Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 6, 2020, стр. 37 – 50

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Г. Г. ГЕВОРГЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *ggg@ysu.am*

Аннотация. В работе доказывается, что если суммы Римана тригонометрического ряда ограничены всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества, и по мере сходятся к ограниченной функции f, то этот ряд является рядом Фурье функции f. Отсюда получаются обощения теорем Кантора и Юнга.

MSC2010 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: тригонометрическая система; теорема единственности; суммируемость по Риману.

1. Введение

Если дважды формально интегрировать тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=:\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x), \tag{1.1}$$

с коэффициентами стремящимися к нулю, то получится равномерно сходяшийся ряд с суммой

$$F(x):=Ax+B+\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^2}. \tag{1.2}$$

Обозначим

$$S(x,h):=\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}, \tag{1.3}$$

и

$$S^*(x):=\sup_{h>0}|S(x,h)|.$$

Выражения $S(x,h)$, $h>0$, называют суммами Римана ряда (1.1), а $S^*(x)$-мажорантой Римана этого ряда. Известно, что

$$S(x,h)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)\left(\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}\right)^2 \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОНИС РА в рамках научного проекта 18T–1A074

и если ряд (1.1) в точке x сходится (см. [1] стр. 187), то

$$\lim_{h\to 0} S(x,h) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x),$$

а вообще, если существует $\lim_{h\to 0} S(x,h) = S$, то говорят, что ряд (1.1) в точке x методом Римана суммируется к значению S.
В теории тригонометрических рядов хорошо известна (см. [2], а также [1] стр. 191)

Теорема Кантора. *Если ряд* (1.1) *всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю.*

На самом деле доказывается, что если ряд (1.1) методом Римана всюду суммируется к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. В дальнейших усилениях и обобщениях теоремы Кантора присутствовала сходимость или суммируемость всюду или всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества. Это оправдывается тем, что имеет место (см. [3], а также [1] стр. 804)

Теорема Меньшова. *Существует тригонометрический ряд, который почти всюду сходится к нулю, однако не все коэффициенты этого ряда равны нулю.*

Следовательно, для получения теорем о почти всюду сходящихся рядов, нужны дополнительные условия на ряд. В этом направлении первые результаты получены в работах [4]-[6]. В этих работах в качестве дополнительных условий выступают условия на функции распределения мажорант Абелья и Римана.

Здесь мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть для ряда* (1.1) *всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества B выполняется*

$$S^*(x) < \infty, \quad \textit{когда} \quad x \notin B, \tag{1.5}$$

и суммы $S(x,h)$ по мере сходятся к нулю, когда $h \to 0$. Тогда все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Теорема 1.2. *Пусть для ряда* (1.1) *всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества B выполняется* (1.5) *и суммы $S(x,h)$ по мере сходятся к некоторой ограниченной функции f, когда $h \to 0$. Тогда ряд* (1.1) *является рядом Фурье функции f.*

Учитывая регулярность метода суммирования Римана, из теорем 1.1, 1.2 получим следующие теоремы.

Теорема 1.3. *Пусть для ряда* (1.1) *всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества B выполняется*

$$\sup_N \left|\sum_{n=0}^N A_n(x)\right| < \infty, \quad \textit{когда} \quad x \notin B, \tag{1.6}$$

и $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N A_n(x) = 0$ *по мере. Тогда все коэффициенты этого ряда равны нулю.*

Теорема 1.4. *Пусть для ряда* (1.1) *всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества B выполняется* (1.6) *и*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N A_n(x) = f(x) \quad \textit{по мере},$$

где f-некорорая ограниченная функция. Тогда ряд (1.1) *является рядом Фурье функции f.*

2. Некоторые вспомогательные леммы

Пусть

$$\varphi(x) := (1-|x|)_+, \quad \text{где} \quad t_+ = \max(t,0), \quad \text{и} \quad \varphi_h(x) := \frac{1}{h}\varphi\left(\frac{x}{h}\right), \quad h>0. \tag{2.1}$$

Нетрудно проверить, что

$$S(x,h) = \sum_{n=0}^\infty (A_n * \varphi_h)(x) = \sum_{n=0}^\infty \int_{x-h}^{x+h} A_n(t)\varphi_h(x-t)dt. \tag{2.2}$$

Напомним, что разделенная разность второго порядка функции g по различным между собой узлам x_1, x_2, x_3 определяется формулой

$$[x_1,x_2,x_3]g := \frac{g(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{g(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{g(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_1)}.$$

