

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТИКИ ВЫРОЖДЕННОГО ФЕРМИ-ГАЗА

1. *Введение.* Барометрическая формула для идеального газа связывает концентрацию газа $n(x)$ в силовом потенциальном поле $U(x)$ с высотой x при заданной температуре T и концентрации n_0 на высоте $x=0$. В однородном гравитационном поле барометрическая формула имеет вид [1,2]

$$n(x) = n_0 \exp\left(-\frac{mgx}{kT}\right), \quad (1)$$

где m - масса частиц газа, g - ускорение свободного падения (ускорение в гравитационном поле), k - постоянная Больцмана.

На практике часто достаточно знать зависимость концентрации от потенциальной энергии частиц в силовом поле. В этом случае барометрическая формула приобретает форму известного распределения Больцмана

$$n(U) = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \quad (2)$$

для газа с уравнением состояния $p = nkT$ при фиксированной температуре (изотермический случай), где p - давление газа.

Известны барометрические формулы и распределения для других уравнений состояния газов. Например, в [3,4] для описания процессов в плазме используется аналогичная формула адиабатического уравнения состояния; в [5] получена и проанализирована барометрическая формула для газа Ван-дер-Ваальса; в [6] выведена барометрическая формула для теплого ферми-газа, которая в форме распределения применялась в теориях ионно-звуковых волн в плазме с квантово-вырожденными электронами [7,8].

Чандрасекар [9,10] получил уравнение состояния ультрарелятивистски вырожденного газа, т.е. газа с энергией Ферми, существенно превышающей энергию покоя частиц. Это уравнение многократно использовалось для описания процессов в недрах белых карликов [11,12] и в теориях волновых процессов в ультрарелятивистски вырожденной плазме [13-20]. Тем не менее,

барометрическая формула для газа с уравнением состояния Чандрасекара нигде не представлялась.

В данной статье сообщается о простом выводе барометрической формулы для ультрарелятивистски вырожденного газа, подчиняющегося уравнению состояния Чандрасекара:

$$P = A \left[\eta (2\eta^2 - 3) \sqrt{1 + \eta^2} + 3 \operatorname{arcsinh}(\eta) \right], \quad (3)$$

в котором $A = \pi m^4 c^5 / 3 h^3$ - коэффициент и $\eta = \frac{p_F}{mc} = \sqrt[3]{\frac{3 h^3 n}{8 \pi m^3 c^3}} = \sqrt[3]{\frac{n}{n_F}}$ - релятивистский параметр вырождения, где P - давление газа; n - концентрация частиц газа; m - их масса; p_F - релятивистский импульс Ферми; n_F - концентрация частиц газа, при которой импульс Ферми равен mc ; c - скорость света; h - постоянная Планка.

2. Вывод барометрической формулы. Будем следовать газостатическому методу вывода барометрической формулы, примененному в [6]. Для этого рассмотрим уравнение газостатического равновесия

$$\frac{1}{n} \frac{dP}{dx} + \frac{dU}{dx} = 0. \quad (4)$$

Подставим (3) в (4) и получим обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение уравнение с условием $n(U=0) = n_0$ дает

$$U = \frac{8A}{n_F} \left[\sqrt{\left(\frac{n_0}{n_F} \right)^{2/3} + 1} - \sqrt{\left(\frac{n}{n_F} \right)^{2/3} + 1} \right]. \quad (5)$$

Разрешая (5) относительно n , получим распределение ультрарелятивистски вырожденного газа Чандрасекара в силовом поле U в явном виде:

$$n = \frac{n_F}{512 A^3} \left[64 A^2 \left(\frac{n_0}{n_F} \right)^{2/3} - 16 A n_F U \sqrt{1 + \left(\frac{n_0}{n_F} \right)^{2/3}} + n_F^2 U^2 \right]^{3/2}. \quad (6)$$

Подставляя в нее однородное силовое поле $U = mgx$, получим искомую барометрическую формулу

$$n = \frac{n_F}{512 A^3} \left[64 A^2 \left(\frac{n_0}{n_F} \right)^{2/3} - 16 A n_F mgx \sqrt{1 + \left(\frac{n_0}{n_F} \right)^{2/3}} + n_F^2 m^2 g^2 x^2 \right]^{3/2}. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) - основной результат данной работы. Анализируя их, построим график зависимости $n(U)$ (рис.1). Видно, что он имеет две ветви, в промежутке между которыми значения функции (6) комплекснозначные. Правая ветвь при больших значениях U является ложной. Она возникла при

возведении в квадрат (5) при решении иррационального уравнения относительно n . Ложную ветвь необходимо отбросить.

