолша расположены в убывающем порядке и после выбора подходящих знаков для ее коэффициентов Фурье вновь полученный ряд будет универсальным относительно перестановок в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$.

MSC2010 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: универсальная функция; ряд Фурье; сходимость; система Уолша.

1. Введение

Работа продолжает исследования автора связанных с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах. Заметим, что единого определения понятия «универсальная функция» не существует. Обычно под этим термином понимается функция, с помощью которой можно «представить» «все» функции. При этом способ представления, а также класс представимых функций может трактоваться различным образом. Примеры универсальных функций привлекали внимание многих математиков и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической печати. В этих публикациях изучаются те или иные универсальные функции, а также их свойства. Причем развитие происходит как в действительных, так и в комплексных рамках. По сути первый тип универсальной функции был рассмотрен в 1929 г. Дж. Биркхофом в работе[1]: существует целая функция $g(z)$, которая универсальна относительно сдвигов, т.е. для любой целой функции $f(z)$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта но. 18T-1A148.

и числа $r > 0$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая,что последовательность сдвигов $\{g(z+n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(z)$ на круге $|z| \le r$.

В 1935 году Й. Марцинкевич [2], опираясь на некоторые идеи Н. Н. Лузина, доказал существование непрерывной функций, которая универсальна относительно производных чисел (производной отношния). Если $h_n \to 0$ заранее фиксированная последовательность, то существует функция $F \in C[0,1]$ такая, что для любой измеримой функций g определенной на $[0,1]$ существует возрастающая подпоследовательность натуральных чисел n_k такая, что почти всюду на $[0,1]$

$$\lim_{\to\infty} \frac{F(x+h_{n_k}) - F(x)}{h_{n_k}} = g(x)$$

Более того, он в этой статье доказал, что множество таких универсальных функций является множеством 2-ой категории в $C[0,1]$. В этом направлении интересные результаты были получены также в работах [3]-[4].

В 1952г. Дж. Маклейн в работе [5] доказал, что существует целая функция $g(z)$, которая универсальна относительно производных, а именно: для любой целой функции $f(z)$ и числа $r > 0$ можно найти возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы последовательность производных $\{g^{(n_k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходилась к $f(z)$ на круге $|z| \le R$.

В 1987г. К. Гроссе — Эрдман [6] доказал существование вещественной действительной функции с универсальным рядом Тейлора: существует функция $g(x) \in C^{\infty}(R)$ с $g(0) = 0$, ряд Тейлора которой в точке $x = 0$ локально — равномерно универсален в $C(R)$, т.е. для любой функции $f(x) \in C(R)$ с $f(0) = 0$ и числа $r > 0$, существует подпоследовательность

$$S_{n_k}(g,0) = \sum_{m=1}^{n_k} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

частичных сумм ряда Тейлора функции $g(x)$, которая равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $|x| \le r$.

В работах [7],[8] В. Лью был построен комплексные степенные ряды $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ с ненулевыми радиусамы сходимости $R > 0$, подпоследовательность частичных сумм которых аппроксимирует любые многочлены на произвольных компактах $\{z \in K : |z| > R\}$ со связанными дополнениями.

Следует отметить, что вопросам существования рядов как по классическим, так и по общим ортонормальным системам, универсальных тем или иным смыслом в различных классах функций, посвящено много работ (см. [9–16]). Для формулировки некоторых результатов существования универсальных рядов напомним следующие обозначения.

Пусть $M[0,1]$- совокупность всех (не обязательно конечных) измеримых функций (соотв. $L^0[0,1]$) - класс всех (соотв. почти везде конечных) измеримых на $[0,1]$ функций. Под сходимостью в $M[0,1]$ или в $L^0[0,1]$ мы будем подразумывать сходимость почти всюду. Пусть $E \subseteq [0,1]$ некоторое измеримое множество и $|E|$–

мера Лебега измеримого множества $E \subseteq [0,1]$, $L^p(E)$ $(p > 0)$ – класс всех тех измеримых на E функций, для которых $\int_E |f(x)|^p dx < \infty$. Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система на $[0,1]$ и пусть $c_k(U) = \int_0^1 U(x)\varphi_k(x)dx,\ k \in$ **N**–коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0,1]$,(**N**– совокупность всех натуральных чисел).Пусть

$$(1,1) \qquad S_m(x,U,\Phi) \ = \sum_{k=0}^{m} c_k(U)\varphi_k(x),\ spec(U) = \{k \in \mathbf{N}\cup\{0\}; c_k(U) \neq 0\}$$

Пусть метрическое пространство $S-$ какое-нибудь из пространств $M[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $p \geq 0$.

Определение 1.1. *Будем говорить, что функция $U \in L^1[0,1]$ универсальна для класса S относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$:*

а) в обычном смысле, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в обычном смысле, т.е. существует подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty} \subset$ **N** *, $m_k \nearrow^{\infty}$ такая, что $\{S_{m_k}(x,U,\Phi)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ в S.*

б) в квази-обычном смысле, если существует последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ был бы универсальным в обычном смысле в S,

в) в смысле перестановок, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в смысле перестановок т.е. для каждой функции $f \in S$ члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(U) W_k(x)$ можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)}(U) W_{\sigma(k)}(x)$ сходился к функции $f(x)$ в S,

г) в смысле знаков, если для каждой функции $f \in S$ можно найти последовательность знаков $\{\ \delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ сходится к функции $f(x)$ в S.

Первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в $M[0,1]$ в смысле сходимости почти всюду, является работа [9] Д.Е.Меньшова. Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, универсальные в M в обычном смысле (в случае сходимости почти всюду) были построены в работе [10] А.А.Талаляном.(см. также работы [11]-[16]).

