ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. 2020. Т. LXXIII, N1.

УДК 621.317.39.531.767 ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

В.С. САФАРЯН, Г.В. АРУТЮНЯН

К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБОБЩЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СОСТАВНЫХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Проведено исследование обобщенных параметров составных многоклеммников. Рассматриваются соединения многоклеммников одинаковых и неодинаковых размерностей. Для таких цепей единственным ограничением является первый закон Кирхгофа. Обобщенные параметры составного многоклеммника – матрица узловых проводимостей, выражаются заданными элементами матрицы узловых проводимостей отдельных многоклеммников. Используя принцип дуальности, рассматривается соединение разветвленных электрических цепей путем объединения выделенных ячеек.

Ключевые слова: многоклеммник, составной четырехполюсник, условие регулярности, матрица узловых проводимостей, обобщенные параметры.

Введение. В трудах по теоретическим основам электротехники под четырехполюсником подразумевается четырехклеммовая цепь, в которой клеммы спарены в пары (вход, выход) и наложены дополнительные ограничения по первому закону Кирхгофа [1-7]. Для определенности в тексте будем придерживаться следующих обозначений: назовем электрическую цепь с выделенными n полюсами (клеммами) n- полюсником (n - клеммником) (рис. 1); n- полюсник со сгруппированными клеммами из m групп $n \times m$ -полюсником (рис. 2), при этом в каждой группе клемм алгебраическая сумма токов равна нулю [8]. В частном случае, когда $n = 4$ и $m = 2$, получается 4×2 – полюсник, или “четырехполюсник” (рис. 3) в классическом смысле [1-10] (двухпортовая цепь [11]).

При анализе электрических цепей методом четырехполюсника электрическая схема представляется в виде сложного четырехполюсника, состоящего из соединения отдельных четырехполюсников с известными параметрами. В подобных случаях параметры электрической схемы как сложного четырехполюсника определяются по известным матрицам отдельных четырехполюсников [1, 2, 4-7, 10]. Метод четырехполюсника применяется в случае “регулярных” соединений четырехполюсников, а именно - при сохранении попарного равенства токов на входе и выходе каждого из четырехполюсников при любом режиме работы электрической цепи [1-3, 9]. При таком соединении матрица коэффициентов, определяющая каждый четырехполюсник, не изменится при соединении этих четырехполюсников друг с другом. Очевидно, что регулярность соединения четырехполюсников соблюдается в редких случаях, следовательно, в общем случае правила нахождения матриц коэффициентов составных четырехполюсников являются неприемлемыми.

В некоторых источниках [4-7, 10] излагается метод расчета обобщенных параметров составных четырехполюсников путем суммирования соответствующих матриц коэффициентов четырехполюсников, входящих в соединение, без указания о том, что данный подход возможен только при соблюдении условия регулярности соединения четырехполюсников.

В [3, 9] приведены правила проверки условия регулярности для частных случаев: в режиме холостого хода - для последовательного и в режиме короткого замыкания - для параллельного соединения четырехполюсников.

Как известно, каскадное соединение четырехполюсников всегда регулярно [1-3].

Постановка задачи и обоснование методики. Целью данной работы является определение обобщенных параметров составных многоклеммников при известных обобщенных параметрах исходных многоклеммников. Клеммы многоклеммника (рис. 1) характеризуются узловым потенциалом и узловым током. Для таких цепей существует ограничение только по первому закону Кирхгофа.

В [8] описывается многоклеммник, клеммы которого разделены на группы (рис. 2), причем число клемм в группе больше единицы. Для такого многоклеммника добавляется еще одно ограничение – алгебраическая сумма токов в каждой группе равна нулю.

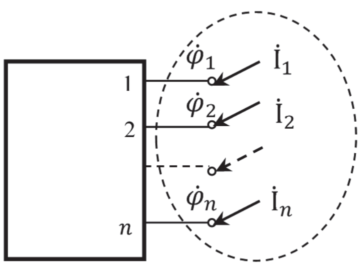


Рис.1. Многоклеммник

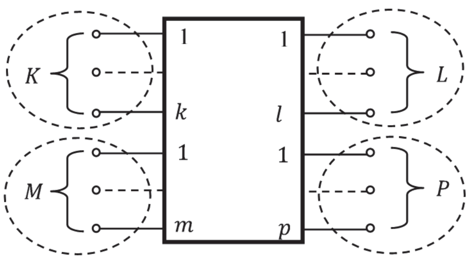


Рис.2. Многоклеммник со сгруппированными клеммами

Рассмотрим частный случай многоклеммника при количестве клемм, равном четырем. Если эти клеммы разделить на две группы по две клеммы в каждой (рис. 3), то полученная электрическая цепь будет цепью с двумя портами [11] или четырехполюсником в классическом смысле [1-7, 9, 10].