Нетрудно проверить, что

$$2[x-h,x,x+h]F = S(x,h).$$

Простыми вычислениями получается следующая лемма (см. [5] лемма 1)

Лемма 2.1. *При любых $x_1<x_2<x_3$ имеет место*

$$2[x_1,x_2,x_3]F = \sum_{n=0}^\infty \int_{x_1}^{x_3} A_n(t)\varphi_{x_1x_2x_3}(t)dt,$$

где

$$\varphi_{x_1x_2x_3}(t) := \begin{cases} \frac{2}{x_3-x_1}, & \textit{когда} \quad t = x_2, \\ 0, & \textit{когда} \quad t \notin (x_1,x_3), \\ \textit{линейная на отрезках} & [x_1,x_2] \quad \textit{и} \quad [x_2,x_3]. \end{cases}$$

Нам пригодится следующая лемма, анонсированная в работе [7] и доказанная в работе [6]. Частный случай этой леммы был доказан в работе [5].

Пусть точки $x_j^{(1)} < x_j^{(2)} < x_j^{(3)}$, $j = 1, 2, ..., n$, принадлежат отрезку $[a, b]$ и

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad x = x_j^{(2)}, \\ 0, & \text{когда} \quad x \notin (x_j^{(1)}, x_j^{(3)}), \\ \text{выпуклая на отрезках} & [x_j^{(1)}, x_j^{(2)}] \quad \text{и} \quad [x_j^{(2)}, x_j^{(3)}]. \end{cases}$$

Верна следующая лемма

Лемма 2.2. *Для любой неотрицательной и вогнутой на отрезке $[a, b]$ функции $\phi(x)$ существуют неотрицательные числа α_k, $k = 1, 2, ..., n$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x_j^{(2)}) = \phi(x_j^{(2)}), \quad j = 1, 2, ..., n,$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \leq \phi(x), \quad x \in [a, b].$$

Лемма 2.3. *Для функций $F(x)$ и $S(x, h)$, определенные формулами* (1.2) *и* (1.3) *имеют место*

$$S(x, h) = o(h^{-1}), \quad \textit{равномерно по} \quad x, \tag{2.3}$$

$$|F(x + h) + F(x - h) - 2F(x)| = o(h), \quad \textit{равномерно по} \quad x. \tag{2.4}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что $|A_n(x)| \leq 1$, для всех x и n. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем n_1 такое, что $|A_n(x)| < \varepsilon$, $n \geq n_1$. Тогда (см. (1.4)) для $h < \frac{\varepsilon}{n_1}$ получим

$$|S(x, h)| \leq \sum_{n=0}^{n_1 - 1} 1 + \sum_{n=n_1}^{[\frac{2}{h}]} \varepsilon + \sum_{n=[\frac{2}{h}]+1}^{\infty} \varepsilon \frac{4}{n^2 h^2} \leq n_1 + \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{4\varepsilon}{h} < \frac{7\varepsilon}{h}.$$

Соотношение (2.3) доказано. Соотношение (2.4) следует из (2.3) и (1.3).

Для простоты формулировки леммы 2.4–2.8 сформулированы для отрезка $[0, 1]$. Однако очевидно, что они верны для любого отрезка $[a, b]$.

Лемма 2.4. *Если*

$$S\left(\frac{i}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right) = 0, \quad \textit{для любых} \quad k = 1, 2, ..., \quad 1 \leq i \leq 2^k - 1, \tag{2.5}$$

то $F(x)$-линейная функция на $[0, 1]$.

Доказательство. Обозначим $x_{k,i} = \frac{i}{2^k}$. Тогда условие (2.5) равносильно

$$F(x_{k,i-1}) + F(x_{k,i+1}) - 2F(x_{k,i}) = 0, \quad k = 1, 2, ..., \quad 1 \le i \le 2^k - 1.$$

Следовательно точки $(x_{k,i-1}, F(x_{k,i-1}))$, $(x_{k,i}, F(x_{k,i}))$ и $(x_{k,i+1}, F(x_{k,i+1}))$, $k = 1, 2, ...$, $1 \le i \le 2^k - 1$, находятся на одной прямой. Отсюда, учитывая непрерывность функции F получим утверждение леммы.

Из леммы 2.4 получается следующая лемма.

Лемма 2.5. *Если* $S(x, h) = 0$, *когда* $[x - h, x + h] \subset [0, 1]$, *то* $F(x)$*-линейная функция на* $[0, 1]$.