В последние годы нами (мной и моими соавторами -учениками) были получены некоторые результаты (см. [17] -[22]), связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах. Такие функции мы назовем универсальными относительно классических систем.

Замечание 1.1. *Не существует функции $U \in L^1[0,1]$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе (по системе Уолша) был бы универсальным в классе $M[0,1]$ в обычном смысле (даже в случае, сходимости по мере).*

В самом деле, если существовала бы функция $U \in L^1[0,1]$, которая универсальна для класса $M[0,1]$ относительно тригонометрической системы в обычном смысле, тогда для функции $f(x) = 2U(x)$ нашлась бы подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\}$ такая, что по мере на $[0,1]$

$$(1,2) \qquad \lim_{k\to\infty} \sum_{|n|=0}^{m_k} d_n(U) e^{2\pi nix} = 2U(x), \quad d_n(U) = \int_0^1 U(x) e^{-2\pi nix} dx$$

С другой стороны, из известной теоремы Колмогорова [23] (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$) вытекает, что $\sum\limits_{|n|=0}^{m_k} d_n(U) e^{2\pi nix}$ -сходится к $U(x)$ по мере на $[0,1]$.Отсюда и из (1.2) вытекает, что $U(x) = 2U(x)$ почти всюду на $[0,1]$. Пришли к противоречию.

Значит, не существует функции $U \in L^1[0,1]$ универсальная для классов $M[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно тригонометрической системы (соотв. относительно системы Уолша) в обычном смысле.

Сразу же возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен.

Вопрос 1. Существует ли ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что можно было бы построить функцию $U \in L^1[0,1]$ универсальную для класса $L^p[0,1]$, $p \in [0,1)$ или для класса *M[0,1]* относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в обычном смысле?

Отметим, что в работах [18], [20] автором и А.Саргсяном построены интрегрируемые функций $U(x)$ унивесальные для классов $L^p[0,1],\ p\in(0,1)$ относительно системы Уолша **в смысле знаков.** Отметим также, что нам не известен вопрос о том: существует ли функция $U\in L^1[0,1)$ унивесальна для классов $L^p[0,1]$, $p\in(0,1)$ относительно системы Уолша **в смысле перестановок** ?

В этой статье мы построим функцию $U\in L^1[0,1]$ такую, что после выбора подходящих знаков *(* $\varepsilon_k=\pm 1$, $k=0,1,2..$*)* для ее коэффициентов Фурье- Уолша $\{c_k(U)\}_{k=0}^{\infty}$ можно достичь того, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k c_k(U)W_k(x)$- будет универсальным в $L^p[0,1],\ p\in(0,1)$ в смысле перестановок.

Верны следующие теоремы

Теорема 1.1. *Существует функция $U\in L^1[0,1]$ (suppU $\subset[0,\varepsilon]$, здесь $\varepsilon\in(0,1)-$ наперед заданное число) со сходящимся по $L^1[0,1]$ норме и всюду на $(0,1)$ рядом Фурье - Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и которая является универсальной для класса $M[0,1]$ относительно системы Уолша* ***в квази- обычном смысле.***

Теорема 1.2. *Существуют числа $\{\ \varepsilon_k=\pm1,k\geq0\}$ и функция $U\in L^1[0,1]$ (suppU $\subset[0,\varepsilon]$, здесь $\varepsilon\in(0,1)-$ наперед заданное число) со сходящимся по $L^1[0,1]$ норме и всюду на $(0,1)$ с рядом Фурье - Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, такие, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k c_k(U)W_k(x)$ -универсален в $L^p[0,1]$, $p\in(0,1)$ в смысле перестановок.*

Замечание 1.2. *Нетрудно видеть, что теорема 1.2 окончательна в некотором смысле (неулучшаема), она не верна при $p\geq1$.*

Теоремы 1.1 и 1.2 следуют из более сильной Теоремы 1.3.

Теорема 1.3. *Существует функция $U\in L^1[0,1]$ (suppU $\subset[0,\varepsilon]$, здесь $\varepsilon\in(0,1)-$ наперед заданное число) со сходящимся по $L^1[0,1]$ норме и всюду на $(0,1)$ рядом Фурье-Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, которая обладает следующими свойствами:*

1) она является универсальной для класса $M[0,1]$ относительно системы Уолша в квази- обычном смысле,

2) для любого $p\in(0,1)$ функция $U(x)$ универсальна для $L^p[0,1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков, *3) можно найти последовательность знаков* $\{\varepsilon_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ *такую, что ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ *будет универсальным в* $L^p[0,1], p \in (0,1)$ *в смысле перестановок.*

2. Вспомогательные факты

Напомним определение системы Уолша-Пэли $\{W_k(x)\}$ (см.[24], [25]).

$$W_0(x) = 1, \quad W_n(x) = \prod_{s=1}^{k} r_{m_s}(x), \quad n = \sum_{s=1}^{k} 2^{m_s}, \quad m_1 > m_2 > ... > m_s \geq 0,$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ - система Радемахера:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, ...$$

Введем некоторые обозначения. Разобьем полуинтервал $[0,1)$ на 2^m равных частей и обозначим эти полуинтервалы через $\Delta_m^{(j)}$, которые будем в дальнейшем называть двоичными интервалами или просто интервалами вида$\Delta_m^{(j)}, (\Delta_m^{(j)} = [\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m})$, $1 \leq j \leq 2^m)$. Пусть

$$S_m(x,g) = \sum_{k=0}^{m} c_k(g) W_k(x), \tag{2,1}$$

где $c_k(g) = \int_0^1 g(x) W_k(x) dx-$коэффициенты Фурье- Уолша функции $g \in L^1(0,1)$.