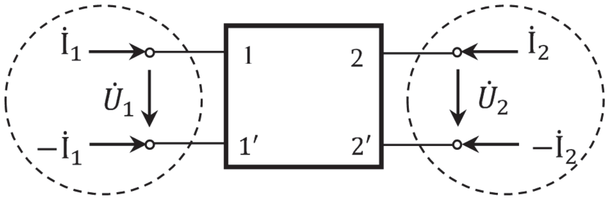


Рис.3. Четырехполюсник

Продемонстрируем нарушение регулярности на примере параллельного соединения двух двухпортовых цепей, приведенных в таблице. Матрицы коэффициентов Y_1, Y_2 исходных четырехполюсников, согласно системе уравнений типа Y [1-7]

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2' = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2, \end{cases}$$

будут равны

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Соединим двухпортовые цепи параллельно, объединяя зажимы a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2, d_1 и d_2(см. табл.). Сначала вычислим матрицу Y коэффициентов составного четырехполюсника. Следуя правилу сложения матриц Y_1 и Y_2 исходных четырехполюсников [4-7, 10], получим

$$Y = Y_1 + Y_2 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

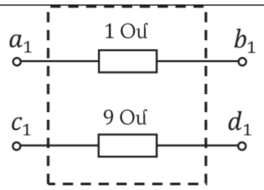
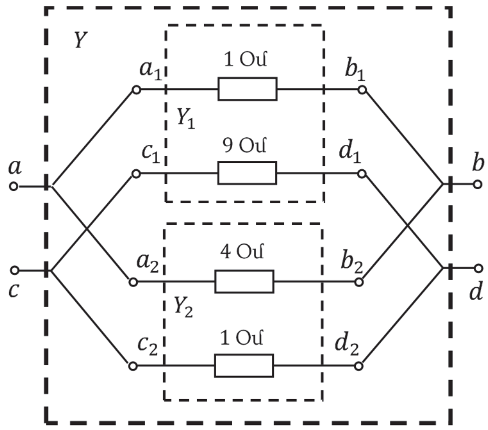
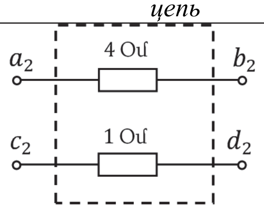
Исходя из схемы составной двухпортовой цепи, получим коэффициенты Y матрицы:

$$Y = \begin{bmatrix} 0{,}59 & -0{,}59 \\ -0{,}59 & 0{,}59 \end{bmatrix}.$$

Очевидна разница в полученных результатах. Эта неточность объясняется нарушением условия регулярности после соединения двухпортовых цепей.

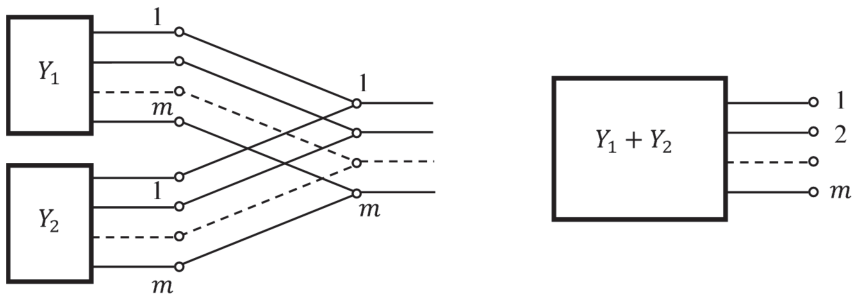
Таблица

Демонстрация нарушения регулярности на примере параллельного соединения четырехполюсников

Первая двухпортовая цепь	*Параллельное соединение двухпортовых цепей*
	
Вторая двухпортовая цепь	
	

В [8] приведено параллельное соединение двух m – клеммников (рис.4а) путем попарного соединения клемм. При известных матрицах узловых проводимостей Y_1, Y_2 первого и второго m – клеммников матрица Y результирующего многоклеммника (рис.4б) получится путем сложения матриц Y_1 и Y_2 [8]:

$$Y = Y_1 + Y_2. \tag{1}$$



а) б)