Лемма 2.6. *Допустим*

$$\lim_{h \to 0} S(x, h) = 0 \quad \text{по мере на} \quad [0, 1], \tag{2.6}$$

и

$$S^*(x) \le M, \quad \text{для некоторого} \quad M \quad \text{и всех} \quad x \in [0, 1]. \tag{2.7}$$

Тогда $F(x)$*-линейная функция на* $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть ε-произвольное положительное число. Тогда существует такое натуральное число k, что

$$|F(x + h) - F(x)| < \varepsilon \quad \text{когда} \quad |h| \le 2^{-k} \quad \text{и} \quad x \in [0, 1], \tag{2.8}$$

и

$$\mathrm{mes}(A) < \varepsilon, \quad \text{где} \quad A := \{x \in [0, 1] : |S(x, 2^{-k})| > \varepsilon\}.$$

Обозначим

$$\psi(t) := \sum_{m=0}^{2^k - 1} \chi_A(t + m2^{-k}), \quad t \in [0, 2^{-k}), \tag{2.9}$$

где $\chi_A(t)$-характеристическая функция множества A. Ясно, что

$$\int_0^{2^{-k}} \psi(t) dt = \mathrm{mes}(A). \tag{2.10}$$

Следовательно существует такое $t_0 \in [0, 2^{-k})$, что $\psi(t_0) \le 2^k \varepsilon$. Поэтому, из (2.9), (2.10) следует существование такого $t_0 \in [0, 2^{-k})$, что

$$\mathrm{card}\{m : |S(x_m, 2^{-k})| > \varepsilon\} \le 2^k \varepsilon, \quad \text{где} \quad x_m = t_0 + m2^{-k}, \tag{2.11}$$

а $\mathrm{card}(G)$-количество точек множества G.

Обозначим

$$\phi_0(x) := \begin{cases} 2, & \text{когда} \quad x = \frac{1}{2} + t_0, \\ 0, & \text{когда} \quad x \notin (t_0, 1 + t_0), \\ \text{линейная на отрезках} & [t_0, \frac{1}{2} + t_0] \quad \text{и} \quad [\frac{1}{2} + t_0, 1 + t_0]. \end{cases}$$

А для $m = 0, ..., 2^k - 1$ положим

$$\phi_m(x) := \begin{cases} 2^k, & \text{когда } x = x_m, \\ 0, & \text{когда } x \notin (x_m - 2^{-k}, x_m + 2^{-k}), \\ \text{линейная на отрезках } [x_m - 2^{-k}, x_m] \text{ и } [x_m, x_m + 2^{-k}]. \end{cases}$$

Из этих обозначений и формул (2.1), (2.2) следуют

$$S\left(\frac{1}{2} + t_0, \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{1+t_0} A_n(x)\phi_0(x)dx \tag{2.12}$$

и

$$S(x_m, 2^{-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{1+t_0} A_n(x)\phi_m(x)dx, \quad m = 0, 1, ..., 2^k - 1. \tag{2.13}$$

Нетрудно заметить, что

$$\phi_0(x) = \sum_{m=1}^{2^k-1} \alpha_m \phi_m(x), \quad \text{где} \quad \alpha_m = \frac{\phi_0(x_m)}{\phi_m(x_m)}, \quad m = 1, 2, ..., 2^k - 1. \tag{2.14}$$

Из (2.12)–(2.14) получим

$$S\left(\frac{1}{2} + t_0, \frac{1}{2}\right) = \sum_{m=1}^{2^k-1} \alpha_m S(x_m, 2^{-k}). \tag{2.15}$$

Очевидно, что интегралы функций ϕ_m, $m = 0, 1, 2, ..., 2^k - 1$, равны единице и поэтому из (2.14) имеем

$$\sum_{m=1}^{2^k-1} \alpha_m = 1 \quad \text{и} \quad 0 \le \alpha_m \le 2^{1-k}, \ m = 1, ..., 2^k - 1. \tag{2.16}$$

Обозначим $\Lambda_1 := \{m : |S(x_m, 2^{-k})| \le \varepsilon\}$ и $\Lambda_2 := \{m : |S(x_m, 2^{-k})| > \varepsilon\}$. Отсюда, с последовательным применением (2.15), (2.16) (2.7) и (2.11) получим

$$\left|S\left(\frac{1}{2} + t_0, \frac{1}{2}\right)\right| \le \sum_{m \in \Lambda_1} \alpha_m |S(x_m, 2^{-k})| + \sum_{m \in \Lambda_2} \alpha_m |S(x_m, 2^{-k})|$$

$$\le \varepsilon + M \sum_{m \in \Lambda_2} 2^{1-k} < \varepsilon + 2M\varepsilon = \varepsilon(2M + 1).$$