Мы будем использовать следующие неравенства (см. [26])

$$|S_n(x,g)| < \frac{2}{\delta} \int_c^d |g(t)|\, dt \quad \forall x \notin [c-\delta, d+\delta]\,, \tag{2,2}$$

где $g(t)-$ произвольная интегрируемая и вне (c,d) обращающаяся в ноль функция, $\delta-$ произвольное положительное число.

$$\int_0^1 |S_n(x,g)|^p\, dx < \frac{A}{1-p} \left(\int_0^1 |g(x)| dx \right)^p, \quad \forall p \in (0,1), \tag{2.3}$$

где $g(t)-$ произвольная интегрируемая на $(0,1)$ функция и $A-$постоянная. В дальнейшем нам полезна будет следующая очевидая лемма.

Лемма 2.1. *Для каждой функции* $g(x) \in$ *существует последовательность* $\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *полиномов по системе Уолша с рациональными коэффициентами , которая почти всюду на* $[0,1]$ *сходится к* $g(x)$.

Мы также будем использовать следующую лемму, доказанную в [20] (см. Лемма 3 в [20]).

Лемма 2.2. *Пусть* $0 < p_0 < 1,\ n_0 \in N,\ \eta \in (0,1)$ *и* $f(x) = \sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} \tilde{\gamma}_m \chi_{\widetilde{\Delta}_m}(x)$ *есть такая ступенчатая функция, что* $\tilde{\gamma}_m \neq 0$ *и* $\{\widetilde{\Delta}_m\}_{m=1}^{\tilde{\nu}_0}$ *– суть непересекающийся двоичные интервалы с* $\sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} |\widetilde{\Delta}_m| = 1$. *Тогда можно найти полиномы*

$$H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x), \qquad Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1,$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

$$0 < a_{k+1} \leq a_k < \eta, \quad \forall k \in [2^{n_0}, 2^n - 1), \quad H(x) \cdot \chi_{[2^{-n_0},1]}(x) = 0,$$

$$\int_0^1 |f(x) - H(x)|^{p_0}\, dx < \eta, \quad \max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right| dx < \eta,$$

$$\max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x) \right|^{p_0} dx < 5 \int_0^1 |f(x)|^{p_0} dx.$$

3. Доказательство теорем 1.1 – 1.3

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $p \in (0,1)$. Положим

$$m_0 = 2 + [\log_2 \frac{1}{\varepsilon}] \quad M_1 = 2^{m_0}\ . \tag{3.1}$$

Рассмотрим счетное множество всех ступенчатых функций вида

$$\sum_{j=1}^{2^n} \gamma_j \chi_{\Delta_n^{(j)}}(x), \tag{3.2}$$

где $\gamma_j \neq 0$-рациональные числа и пусть $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$– есть последовательность этих функций в произвольной нумерацией.

Применим Лемму 2, полагая в ее формулировке

$$n_0 = m_0,\ \eta = 2^{-4}, \quad p_0 = p, \quad f(x) = f_1(x)$$

Тогда определяются полиномы по системе Уолша вида

$$H_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_2-1} a_k^{(1)} W_k(x)\ , \quad Q_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_2-1} \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x),\ M_1 = 2^{m_0},\ M_2 = 2^{m_1}$$

удовлетворяющие условиям:

$$0 < a_{k+1}^{(1)} \leq a_k^{(1)} < \frac{1}{2}, \quad \delta_k^{(1)} = \pm 1, \int_0^1 \left| f_1(x) - Q_1^{(1)}(x) \right|^p dx < 2^{-4}, k \in [M_1, M_2),$$

$$H_1^{(1)}(x)\cdot\chi_{[I_2,1]}(x)=0,\ I_1=\frac{1}{M_1},$$

$$\int_0^1|H_1^{(1)}(x)|dx<\max_{m\in[M_1,M_2)}\int_0^1|\sum_{k=M_1}^{m}a_k^{(1)}W_k(x)|dx<2^{-4},$$

$$H_1^{(1)}(x)\cdot\chi_{[I_2,1]}(x)=0,\ I_1=\frac{1}{M_1},\ \int_0^1\left|f_1(x)-Q_1^{(1)}(x)\right|^p dx<2^{-4},$$

$$\max_{m\in[M_1,M_2)}\int_0^1|\sum_{k=M_{2n-1}}^{m}\delta_k^{(1)}a_k^{(1)}W_k(x)|^p dx<5\int_0^1|f_1(x)|^p dx.$$

Снова применяя лемму 2.2, полагая в ее формулировке

$$n_0=[\log_2 M_2],\quad \eta=\min\{a_{M_2-1}^{(1)};2^{-8}\},\quad p_0=p,\quad f(x)=\{f_1(x)-H_1^{(1)}(x)\}.$$

Тогда определяются полиномы по системе Уолша вида

$$H_1^{(2)}(x)=\sum_{k=M_2}^{M_3-1}a_k^{(1)}W_k(x)\ ,\quad Q_1^{(2)}(x)=\sum_{k=M_2}^{M_3-1}\delta_k^{(1)}a_k^{(1)}W_k(x),k\in[M_2,M_3)=[2^{m_1},2^{m_2})$$

удовлетворяющие условиям:

$$0<a_{k+1}^{(1)}\le a_k^{(1)}<a_{M_2-1}^{(1)},\qquad \delta_k^{(1)}=\pm1,\forall k\in[M_2,M_3),$$

$$\int_0^1|\{f_1(x)-H_1^{(1)}(x)\}-Q_1^{(2)}(x)|^p\,dx<2^{-8},\quad H_1^{(2)}(x)\cdot\chi_{[I_2,1]}(x)=0,\quad I_2=\frac{1}{M_2},$$

$$\int_0^1|H_1^{(2)}|dx<\max_{m\in[M_2,M_3)}\int_0^1|\sum_{k=M_2}^{m}a_k^{(1)}W_k(x)|dx<2^{-8}.$$