Рис.4. Параллельное соединение двух m – клеммников (а) и результирующий многоклеммник (б)

Используя принцип дуальности, рассмотрим соединение разветвленных электрических цепей путем объединения ячеек, т.е. контуров, не содержащих внутри себя ветвей. На рис. 5а представлены две электрические цепи с одинаковым количеством выделенных ячеек. Каждая ячейка характеризуется сопротивлением Z_{kk} и ЭДС $\dot{E}_{kk}$. Соединим электрические цепи путем объединения ячеек (рис. 5б).

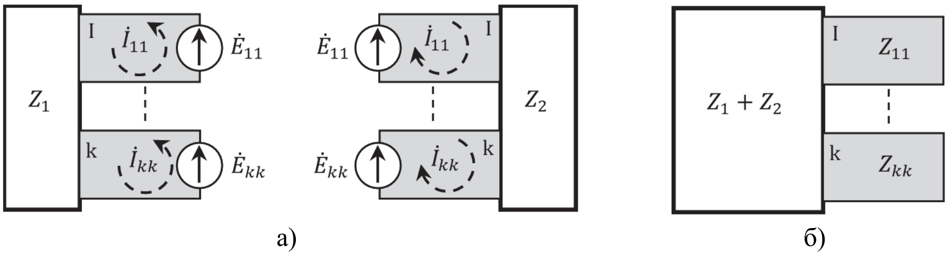


Рис. 5. Электрические цепи с выделенными ячейками (а) и результирующая схема (б)

При известных матрицах сопротивлений ячеек Z_1, Z_2 первой и второй разветвленных электрических цепей результирующая Z матрица получится путем сложения матриц Z_1 и Z_2: $Z = Z_1 + Z_2$.

Рассмотрим параллельное соединение двух многоклеммников неодинаковых размерностей. Пусть имеем два многоклеммника: $(m + k)$ – клеммник и $(n + k)$ – клеммник (рис. 6) с известными матрицами узловых проводимостей. Обозначим:

– $K' = \{m + 1, \dots, m + k\}$ - множество клемм $(m + k)$ - клеммника, которые предстоит объединить;

– $K'' = \{n + 1, \dots, n + k\}$ - множество клемм $(n + k)$ - клеммника, которые предстоит объединить;

– $M = \{1, 2, \dots, m\}$ - множество клемм $(m + k)$ - клеммника, не принимающих участия в соединении;

– $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множество клемм $(n + k)$ - клеммника, не принимающих участия в соединении.

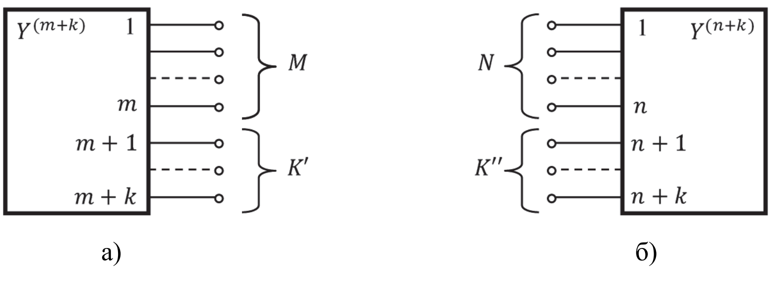


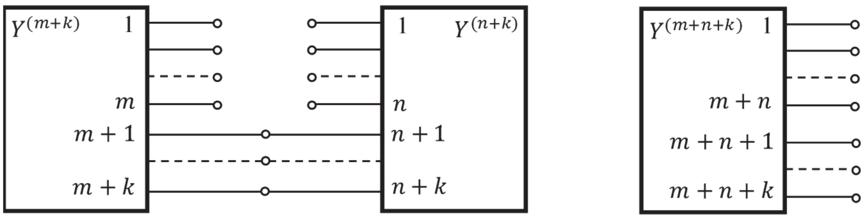
Рис. 6. $(m + k)$ (а) и $(n + k)$ (б) клеммники