Отсюда, с учетом (2.8), имеем

$$\left|S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon(2M + 17).$$

Поэтому, с учетом произвольности ε, получим $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. Повторяя вышеприведенные рассуждения для отрезка $[x - h, x + h] \subset [0, 1]$, получим $S(x, h) = 0$, когда $[x-h, x+h] \subset [0, 1]$. Отсюдя, в силу леммы 2.5, получим, что $F(x)$-линейная функция на $[0, 1]$. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Если*

$$S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\neq 0$$

$t_0\in[0,1]$, *то найдутся* x_0 *и* $h_0>0$, *такие что*

$$S(x_0,h_0)\neq 0 \quad \textit{и} \quad t_0\notin[x_0-h_0,x_0+h_0]\subset[0,1]. \tag{2.17}$$

Доказательство. Как мы заметили при доказательстве леммы 2.6, для любого k имеет место (см. (2.15), (2.16))

$$S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\sum_{m=1}^{2^k-1}\alpha_m^{(k)}S(x_m^{(k)},2^{-k}),\quad \text{где}\quad x_m^{(k)}=\frac{m}{2^k},\quad \text{и}\quad 0\leq\alpha_m^{(k)}\leq 2^{1-k}. \tag{2.18}$$

Допустим $S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=d\neq 0$. Тогда, если бы не было таких $x\in[0,1]$ и $h>0$, которые удовлетворяли бы (2.17), то среди отрезков $[x_m^{(k)}-2^{-k},x_m^{(k)}+2^{-k}]$, $m=1,2,...,2^k-1$, нашлись бы не более три отрезка, которые содержали бы точку t_0, для которых выполнялось бы $S(x_m^{(k)},2^{-k})\neq 0$. Тогда из (2.18) следовало бы, что для некоторого m_k выполняется $\alpha_{m_k}^{(k)}|S(x_{m_k}^{(k)},2^{-k})|\geq|d|/3$, $k=1,2,\dots$. Отсюда получилось бы $|S(x_{m_k}^{(k)},2^{-k})|\geq 2^k|d|/6$. Но это противоречит (2.3). Лемма доказана.

Нетрудно заметить, что из непрерывности функции F следует, что при любом $M>0$ множество

$$E_M:=\{x\in(0,1):S^*(x)>M\}$$

является открытым множеством и как любое открытое множество является объединением своего составляющих интервалов, т.е. существуют открытые интервалы $I_k^{(M)}$, такие что

$$E_M=\bigcup_k I_k^{(M)},\quad \text{и}\quad I_k^{(M)}\bigcap I_m^{(M)}=\emptyset,\ \text{если}\quad k\neq m.$$

Лемма 2.8. *Допустим* $S(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\neq 0$ *и выполняется* (2.6). *Тогда существует* $[x_0-h_0,x_0+h_0]\subset E_M$, *такое что* $S(x_0,h_0)\neq 0$.

Доказательство. Допустим обратное:

$$S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=d\neq 0, \tag{2.19}$$

выполняется (2.6), но $S(x,h)=0$ для любого $[x-h,x+h]\subset E_M$. Тогда, в силу леммы 2.5, функция $F(x)$ является линейной функцией на каждом интервале $I_k^{(M)}$.

Пусть $\varepsilon\in(0,0.25)$ такое, что

$$\frac{4M\varepsilon}{1-2\varepsilon/3}<\frac{|d|}{3} \tag{2.20}$$

и

$$(2.21)\quad \left|S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-2F[z_1,z_2,z_3]\right|<\frac{|d|}{3},\ \text{ когда }\ |z_1|<\varepsilon,\ |z_2-\frac{1}{2}|<\varepsilon,\ |z_3-1|<\varepsilon.$$

Найдется натуральное число k_0, такое что

$$(2.22)\qquad \operatorname{mes}(D)<\frac{\varepsilon}{6},\quad \text{где}\quad D:=\bigcup_{k>k_0} I_k^{(M)}.$$

Из сходимости по мере к нулю сумм $S(x,h)$ следует существование такого натурального числа N, что для $h_0:=\frac{1}{2N}$ выполняются

$$(2.23)\qquad \operatorname{mes}\{x\in[0,1]:|S(x,h_0)|<\varepsilon\}>1-\frac{\varepsilon}{6}$$

и (см. (2.3))

$$(2.24)\qquad |S(x,h)|\le\frac{\varepsilon}{k_0h},\quad \text{когда}\quad |h|\le h_0\quad \text{и}\quad x-\text{любое}.$$