Нетрудно видеть, что продолжая эти рассуждения, мы можем по индукции определить последовательности полиномов

$$\{H_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^{\infty},\quad \{H_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^{\infty},\quad \{Q_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^{\infty},\ \{Q_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

вида

$$(3.3)\quad H_n^{(1)}(x)=\sum_{k=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1}a_k^{(n)}W_k(x)\ ,\quad H_n^{(2)}(x)=\sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1}a_k^{(n)}W_k(x),\quad M_1=2^{m_0}\ ,$$

$$(3.4)\qquad Q_n^{(1)}(x)=\sum_{k=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1}\delta_k^{(n)}a_k^{(n)}W_k(x)\ ,\qquad Q_n^{(2)}(x)=\sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1}\delta_k^{(n)}a_k^{(n)}W_k(x),$$

где

$$(3.5)\qquad M_k\nearrow\infty,\quad \delta_k^{(n)}=\pm1,\quad k\in[M_{2n-1},M_{2n+1}),n=0,1,2,....,$$

которые для каждого $n=1,2,....$ удовлетворяют условиям:

$$(3.6)\qquad 0<a_{k+1}^{(n)}\le a_k^{(n)}<a_{M_{2n-1}-1}^{(n-1)},\quad k\in[M_{2n-1},M_{2n+1}),$$

$$\int_0^1 \left| f_n(x) - \sum_{j=1}^{n} \left(H_j^{(1)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right|^p dx < 2^{-3n}, \tag{3.7}$$

$$H_n^{(1)}(x)\chi_{[I_{2n-1},1]}(x) = H_n^{(2)}(x)\chi_{[I_{2n},1]}(x) = 0,\ I_j = \frac{1}{M_j}, \tag{3.8}$$

$$\int_0^1 |H_n^{(1)}(x)|dx \le \max_{m\in[M_{2n-1},M_{2n})} \int_0^1 |\sum_{k=M_{2n-1}}^{m} a_k^{(n)} W_k(x)|dx < 2^{-\frac{2}{p}(n+4)}, \tag{3.9}$$

$$\int_0^1 |H_n^{(2)}(x)|dx \le \max_{m\in[M_{2n},M_{2n+1})} \int_0^1 |\sum_{k=M_{2n}}^{m} a_k^{(n)} W_k(x)|dx < 2^{-\frac{2}{p}(n+4)}, \tag{3.10}$$

$$\int_0^1 \left| f_n(x) - Q_n^{(1)}(x) \right|^p dx < 2^{-4n-2}, \tag{3.11}$$

$$\max_{m\in[M_{2n-1},M_{2n})} \int_0^1 |\sum_{k=M_{2n-1}}^{m} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x)|^p dx < 5 \int_0^1 |f_n(x)|^p dx. \tag{3.12}$$

Учитывая соотношения (3.3) и (3.8)- (3.10), в силу (2.1) и (2.2) для всех $x \in [I_{2n-1}+2^{-n}, 1]$ и для каждого $m \in [M_{2n-1}, M_{2n})$, $\forall n \ge 1$ будем иметь

$$\left| \sum_{k=M_{2n-1}}^{m} a_k^{(n)} W_k(x) \right| = \left| S_m(x, H_n^{(1)}) \right| < \frac{2}{2^{-n}} \int_0^1 \left| H_n^{(1)}(t) \right| dt \le 2^{-n-1}, \tag{3.13}$$

Аналогично для всех $x \in [I_{2n}+2^{-n}, 1]$ и для каждого $m \in [M_{2n}, M_{2n+1})$, $n \ge 1$ получим

$$\left| \sum_{k=M_{2n}}^{m} a_k^{(n)} W_k(x) \right| < \frac{2}{2^{-n}} \int_0^1 \left| H_n^{(2)}(t) \right| dt \le 2^{-n-1}. \tag{3.14}$$

Из (3.9), (3.10) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \left(\int_0^1 \left| H_n^{(j)}(x) \right| dx \right) < \infty. \tag{3.15}$$

Определим функцию $U(x)$ и последовательность чисел $\{a_k\}$ следующим образом

$$a_k = 1,\quad k \in [0, 2^{m_0}\ ),\quad a_k = a_k^{(n)},\quad k \in [M_{2n-1}, M_{2n+1}),\ n = 1, 2, . \tag{3.16}$$

$$U(x) = H_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x), \tag{3.17}$$

где (см. (3.1))

$$H_0(x) = \sum_{k=0}^{2^{m_0}\ -1} W_k(x), \tag{3.18}$$

Отсюда и из (3.15) следует $U(x) \in L^1[0,1]$. В силу (3.1), (3.3), (3.8), (3.17) и (3.18) имеем $U(x)=0$ при $x \in [2^{-m_0},1] \subset [\varepsilon,1]$.