Матрицы узловых проводимостей многоклеммников $Y^{(m+k)}$ и $Y^{(n+k)}$ представим в следующем виде:

$$Y^{(m+k)} = \begin{bmatrix} Y_{MM} & Y_{MK} \\ Y_{KM} & Y'_{KK} \end{bmatrix},\ Y^{(n+k)} = \begin{bmatrix} Y_{NN} & Y_{NK} \\ Y_{KN} & Y''_{KK} \end{bmatrix},$$

где $Y_{MM}(Y_{NN})$ – квадратная подматрица узловых проводимостей для множества M (N) клемм $(m+k)$ – клеммника $((n+k)$ – клеммника); Y'_{KK} (Y''_{KK}) – квадратная подматрица для множества K клемм $(m+k)$ – клеммника $((n+k)$ – клеммника); $Y_{MK}(Y_{NK})$ – матрица размера $m \times k$ $(n \times k)$.

Соединим многоклеммники k клеммами (рис. 7а).



а) б)

Рис. 7. Соединение $(m+k)$- *и* $(n+k)$ *- клеммников (а) и результирующий* $(m+n+k)$ *- клеммник (б)*

При соединении k клемм каждого из многоклеммников получается $(m+n+k)$ - клеммник (рис. 7б), матрица узловых проводимостей $Y^{(m+n+k)}$ которого выражается через элементы исходных матриц $Y^{(m+k)}$, $Y^{(n+k)}$ и имеет вид

$$Y^{(m+n+k)} = \begin{bmatrix} Y_{MM} & 0 & Y_{MK} \\ 0 & Y_{NN} & Y_{NK} \\ Y_{KM} & Y_{KN} & Y_{KK} \end{bmatrix},$$

где $Y_{KK} = Y'_{KK} + Y''_{KK}$

Результирующая матрица имеет размерность $m+n+k$ и получается из элементов матриц узловых проводимостей исходных многоклеммников. Очевидно, что взаимная проводимость между неприсоединенными узлами M и N будет равна нулю, а элементы подматрицы Y_{KK} результирующей матрицы получатся путем сложения элементов квадратных подматриц k общих клемм Y'_{KK} и Y''_{KK} исходных многоклеммников.

Электрическое состояние полученного многоклеммника опишем согласно методу узловых потенциалов:

$$\begin{bmatrix} Y_{MM} & 0 & Y_{MK} \\ 0 & Y_{NN} & Y_{NK} \\ Y_{KM} & Y_{KN} & Y_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_M \\ \dot{\varphi}_N \\ \dot{\varphi}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_M \\ \dot{I}_N \\ \dot{I}_K \end{bmatrix}. \quad (2)$$

При свертывании k общих клемм и рассмотрении режима многоклеммника относительно $(m+n)$ - клемм положим, что узловые токи в k клеммах равны нулю. Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} Y_{MM} & 0 & Y_{MK} \\ 0 & Y_{NN} & Y_{NK} \\ Y_{KM} & Y_{KN} & Y_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_M \\ \dot{\varphi}_N \\ \dot{\varphi}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_M \\ \dot{I}_N \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Для получения матрицы узловых проводимостей эквивалентного $(m+n)$ - клеммника исключим потенциалы $\dot{\varphi}_K$ из системы (3):

$$Y_{KM}\dot{\varphi}_M + Y_{KN}\dot{\varphi}_N + Y_{KK}\dot{\varphi}_K = 0,$$

$$\dot{\varphi}_K = -Y_{KK}^{-1}(Y_{KM}\dot{\varphi}_M + Y_{KN}\dot{\varphi}_N). \quad (4)$$

Подставив $\dot{\varphi}_K$ из (4) в систему (3), получим

$$Y_{MM}\dot{\varphi}_M - Y_{MK}Y_{KK}^{-1}(Y_{KM}\dot{\varphi}_M + Y_{KN}\dot{\varphi}_N) = \dot{I}_M,$$

$$Y_{NN}\dot{\varphi}_N - Y_{NK}Y_{KK}^{-1}(Y_{KM}\dot{\varphi}_M + Y_{KN}\dot{\varphi}_N) = \dot{I}_N.$$

После приведения подобных членов матрица узловых проводимостей эквивалентного $(m+n)$ – клеммника $Y_Э$ получится в следующем виде:

$$Y_Э = \begin{bmatrix} Y_{MM} - Y_{MK}Y_{KK}^{-1}Y_{KM} & -Y_{MK}Y_{KK}^{-1}Y_{KN} \\ -Y_{NK}Y_{KK}^{-1}Y_{KM} & Y_{NN} - Y_{NK}Y_{KK}^{-1}Y_{KN} \end{bmatrix}.$$

Выводы

1. При соединении (последовательное, параллельное, последовательно-параллельное, параллельно-последовательное) двухпортовых цепей, как правило, условие регулярности соединения не выполняется, следовательно, правила получения обобщенных параметров составного четырехполюсника неприемлемы.