Обозначим

$$(2.25)\qquad B:=D\bigcup G,\quad \text{где}\quad G:=\{x\in[0,1]:|S(x,h_0)|>\varepsilon\}.$$

Из (2.23) и (2.22) следует, что

$$(2.26)\qquad \operatorname{mes}(B)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим

$$\varphi(t):=\sum_{i=1}^{2N}\chi_B((i-1)h_0+t),\quad t\in[0,h_0).$$

Очевидно, что $\int_0^{h_0}\varphi(t)dt=\operatorname{mes}(B)$. Поэтому существует такое $t_0\in[0,h_0)$, что $\varphi(t_0)\le 2N\operatorname{mes}(B)$, т.е.

$$(2.27)\qquad \operatorname{card}\{i:(i-1)h_0+t_0\in B\}\le 2N\operatorname{mes}(B).$$

Обозначим $x_i:=(i-1)h_0+t_0$, $i=1,2,...,2N$, и положим

$$(2.28)\quad \Lambda_1:=\{i:x_i\notin B\},\quad \Lambda_2:=\{i:x_i\in B\}\quad \text{и}\quad H:=\bigcup_{i\in\Lambda_2}[x_i-h_0/2,x_i+h_0/2].$$

Из (2.27), (2.28) и (2.26) следует, что

$$(2.29)\qquad N_2:=\operatorname{card}\{\Lambda_2\}\le\frac{\varepsilon}{3h_0},\quad \operatorname{mes}(H)\le N_2h_0\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

Для $i\in(N_2,2N-N_2)\bigcap\Lambda_1$ обозначим

$$(2.30)\qquad m_i:=\min\{j\ge1:i\pm j\in\Lambda_1\}.$$

Убедимся, что такое m_i существует. Действительно, если $i-j\notin\Lambda_1$ или $i+j\notin\Lambda_1$ для $j\le k$, то из чисел $i-k$, $i-k+1$, ... $i+k$ хотья бы k штук принадлежат Λ_2. Тогда из (2.29) следует, что $k\le N_2$, т.е. $m_i\le N_2$.

Положим

$$\Lambda_3 := \{i \in (N_2, 2N - N_2) \cap \Lambda_1 : m_i > 1\}, \quad B_3 := \bigcup_{i\in\Lambda_3} [x_{i-m_i}, x_{i+m_i}] \tag{2.31}$$

и

$$[z_1, z_3] := [x_{N_2}, x_{2N-N_2}] \bigcup B_3.$$

Из (2.29) имеем

$$|z_1| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ и } \ |1 - z_3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из определения чисел m_i и множеств B_3 и H следует, что

$$B_3 \subset \left\{x : M(\chi_H, x) \geq \frac{1}{3}\right\},$$

где $M(\chi_H, x)$-максимальная функция Харди-Литтлвуда характеристической функции множества H. Следовательно

$$\mathrm{mes}(B_3) < \varepsilon \tag{2.32}$$

и поэтому существует $x_i =: z_2$, со свойствами

$$|z_2 - \frac{1}{2}| < \varepsilon \qquad z_2 \notin B_3.$$

Обозначим

$$\varphi_0(x) := \begin{cases} \frac{2}{z_3 - z_1}, & \text{когда } \ x = z_2, \\ 0, & \text{когда } \ x \notin (z_1, z_3), \\ \text{линейная на отрезках } \ [z_1, z_2] \ \text{ и } \ [z_2, z_3]. \end{cases} \tag{2.33}$$

А для $i \in \Lambda_4 := \{i \in \Lambda_1 : x_i \in (z_1, z_3)\}$ положим

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} \frac{2}{x_{i+m_i} - x_{i-m_i}}, & \text{когда } \ x = x_i, \\ 0, & \text{когда } \ x \notin (x_{i-m_i}, x_{i+m_i}), \\ \text{линейная на отрезках } \ [x_{i-m_i}, x_i] \ \text{ и } \ [x_i, x_{i+m_i}]. \end{cases}$$

Ясно, что функции φ_0 и φ_i, удовлетворяют условиям леммы 2.2. Применяя эту лемму, получим сумму

$$\sum_{i\in\Lambda_4} \alpha_i \varphi_i(x_)), \quad \text{с} \quad \alpha_i \geq 0,$$

со свойствами

$$\varphi_0(x_i) = \sum_{i\in\Lambda_4} \alpha_i \varphi_i(x_i), \quad \text{когда} \ \ i \in \Lambda_4 \tag{2.34}$$