Пусть $x \in (0,1)$, ясно, что для некоторго натурального n_x, $x \in [I_{2n-1}+2^{-n},1]$ для всех $n \geq n_x$.Тогда в силу (3.13), (3.14) и (3.16) – (3.18) для любых $N \in [M_{2n-1}, M_{2n+1})$ при $n \geq n_x$ будем иметь

$$\left|U(x)-\sum_{k=0}^{N} a_k W_k(x)\right| \leq \max_{m\in[M_{2n-1},M_{2n})}\left|\sum_{k=M_{2n-1}}^{m} a_k^{(n)} W_k(x)\right| +$$

$$+\max_{m\in[M_{2n},M_{2n+1})}\left|\sum_{k=M_{2n}}^{m} a_k^{(n)} W_k(x)\right| \leq 2^{-n}$$

Откуда вытекает, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$ сходится к $U(x)$ всюду на $(0,1)$. Учитывая соотношения(3.9), (3.10), (3.16)- (3.18) для любых $N \in [M_{2n-1}, M_{2n+1})$, $n \geq 1$ получим

$$\int_0^1 \left|U(x)-\sum_{k=0}^{N} a_k W_k(x)\right| dx \leq \max_{m\in[M_{2n-1},M_{2n})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2n-1}}^{m} a_k^{(n)} W_k(x)\right| dx+$$

$$+\max_{m\in[M_{2n},M_{2n+1})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2n}}^{m} a_k^{(n)} W_k(x)\right| dx \leq 2^{-2n}$$

Значит, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$ сходится к $U(x)$ *по* $L^1[0,1)$– норме и следовательно

$$a_k = c_k(U) = \int_0^1 U(x) W_k(x) dx,\ k=0,1,2... \tag{3.19}$$

В силу (3.6), (3.16) и (3.19) будем иметь $c_k(U) \searrow$. Из (2.3), (3.3), (3.9) и (3.10) следует

$$\max_{m\in[M_{2n-1},M_{2n})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2n-1}}^{m} c_k(U) W_k(x)\right|^p dx+\max_{m\in[M_{2n},M_{2n+1})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2n}}^{m} c_k(U) W_k(x)\right|^p dx$$

$$\leq \frac{A}{1-p}\ 2^{-2(n+4)}\ . \tag{3.20}$$

Положим

$$\delta_k=1,\ k\in[0,2^{m_0}\ )\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}[M_{2n-1},M_{2n});\ \delta_k=\delta_k^{(n)},\quad k\in[M_{2n},M_{2n+1}), \tag{3.21}$$

$$\varepsilon_k=\ \delta_k^{(n)},\ k\in[M_{2n-1},M_{2n});\quad \varepsilon_k=1,\quad k\in[0,2^{m_0}\ )\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}[M_{2n},M_{2n+1})\ . \tag{3.22}$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k c_k(U)\ W_k(x)=H_0(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\Big(H_j^{(1)}(x)+Q_j^{(2)}(x)\Big), \tag{3.23}$$

универсален как в $M[0,1)$ относительно системы *Уолша* **в обычном смысле,** *а ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k c_k(U)W_k(x)=H_0(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\Big(Q_j^{(1)}(x)+H_j^{(2)}(x)\Big). \tag{3.24}$$

универсален в $L^p[0,1)$ **относительно перестановок.**

Пусть $g(x)\in M[0,1)$. Применяя лемму 1 мы можем из последовательности $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$(см. (3.2)) выбрать подпоследовательность $\{f_{l_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы почти всюду на $[0,1]$

$$\lim_{k\to\infty}f_{l_k}(x)=(g(x)-H_0(x)). \tag{3.25}$$

В силу (3.7) имеем

$$\int_0^1\left|f_{l_k}(x)-\sum_{j=1}^{l_k}\Big(H_j^{(1)}(x)+Q_j^{(2)}(x)\Big)\right|^p dx<2^{-8(l_k+2)}.$$

Отсюда следует, что для некоторой подпоследовательности $\{l_{k_q}\}_{q=1}^{\infty}$ выбранной из последовательности $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ почти всюду на $[0,1]$ имеет место

$$\lim_{q\to\infty}\{f_{l_{k_q}}(x)-\sum_{j=1}^{l_{k_q}}\Big(H_j^{(1)}(x)+Q_j^{(2)}(x)\Big)\}=0. \tag{3.26}$$

Положим $N_q=M_{2l_{k_q}+1}-1$. Учитывая соотношения (3.3), (3.4), (3.16), (3.19), (3.21), (3.23), (3.25) и (3.26), почти всюду на $[0,1]$ имеет место

$$\lim_{q\to\infty}\sum_{s=0}^{N_q}\delta_s c_s(U)\ W_s(x)=\ g(x).$$

Итак (см. (3.23)), первая часть теоремы 3 доказана. Теперь покажем, что ряд (3.24) универсален в $L^p[0,1)$ в смысле перестановок.

Пусть $f(x)\in L^p[0,1]$. Положим

$$f^*(x)=f(x)-H_0(x). \tag{3.27}$$

По индукции построим последовательности функции $\{f_{\nu_q}(x)\}_{q=1}^{\infty}$ чисел $\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$, $\{s(q)\}_{q=1}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_{\nu_q}^{(1)}(x)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{R_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{\beta_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ удовлетворяющих следующим условиям:

(3.28)
$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) \right|^p dx \le 2^{-2q} + \int_0^1 |R_{q-1}(x)+\beta_{q-1}(x))|^p \, dx \ , \quad \nu_q > \nu_{q-1}+1, \, \nu_0 = 1,$$

(3.29)
$$R_q(x) = \left(\sum_{n=\nu_{q-1}}^{\nu_q - 1} H_n^{(2)}(x) \right), \ \beta_q(x) = \varepsilon_{s(q)} c_{s(q)}(U) W_{s(q)}(x), \ (R_0(x) = f^*(x), \ \beta_0(x) = 0) \, ,$$

(3.30)
$$s(q) = \min\{ \ k \in \mathbf{N}, \ k \in spec \left(\sum_{j=1}^{q} \sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j - 1} Q_n^{(1)}(x) \right) \diagdown \{s(n)\}_{n=1}^{q-1} \ \}, s(1) = \ M_1,$$