2. Приведены выражения для определения обобщенных параметров (узловые проводимости) составного многоклеммника путем объединения двух многоклеммников неодинаковых размерностей.

3. Используя принцип дуальности, приведено выражение обобщенных параметров (матрица контурных сопротивлений) составной многоконтурной цепи при объединении цепей с выделенными контурами (ячейками).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Атабеков Г.И.** Основы теории цепей.- СПб.: Лань, 2009. - 425 с.
2. **Жуховицкий Б.Я., Негневицкий И.Б.** Теоретические основы электротехники.- Т.2.- М.: Энергия, 1972.- 200 с.
3. **Лосев А.К.** Теория линейных электрических цепей.- М.: Высшая школа, 1987.- 512 с.
4. **Կարապետյան Մ.Ա., Հակոբջանյան Գ.Դ.** Տեսական էլեկտրատեխնիկա.- Հ.1.- Երևան, 1997.- 220 էջ:
5. **Демирчян К.С., Нейман Л.Р, Коровкин Н.В, Чечурин В.Л.** Теоретические основы электротехники.- В 3 т.-Т.1.- СПб.: Питер, 2003.- 463 с.
6. **Nilsson James W., Riedel Sussan A.** Electric circuits.- Boston: Prentice – Hall - Pearson, 2011.- 820 p.
7. **Fogiel Dr.M.** The electric circuits problem solver.- Research and Education Assoc, New York, 1983.-1170p.
8. **Зелях Э.В.** Основы общей теории линейных электрических схем.- М.: Изд-во АН СССР, 1951.- 336 с.
9. **Толстов Ю.Г., Теврюков А.А.** Теория электрических цепей.- М.: Высшая школа, 1971.- 296 с.
10. **Адонц Г.Т.** Многополюсник.- Ереван, 1965.- 468с.
11. **Сафарян В.С., Арутюнян Г.В.** К обобщению понятия четырехполюсника // Вестник НПУА: Электротехника, Энергетика.- 2018.- N2.- С. 30-38.

ЗАО “Научно-исследовательский институт энергетики РА”, Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 04.12.2019.

Վ.Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ, Գ.Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԲԱԶՄԱԲԵՎԵՌՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Հետազոտվում են բաղադրյալ բազմասեղմակների ընդհանրացված պարամետրերը: Դիտարկվում են նույն և տարբեր չափերով բազմասեղմակների միացումները: Այդպիսի շղթաների համար միակ սահմանափակումը Կիրխհոֆի առաջին օրենքն է: Բաղադրյալ բազմասեղմակի ընդհանրացված պարամետրերը՝ հանգուցային հաղորդականությունների մատրիցը, արտահայտվում են առանձին բազմասեղմակների հանգուցային հաղորդականությունների մատրիցների տրված տարրերով: Օգտագործելով երկվության սկզբունքը՝ դիտարկվում է ճյուղավորված էլեկտրական շղթաների միավորումը՝ առանձնացված բջիջների միավորման միջոցով:

Առանցքային բառեր. բազմասեղմակ, բաղադրյալ քառաբևեռ, կանոնավորության պայման, հանգուցային հաղորդականությունների մատրից, ընդհանրացված պարամետրեր:

V.S. SAFARYAN, G.V. HARUTYUNYAN

INVESTIGATING THE GENERALIZED PARAMETERS OF COMPOSITE MULTI-TERMINALS

The investigation of generalized parameters of composite multi-terminals is carried out. The multi-terminal connections of the similar and dillerent dimensions are considered. For such electrical circuits the first law of Kirchhoff is the only limitation. The generalized parameters of the composite multi-terminal - the matrix of nodal conductances, are expressed by the given elements of the matrix of nodal conductances of the individual multi-terminals. Using the duality principle, the connection of branched electrical circuits by combining cells is considered.

Keywords: multi-terminal, composite two-port, regularity condition, matrix of nodal conductances, generalized parameters.