и

$$\sum_{i\in\Lambda_4} \alpha_i \varphi_i(x) \leq \varphi_0(x), \quad \text{когда} \ \ x \in [z_1, z_3].$$

Пусть $i, j \in \Lambda_4$ и $i < j$ такие, что если $m \in (i, j)$, то $m \notin \Lambda_4$. Тогда все функции $\varphi_i(x)$, $i \in \Lambda_4$, в силу определения чисел m_i (см. (2.30)), являются линейными функциями на $[x_i, x_j]$. На том же отрезке функция $\varphi_0(x)$ также линейна. Поэтому, из (2.34) имеем

$$\sum_{i\in\Lambda_4} \alpha_i\varphi_i(x) = \varphi_0(x), \quad \text{когда} \quad x \in [z_1, z_3]. \tag{2.35}$$

Учитывая, что интегралы всех функций $\varphi_i(x)$, $i \in \Lambda_4$, и $\varphi_0(x)$ равны единице, из (2.35) получим

$$\sum_{i\in\Lambda_4} \alpha_i = 1. \tag{2.36}$$

Обозначим $\Lambda_5 := \{i \in \Lambda_4 : m_i > 1\}$, $\Lambda_6 := \{i \in \Lambda_4 : m_i = 1\}$. Тогда

$$2[z_1, z_2, z_3]F = \sum_{i\in\Lambda_5} \alpha_i S(x_i, m_i h_0) + \sum_{i\in\Lambda_6} \alpha_i S(x_i, h_0) =: \sigma_5 + \sigma_6. \tag{2.37}$$

Учитывая, что интегралы всех функций φ равны единице, из (2.35), с применением (2.32), (2.33) и (2.31), получим

$$\sum_{i\in\Lambda_5} \alpha_i = \int_{z_1}^{z_3} \sum_{i\in\Lambda_5} \alpha_i\varphi_i(x)dx \le \int_{B_3} \varphi_0(x)dx \le \|\varphi_0\|_\infty \mathrm{mes}(B_3) \le \frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon/3}. \tag{2.38}$$

Из (2.28), (2.25), (2.22) следует, что $|S(x_i, m_i h_0)| < M$, когда $i \in \Lambda_5$. Поэтому из (2.38) получим

$$|\sigma_5| \le \frac{2M\varepsilon}{1-2\varepsilon/3}. \tag{2.39}$$

Для $i \in \Lambda_6$ возможны три случая:

- $(x_{i-1}, x_{i+1}) \subset \bigcup_{k\le k_0} I_k^{(M)}$,
- $(x_{i-1}, x_{i+1}) \bigcap E_M = \emptyset$ и $x_i \notin B$,
- для некоторого $k \le k_0$ имеют место $(x_{i-1}, x_{i+1}) \bigcap I_k^{(M)} \ne \emptyset$ и $(x_{i-1}, x_{i+1}) \not\subset I_k^{(M)}$.

По нашему предположению, в первом случае имеем $S(x_i, h_0) = 0$.

Во втором случае (см. (2.25) и (2.28)) выполняется $|S(x_i, h_0)| < \varepsilon$. Поэтому, с учетом (2.36) получим

$$\sum_{\Lambda_7} \alpha_i |S(x_i, h_0)| \le \varepsilon, \tag{2.40}$$

где Λ_7-множество индексов, удовлетворяющих второму случаю.

Множество индексов i, удовлетворяющих третьему случаю обозначим через Λ_8. Второму случаю могут удовлетворять не более $2k_0$ штук x_i и для них, в силу леммы 2.3, имеем $|S(x_i,h_0)| \le \varepsilon h_0^{-1}k_0^{-1}$. Следовательно

(2.41)
$$|\sigma_6| \le \varepsilon + \left|\sum_{i\in\Lambda_8}\alpha_i S(x_i,h_0)\right| \le \varepsilon + \varepsilon h_0^{-1}k_0^{-1}\sum_{i\in\Lambda_8}\alpha_i = \varepsilon + \varepsilon h_0^{-1}k_0^{-1}\int\sum_{i\in\Lambda_8}\alpha_i\varphi_i(x)dx$$
$$\le \varepsilon + \varepsilon h_0^{-1}k_0^{-1}4k_0h_0\|\varphi_0\|_\infty < \frac{9\varepsilon}{1-2\varepsilon/3}.$$

Из (2.41), (2.39) (2.40) и (2.37), имеем (можем предположить, что $M>5$)
$$|2[z_1,z_2,z_3]F| \le \frac{4M\varepsilon}{1-2\varepsilon/3}.$$