(3.31)
$$\int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^{q} \left[\beta_j(x) + R_j(x) + Q_{\nu_j}^{(1)}(x) + \right] \right\} \right|^p dx \le 2^{-2(q+2)} + \int_0^1 |R_q(x)+\beta_q(x))|^p \, dx.$$

На первом шаге возьмем функцию $f_{\nu_1}(x), (\nu_1 > \nu_0+1)$ из последовательности (3.2) таким образом, чтобы

$$\int_0^1 |\{ f^*(x) - f_{\nu_1}(x)|^p dx \le 2^{-10} \ .$$

Отсюда и из (3.11) имеем

$$\int_0^1 | \ f_{\nu_1}(x)|^p \, dx \le 2^{-2(1+4)} + \int_0^1 |f^*(x)|^p \, dx = 2^{-10} + \int_0^1 |R_0(x)+\beta_0(x)|^p \, dx$$

$$\int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ R_1(x)+\beta_1(x)+Q_{\nu 1}^{(1)}(x) \right\} \right|^p dx \le 2^{-10} + \int_0^1 |R_1(x)+\beta_1(x))|^p \, dx,$$

где

$$\beta_0(x) = 0, \quad R_0(x) = f^*(x),$$

$$R_1(x) = \left(\sum_{n=1}^{\nu_1 - 1} H_n^{(2)}(x) \right), \quad s(1) = \ M_1 = 2^{m_0}, \qquad \beta_1(x) = \varepsilon_{s(1)} c_{s(1)}(U) W_{s(1)}(x).$$

Находя функцию $f_{\nu_1}(x)$, числа $\nu_1, \ s(1)$ и полиномы $R_1(x)$, $\beta_1(x)$ и $Q_{\nu_1}^{(1)}(x)$ таким образом, чтобы при $q = 1$ выполнялись условия (3.28)–(3.31). Предположим, что уже определены функции $f_{\nu_1}(x), ..., f_{\nu_q}(x)$ числа $\nu_0 < \nu_1 < ... < \nu_q$; $s(1) < ...... < s(q)$ и полиномы $\{Q_{\nu_j}^{(1)}(x)\}_{j=1}^q$, $\{R_j(x)\}_{j=1}^q$, $\{\beta_j(x)\}_{j=1}^q$,уже построены. Покажем теперь, как следует строить функцию $f_{\nu_{q+1}}(x)$ чисела ν_{q+1}, $s(q+1)$, и полиномы $Q_{\nu_{q+1}}^{(1)}(x)$, $R_{q+1}(x)$, $\beta_{q+1}(x)$.

Сначала подберем натуральное число $\nu_{q+1} > \nu_q + q$ следоватеьно и функцию $f_{\nu_{q+1}}(x)$ из последовательности $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$(см. (3.2)) так, чтобы

$$\int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^{q} \left[R_j(x) + \beta_j(x) + Q_{\nu_j}^{(1)}(x) \right] \right\} - f_{\nu_{q+1}}(x) \right|^p dx \le 2^{-2(q+4)} . \tag{3.32}$$

Из (3.11) и (3.34) следует

$$\int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^{q} \left[R_j(x) + \beta_j(x) + Q_{\nu_j}^{(1)}(x) \right] \right\} - Q_{\nu_{q+1}}^{(1)}(x) \right|^p dx \le 2^{-2(q+3)}. \tag{3.33}$$

Покажем, что условия (3.28)–(3.31) выполнены с $q+1$ на месте q. Сначала заметим, что из (3.31), (3.32) вытекает

$$\int_0^1 \left| \ f_{\nu_{q+1}}(x) \right|^p dx \le 2^{-2(q+1)} + \int_0^1 |R_q(x) + \beta_q(x))|^p \, dx,$$

т.е. (3.28) выполнено для $q+1$. Положим

$$R_{q+1}(x) = \left(\sum_{n=\nu_q}^{\nu_{q+1}-1} H_n^{(2)}(x) \right), \ \beta_{q+1}(x) = \varepsilon_{s(q+1)} c_{s(q+1)}(U) W_{s(q+1)}(x), \tag{3.34}$$

$$s(q+1) = \min\{ \ k \in \mathbf{N}, \ k \in spec \left(\sum_{j=1}^{q+1} \sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j - 1} Q_n^{(1)}(x) \right) \diagdown \{s(n)\}_{n=1}^{q} \ \}. \tag{3.35}$$

С помощью (3.33) - (3.35) проверяем (3.31) для $q+1$:

$$\int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^{q+1} \left[R_j(x) + \beta_j(x) + Q_{\nu_j}^{(1)}(x) \right] \right\} \right|^p dx \le 2^{-2(q+3)} + \int_0^1 |R_{q+1}(x) + \beta_{q+1}(x)|^p \, dx.$$

Учитывая соотношения (3.10), (3.12) и (3.29) для всех $q > 1$ получим

$$\int_0^1 |R_q(x) + \beta_q(x))|^p \, dx \le 2^{-2(q+3)} + \sum_{n=\nu_q}^{\nu_{q+1}-1} \int_0^1 \left| H_n^{(2)}(x) \right|^p dx + \left| c_{s(q+1)}(U) \right|^p$$

$$\le 2^{-2(q+1)} + \left| c_{s(q)}(U) \right|^p . \tag{3.36}$$

В силу (3.12), (3.16), (3.19) и (3.22) имеем

$$\max_{m \in [M_{2\nu_q - 1}, M_{2\nu_q})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2\nu_q - 1}}^{m} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x) \right|^p dx = \tag{3.37}$$

$$= \max_{m \in [M_{2\nu_q - 1}, M_{2\nu_q})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2\nu_q - 1}}^{m} \delta_k^{(\nu_q)} a_k^{(\nu_q)} W_k(x) \right|^p dx \le$$

$$\leq 5\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x)\right|^p dx \leq 5.2^{-2(q-1)} + 5\left|c_{s(q-1)}(U)\right|^p.$$