В итоге, формула (6) справедлива лишь до значения U_F , выражаемого соотношением

$$U_F = \frac{8A}{n_F} \left[\sqrt{\left(\frac{n_0}{n_F}\right)^{2/3} + 1} - 1 \right] = mc^2 \left(\sqrt{\eta_0^2 + 1} - 1 \right), \quad (8)$$

которое находится, как наименьший корень функции (7). Здесь релятивистский параметр вырождения η_0 соответствует n_0 .

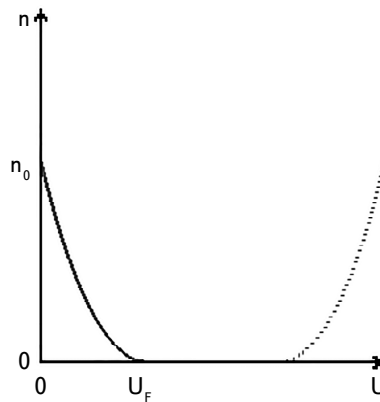


Рис.1. График зависимости (6); ложная ветвь отмечена пунктиром.

3. *Заключение.* Таким образом, формула (6) при $0 < U < U_F$ есть распределение частиц в силовом поле, а (7) – барометрическая формула для ультра-релятивистски вырожденного газа, подчиняющегося уравнению состояния Чандрасекара [9,10]. Их можно использовать в теориях нелинейных электростатических волн и структур в релятивистской вырожденной плазме.

A barometric formula for ultra-relativistically degenerate Fermi-gas. An exact explicit barometric formula for ultra-relativistically degenerate Fermi-gas governed by the Chandrasekhar equation of state is derived.

Keywords: *ultra-relativistically degenerate Fermi-gas; Chandrasekhar equation of state; barometric formula*

02 июля 2020

¹ РФЯЦ - ВНИИЭФ, Саров, Россия,
e-mail: dubinov-ae@yandex.ru

А.Е.Дубинов
A.E.Dubinov

² СарФТИ НИЯУ МИФИ, Саров,
Нижегородская обл., Россия

ЛИТЕРАТУРА

1. *L.D.Landau, E.M.Lifshitz*, Statistical Physics, Oxford: Pergamon Press Ltd, 1980.
2. *M.N.Berberan-Santos, E.N.Bodunov, L.Pogliani*, Amer. J. Phys., **65**, 404, 1997.
3. *C.Sack, H.Schamel*, Plasma Phys. Contr. Fus., **27**, 717, 1985.
4. *A.E.Dubinov*, J. Appl. Mech. Techn. Phys., **48**, 621, 2007.
5. *M.N.Berberan-Santos, E.N.Bodunov, L.Pogliani*, Amer. J. Phys., **70**, 438, 2002.
6. *A.A.Dubnova*, Techn. Phys., **54**, 210, 2009.
7. *A.E.Dubinov, A.A.Dubnova, M.A.Sazonkin*, J. Comm. Techn. Electr., **55**, 907, 2010.
8. *A.E.Dubinov, M.A.Sazonkin*, J. Exper. Theor. Phys., **111**, 865, 2010.
9. *S.Chandrasekhar*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **95**, 207, 1935.
10. *S.Chandrasekhar*, Science, **226**, 497, 1984.
11. *S.Chandrasekhar*, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Chicago: Univ. Chicago Press, 1939.
12. *G.S.Bisnovatyi-Kogan*, Stellar Physics, Vol. 1, NY-Berlin: Springer, 2001.
13. *B.Eliasson, P.K.Shukla*, Europhys. Lett., **97**, 15001, 2012.
14. *S.Hussain, A.Rehman, H.Hasnain et al.*, Astrophys. Space Sci., **359**, 29, 2015.
15. *G.Mikaberidze, V.I.Berezhiani*, Phys. Lett. A, **379**, 2730, 2015.
16. *F.Haas*, J. Plasma Phys., **82**, 705820602, 2016.
17. *M.M.Hasan, M.A.Hossen, A.A.Mamun*, Phys. Plasmas, **24**, 072113, 2017.
18. *B.Sahu, A.Sinha, R.Roychoudhury*, Phys. Plasmas, **24**, 112111, 2017.
19. *M.K.Ahmed, O.P.Sah*, Phys. Scripta, **21**, 045301, 2019.
20. *H.Soltani, T.Mohsenpour, F.Sohbatzadeh*, Contrib. Plasma Phys., **59**, e201900038, 2019.