Отсюда, с применением (2.21), получим (см. также (2.20), (2.19))
$$\left|S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{|d|}{3}.$$

Но это противоречит (2.19). Полученное противоречие доказывает лемму.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. Пусть суммы Римана $S(x,h)$ тригонометрического ряда (1.1) по мере сходятся к нулю и мажоранта Римана $S^*(x)$ этого ряда для некоторого счетного множества $B := \{y_p\}_{p=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$S^*(x) < \infty, \quad \text{когда} \quad x \notin B. \tag{3.1}$$

Докажем, что в этом случае функция F–линейная. Допустим обратное. Тогда существуют x_0 и $h_0>0$, такие что $S(x_0,h_0) \ne 0$. Применяя лемму 2.7, найдем x_0' и h_0' такие, что
$$y_1 \notin [x_0'-h_0', x_0'+h_0'] \subset [x_0-h_0, x_0+h_0]$$

и

$$S(x_0',h_0') \ne 0. \tag{3.2}$$

Обозначим
$$E_1 := \{x \in (x_0'-h_0', x_0'+h_0') : S^*(x) > 1\}.$$

Если бы множество E_1 было бы пусто, то в силу леммы 2.6 функция F была бы линейной на $[x_0'-h_0', x_0'+h_0']$, что противоречит (3.2). Следовательно $E_1 \ne \emptyset$. Тогда в силу леммы 2.8 существует $[x_1-h_1, x_1+h_1] \subset E_1$ такое, что $S(x_1,h_1) \ne 0$. Итак, мы нашли $[x_1-h_1, x_1+h_1]$, со свойствами
$$y_1 \notin [x_1-h_1, x_1+h_1] \subset [x_0-h_0, x_0+h_0]$$

и

$$S^*(x) > 1, \quad \text{когда} \quad x \in [x_1-h_1, x_1+h_1].$$

Допустим для $i \le p$ мы нашли числа x_i, $h_i > 0$ такие, что

$$y_i \notin [x_i - h_i, x_i + h_i] \subset [x_{i-1} - h_{i-1}, x_{i-1} + h_{i-1}], \quad i \le p,$$

$$S(x_i, h_i) \ne 0, \quad i \le p, \tag{3.3}$$

$$S^*(x) > i \ \text{ когда } \ x \in [x_i - h_i, x_i + h_i], \quad i \le p.$$

Применяя лемму 2.7, найдем отрезок $[x'_p - h'_p, x'_p + h'_p]$ со свойствами

$$y_{p+1} \notin [x'_p - h'_p, x'_p + h'_p] \subset [x_p - h_p, x_p + h_p].$$

Обозначим

$$E_{p+1} := \{x \in (x'_p - h'_p, x'_p + h'_p) : S^*(x) > p + 1 \quad \text{и} \quad S(x'_p, h'_p) \ne 0\}.$$

Если бы множество E_{p+1} было бы пусто, то в силу леммы 2.6 функция F была бы линейной на $[x'_p - h'_p, x'_p + h'_p]$, что противоречит $S(x'_p, h'_p) \ne 0$. Следовательно $E_{p+1} \ne \emptyset$. Тогда, в силу леммы 2.8 существует $[x_{p+1} - h_{p+1}, x_{p+1} + h_{p+1}] \subset E_{p+1}$ такое, что $S(x_{p+1}, h_{p+1}) \ne 0$. Итак, мы нашли $[x_{p+1} - h_{p+1}, x_{p+1} + h_{p+1}]$, со свойствами

$$y_{p+1} \notin [x_{p+1} - h_{p+1}, x_{p+1} + h_{p+1}] \subset [x_p - h_p, x_p + h_p] \tag{3.4}$$

и

$$S^*(x) > p + 1, \quad \text{когда} \ \ x \in [x_{p+1} - h_{p+1}, x_{p+1} + h_{p+1}]. \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) следует, что существует точка z, которая не принадлежит B и $S^*(z) = \infty$. Полученное противоречит (3.1). Следовательно функция F – линейная и из (1.2) имеем

$$A_1 + B_1 x + \frac{a_0 x^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x)}{n^2}. \tag{3.6}$$

Из ограниченности правой части (3.6) на R следует, что $B_1 = a_0 = 0$. Отсюда, учитывая равномерную сходимость правой части (3.6) , получим $A_1 = a_n = b_n = 0$ для всех n. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть ряд

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) \tag{3.7}$$

является рядом Фурье функции f, $S_f(x, h)$–суммы Римана ряда (3.7) и ряд (1.1) удовлетворяет условиям теоремы.