Ясно, что последовательность чисел (см.(3.5) (3.30))

$$0,1,..,\ M_1-1; M_2,..,M_3; M_5,..,M_7,...; M_{2\nu_1-2},..,M_{2\nu_1-1}-1;$$

$$s(1); M_{2\nu_1-1},..,M_{2\nu_1}-1; M_{2\nu_1},..,M_{2\nu_1+1}-1; ....,;$$

$M_{2n},..,M_{2n+1}-1;...;M_{2\nu_{q-2}},..,M_{2\nu_q-1}-1;s(q);M_{2\nu_q-1}...M_{2\nu_q}-1;M_{2\nu_q}..M_{2\nu_q+1};...$

-есть некоторая перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{\sigma(k)}c_{\sigma(k)}(U)W_{\sigma(k)}(x)= H_0(x)+\sum_{q=1}^{\infty}\Big[R_q(x)+\beta_q(x)+Q_{\nu_q}^{(1)}(x)\Big] \tag{3.38}$$

-есть перестановленный ряд определяемый в силу (3.3), (3.4), (3.18), (3.22), (3.28), (3.31) и (3.30) ряда (3.24). Основываясь (3.20), (3.27), (3.36), (3.37) и (3.38) для любых $N\in[M_{2\nu_q-1},M_{2\nu_{q+1}+1})$ и $q>1$ будем иметь

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_{\sigma(k)}c_{\sigma(k)}(U)_{\sigma(k)}W_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx \leq$$

$$\leq\int_0^1\left|f^*(x)-\left\{\sum_{j=1}^{q}\Big[R_j(x)+\beta_j(x)+Q_{\nu_j}^{(1)}(x)\Big]\right\}\right|^p dx+$$

$$+\max_{m\in[M_{2\nu_q-1},M_{2\nu_q})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2\nu_q-1}}^{m}\ \varepsilon_k c_k(U)W_k(x)\right|^p dx+$$

$$+\sum_{n=\nu_q+1}^{\nu_{q+1}}\max_{m\in[M_{2n},M_{2n+1})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2n}}^{m}\ c_k(U)W_k(x)\right|^p dx+$$

$$+\left|c_{s(q+1)}(U)\right|\leq(2^{-2q}+\left|c_{s(q)}(U)\right|^p)+5(2^{-2(q-1)}+\left|c_{s(q-1)}(U)\right|^p)+$$

$$+\frac{A}{1-p}\ 2^{-2(q+1)}+\left|c_{s(q+1)}(U)\right|^p.$$

Откуда, принимая во внимание, что $c_{s(q)}(U)\to 0$ при $q\to\infty$ и что $q\to\infty$ когда $N\to\infty$ заключаем, что ряд (3.38) сходится к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1)$. Для завершения доказательства теоремы 1.3 осталось проверить,что *функция* $U(x)$ универсальна для $L^p[0,1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

Нетрудно убедиться, что по тем же соображениям, что и при получении последовательности функции $\left\{f_{\nu_q}(x)\right\}_{q=1}^{\infty}$ чисел $\{\nu_q\}_{q=0}^{\infty}$, $\{s(q)\}_{q=0}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_{\nu_q}^{(1)}(x)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{R_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{\beta_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ удовлетворяющих условиям (3.28)-(3.31), по индукции можно выбрать последовательности функции $\left\{f_{\lambda_q}(x)\right\}_{q=1}^{\infty}$,чисел

$\{\lambda_q\}_{j=0}^{\infty}$ и полиномы $\{Q_{\lambda_q}^{(1)}(x)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{A_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{B_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$(3.39)\quad A_q(x)=\sum_{n=\lambda_{q-1}+1}^{\lambda_q}\Big(H_n^{(1)}(x)+H_n^{(2)}(x)\Big),\ \ A_0(x)=f^*(x),\ \ H_0^{(1)}(x)=0=\lambda_0,$$

$$(3.40)\quad \int_0^1 \Big|\ f_{\lambda_q}(x)\Big|^p dx\le 2^{-p(q+2)}+\int_0^1\Big|A_{q-1}(x)-H_{\lambda_{q-1}}^{(1)}(x))\Big|^p dx\ \le 2^{-2q},\ q>1,$$

$$(3.41)\qquad \int_0^1\left|f^*(x)-\left\{\sum_{j=1}^{q}\Big[A_j(x)-H_{\lambda_j}^{(1)}(x)+Q_{\lambda_j}^{(1)}(x)\Big]\right\}\right|^p dx\le$$

$$\le 2^{-2(q+3)}+\int_0^1\Big|A_q(x)-H_{\lambda q}^{(1)}(x))\Big|^p dx\le 2^{-2(q+1)}.$$

Положим

$$(3.42)\qquad \eta_k=\ \delta_k^{(n)},\ k\in[M_{2\lambda_q-1},M_{2\lambda_q});\ \ \eta_k=1,\ \ k\notin\bigcup_{q=1}^{\infty}[M_{2\lambda_q-1},M_{2\lambda_q})\ .$$

В силу (3.12), (3.16), (3.19), (3.40) и (3.42) имеем

$$(3.43)\qquad \max_{m\in[M_{2\lambda_q-1},M_{2\lambda_q})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^{m}\eta_k c_k(U)W_k(x)\right|^p dx=$$

$$=\max_{m\in[M_{2\lambda_q-1},M_{2\lambda_q})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^{m}\ \delta_k^{(\lambda_q)}a_k^{(\lambda_q)}W_k(x)\right|^p dx\le 5\int_0^1\Big|\ f_{\lambda_q}(x)\Big|^p dx\le 5\,2^{-2q}$$