Легко видеть, что

$$S_f(x, h) = \int_{x-h}^{x+h} f(t) \varphi_h(x - t) dt. \tag{3.8}$$

Из (3.8) легко получается, что $\lim_{h\to 0} S_f(x,h) = f(x)$, во всех точках Лебега функции f. Из (3.8) также следует, что $|S_f(x,h)| \le \|f\|_\infty$. Следовательно, для разности рядов (1.1) и (3.7) имеют место

$$\sup_{h>0} |S(x,h) - S_f(x,h)| < \infty, \quad \text{когда} \quad x \notin B,$$

$$\lim_{h\to 0} (S(x,h) - S_f(x,h)) = 0 \quad \text{по мере.}$$

В силу теоремы 1.1 разность рядов (1.1) и (3.7) нулевой ряд, т.е. $a_n = c_n$, $b_n = d_n$, для любого n. Теорема доказана.

4. Некоторые комментарии

Известно, что из условия $S^*(x) < \infty$ почти всюду следует существование предела $\lim_{h\to 0} S(x,h)$ почти всюду (см. [8], а также [9] стр. 120). Это означает, что в теоремах 1.1 и 1.2 из условия (1.5) следует почти всюду суммируемость методом Римана ряда (1.1), и тем более сходимость по мере сумм $S(x,h)$, когда $h \to 0$.

Из теоремы 1.1 следует также (см. [1] стр. 792)

Теорема Юнга. *Если ряд* (1.1) *всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества, сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю.*

А из теоремы 1.2 получается (см. [1] стр. 200)

Теорема дю Буа-Реймона–Лебега. *Если ряд* (1.1) *всюду сходится к ограниченной функции, то является рядом Фурье этой функции.*

Отметим еще одну важную теорему из теории тригонометрических рядов (см. [12], а также [1] стр. 789)

Теорема Валле–Пуссена. *Пусть пределы неопределенности ряда* (1.1), *т.е. функции*

$$\underline{G}(x) := \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} A_n(x) \quad \text{и} \quad \overline{G}(x) := \limsup_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} A_n(x), \tag{4.1}$$

конечны всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества, и обе функции интегрируемы на $[0, 2\pi]$, *то ряд* (1.1) *суммируется методом Римана почти всюду и является рядом Фурье этой суммы.*

Из этой теоремы следует другая теорема

Теорема Валле–Пуссена. *Если* (1.1), *всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества сходится к всюду конечной интегрируемой функции, то является рядом Фурье этой функции.*

Очевидно, что условие интегрируемости функций (4.1) сильнее чем условие (1.5) или (1.6). Поэтому из теоремы Валле–Пуссена не следуют теоремы 1.1-1.4. С другой стороны из теорем 1.2 или 1.4 не следует теорема Валле–Пуссена.

В связи с этим интересно было бы выяснить: имеет ли место теорема 1.4, если в нем вместо ограниченности функции f потребовать ее интегрируемость.

Abstract. In paper is proved, that if Riemann's majorant of trigonometric series is bounded everywhere, except, maybe, of some countable set, and converge in measure to bounded function f, then the series is Fourier series of function f. From this are obtained Cantor's and Young's theorems generalization.

Список литературы

[1] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, М., Физматгиз (1961).
[2] G. Cantor, "Uber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrschen reihen", Mathematische Annalen, **5**, 123 – 132 (1872).
[3] D. E. Menshoff "Sur l'unicite du developpement trigonometrique", C. R,, **163**, 433 – 436 (1916).
[4] А. Б. Александров, "Об A-интегрируемости граничных значений гармонических функций", Мат. заметки, **30**, 59 – 72 (1981).
[5] Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Мат. сборник, **180**, 1462 – 1474 (1989).
[6] Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. сборник, **184**, 93 – 130 (1993).
[7] Г. Г. Геворкян, "О тригонометрических интегралах, суммируемых методом Римана", Мат. заметки, **45**, 114 – 117 (1989).
[8] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, "On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series", F. M. **26**, 1 – 43 (1936).
[9] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, т. 2, М., Мир (1965).
[10] A. Zygmund, "An example in Fourier series", Studia Math., **10**, 113 – 119 (1948).
[11] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, т. 1, М., Мир (1965).
[12] Ch. J. Vallee–Poussin "Sur l'unicite du developpment trigonometrique", Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, 702 – 718 (1912).

Поступила 19 апреля 2020

После доработки 1 сентября 2020

Принята к публикации 16 сентября 2020