Из (3.39)- (3.43) для любых $N\in[M_{2\lambda_q-1},M_{2\lambda_{q+1}-1})$ и $q>1$ будем иметь

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{k=0}^{N}\eta_k c_k(U)W_k(x)\right|^p dx\ \le\int_0^1\left|f^*(x)-\left\{\sum_{j=1}^{q}\Big[Q_{\lambda_j}^{(1)}(x)+A_j(x)+B_j(x)\Big]\right\}\right|^p dx+$$

$$+\sum_{n=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}}\left(\max_{m\in[M_{2n-1},M_{2n})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2n-1}}^{m}\ c_k(U)W_k(x)\right|^p dx+\max_{l\in[M_{2n},M_{2n+1})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2n}}^{l}\ c_k(U)W_k(x)\right|^p dx\right)+$$

$$+\max_{m\in[M_{2\lambda_q-1},M_{2\lambda_q})}\int_0^1\left|\sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^{m}\ \delta_k^{(\lambda_q)}a_k^{(\lambda_q)}W_k(x)\right|^p dx\le 2^{-q+3}.$$

Отсюда и из того, что $q\to\infty$ когда $N\to\infty$ заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k c_k(U)W_k(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1)$.

Теорема 1.3 доказана.

М. Г. ГРИГОРЯН

Abstract. In this work it is constructed an integrable function $U(x)$ is universal for clas $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ with respect to the Walsh system in sence of signs , with strictly decreasing Fourier -Walsh coefficients $\{c_k(U)\}_{k=0}^{\infty} \searrow$, and converging everywhere on $(0,1)$ and in the norm of $L^1[0,1)$ Fourier -Walsh series , which has the following propertie: one can find a numbers $\varepsilon_k = \pm 1$ such that the series $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ is universal in $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ in sense of rearrangements.

Список литературы

[1] G. D.Birkhoff , "Démonstration d'un théoréme élémentaire sur les fonctions entiéres", C. R. Acad. Sci. Paris. **189**, 473 – 475 (1929).

[2] J.Marcinkiewicz , Sur les nombres derives, Fund. Math. 24, 305 – 308 (1935).

[3] V. G. Krotov, "Smoothness of the universal Marcinkiewicz functions and universal trigonometric series", Izv. universities. Mat., **8**, 26 – 31 (1991).

[4] I. Joy, "On the divergence of eigenfunction expansions", Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math., **32**, 2 – 36 (1989).

[5] G. R. MacLane, "Sequences of derivatives and normal families", J. Anal. Math. **2**, 72 – 87 (1952).

[6] K. G. Grosse-Erdmann, "Holomorphe Monster und Universelle Funktionen", Mitt. Math., Semin. Giessen. **176**, 1 – 84 (1987).

[7] W. Luh, "Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets", Analysis **6**, 191 – 207 (1986).

[8] W. Luh , "Entire functions with various universal properties", Complex variables Theory Appl., **31**, 87 – 96 (1996).

[9] D. E. Menshov, "On universal sequences of functions", Sb. Math. **65** (2), 272 – 312 (1964).

[10] A. A. Talalian, "On the universal series with respect to rearrangements", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 24, 567 – 604 (1960).

[11] V. I. Ivanov, "Representation of functions by series in metric symmetric spaces without linear functionals", Proc. Steklov Inst. Math. 189, 37 – 85 (1990).

[12] P. L. Ul'yanov, "Representation of functions by series and classes Зd5(L)", Uspekhi Mat. Nauk, **27**, no. 2, 3 – 52 (1972).

[13] V. G. Krotov, "Representation of measurable functions by series in the Faber–Schauder system, and universal series", Math. USSR, Izv. **11** (1), 205 – 218 (1977).

[14] M. G. Grigorian, "On orthogonal series universal in $L^p[0,1], p > 0$", J. Contemp. Math. Anal. **37** (2), 16 – 29 (2002).

[15] M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted spaces", Studia Math. **134** (3), 207 – 216 (1999).

[16] G. G. Gevorgyan , K. A. Navasardyan, "On Walsh series with monotone coefficients", Izv. Math. **63** (1), 37 – 55 (1999).

[17] M. G. Grigoryan, "On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series", Banach Journal of Math. Analysis, **11**, 3, 698 – 712 (2017).

[18] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, "On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$", Journal of Func. Anal. **270**, 8, 3111 – 3133 (2016).

[19] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, "On the universal functions", Journal of Approximation Theory, **225**, 191 – 208 (2018).

[20] M. G. Grigoryan and A. A. Sargsyan, "The structure of universal functions for $L^p[0,1]$-spaces, $p \in (0,1)$", Sbornik Mathematics **209**:1, 35 – 55 (2018).

[21] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, "On Fourier series that are universal modulo signs", Studia Mathematica, **249** (2), 215 – 231 (2019).

[22] М. Г. Григорян, "Функции, с универсальными рядами Фурье- Уолша", Матем. Сб. **211**:6, 107 – 131 (2020).

[23] A. H. Kolmogorov, "Sur les fonctions harmoniques conjugeeset les series de Fourier", FM, **7**, 23 – 28 (1925).

[24] R. E. A. C. Paley, “A remarkable set of orthogonal functions, I”, Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 241 – 264 (1932).
[25] J. L. Walsh, “A closed set of normal orthogonal functions”, Amer. J. Math. **4**, 1, 5 – 24 (1923).
[26] C. J. Watari, “Mean convergence of Fourier- Walsh series”, Tohoku Math. J., **16**, n.2, 183 – 188 (1964).

Поступила 25 ноября 2019

После доработки 15 июля 2020

Принята к публикации 16 сентября 2020