

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ ЧИСТО РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ. II

О.В.ПИКИЧЯН

Поступила 12 февраля 2020

Принята к печати 26 августа 2020

Работа является второй частью предыдущей статьи автора. Ее цель заключается в иллюстрации, на простых примерах нелинейных задач одномерной чисто рассеивающей среды, эффективности использования введенных ранее вспомогательных функций, так называемых линейных образов (ЛО) функции отражения-пропускания. Сначала получено явное аналитическое решение нелинейной "прямой" задачи определения полей выходящего излучения из "составной" среды, состоящей из отражающей поверхности и слоя конечной толщины с известными отражающими-пропускающими свойствами. Затем решены нелинейные "обратные" задачи определения: а) внешних возбуждающих полей по данным выходящего из среды излучения, б) поля на "недоступной" границе среды по наблюдениям светового режима на одной ее границе, в) интенсивностей излучений, идущих в одном направлении по измерениям полей в противоположном направлении, г) некоторых характеристик среды по измерениям интенсивностей, падающих на нее извне и выходящего через одну ее границу излучения, д) поля внутри среды по измерениям двухсторонних полей излучения лишь на одной границе среды. В конце показано, что в нелинейной задаче освещения полубесконечной среды не имеет место явление "просветления" среды, световой режим как вне, так и внутри среды совпадает с решением линейной задачи.

Ключевые слова: *перенос излучения: нелинейная задача*

1. *Введение.* В первой части данной работы [1] было получено явное решение простой нелинейной задачи отражения-пропускания излучения одномерным и чисто рассеивающим слоем конечной толщины, состоящего из двухуровневых атомов. Оно сводилось к решению функционального уравнения полной инвариантности Амбарцумяна, написанного для введенных нами вспомогательных функций, называемых линейными образами (ЛО) отражения-пропускания. При этом удалось определить также поле излучения внутри среды.

В настоящей работе показывается, что использование ЛО позволяет также исследовать некоторые более сложные нелинейные, в том числе обратные, задачи переноса излучения, имеющие более широкое применение. В прямой постановке - это задачи переноса в средах с подстилающими поверхностями, обратными же являются задачи восстановления полей излучения и оптических характеристик среды при обычно встречающихся на практике случаях, когда

наблюдательный материал недостаточно полон. В работе приводятся явные аналитические решения некоторых из указанного рода нелинейных задач.

2. Задачи с подстилающей поверхностью. В линейной теории переноса излучения задачи, касающиеся атмосфер с подстилающими рассеивающими и поглощающими поверхностями, имеют важное прикладное значение. В этом случае искомое поле излучения образуется в результате многократного взаимодействия двух объектов с заранее известными отражающими-пропускающими способностями (см., например, [2,3]). В астрофизических приложениях чаще рассматриваются задачи, в которых поверхности располагаются ниже атмосферы (в случае планет ими могут оказаться, например, твердый, жидкий, или растительный покровы). Однако существуют также задачи, в которых указанные поверхности находятся выше атмосферы, как, например, при облачном покрове, создающей парниковый эффект в планетных атмосферах, а также покровный эффект для отдельной звезды или эффект отражения излучения в случае тесных звездных пар. Поэтому использование полученного ранее нами аналитического решения простой нелинейной задачи для анализа более сложных задач, учитывающих наличие подстилающих поверхностей, представляет особый интерес.

Пусть имеется система, состоящая из двух взаимодействующих объектов, условно рассматриваемых как подстилающая поверхность и атмосфера. Вопрос заключается в определении роли подстилающей поверхности, обладающей нелинейными оптическими свойствами, в общем случае представляют интерес роль нелинейности каждой из двух составляющих.

Пусть в изотропной одномерной среде геометрической толщины L имеет место чистое изотропное рассеяние, при этом со стороны левой границы (см. рис.1) примыкает поверхность, отражающая и пропускающая способности которой известны $Q^\pm$. Последние нелинейным образом зависят от падающих на них слева и справа пучков (x, y) . Допускается также, что поверхность обладает двусторонними и не зависящими от внешнего возбуждения

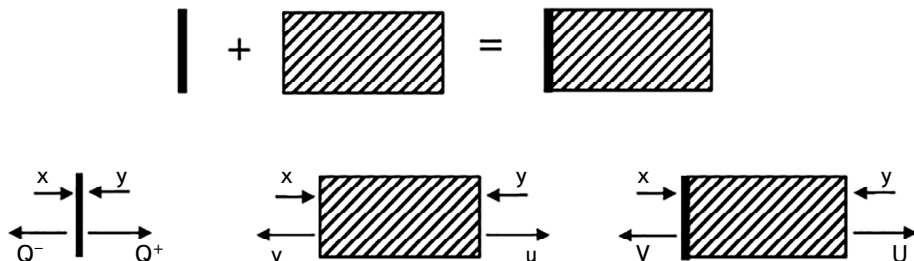


Рис.1. Схема сложения подстилающей поверхности и рассеивающей-поглощающей среды (наверху). Обозначения физических величин, описывающих составляющие части и суммарную среду по отдельности (внизу).

излучательными способностями $\varepsilon^\pm$. Другими словами, величины

$$Q^\pm \equiv \mathcal{Q}^\pm(x, y; \varepsilon^\pm) = \tilde{Q}^\pm(x, y) + \varepsilon^\pm \quad (1)$$

представляют интенсивности излучения, направленного вправо "+" и влево "-" при условии, что на поверхность слева и справа падает излучение интенсивности x и y , соответственно. Введем в рассмотрение также величины $U \equiv U(x, y) \equiv U(x, y; \varepsilon^\pm; L)$, $V \equiv V(x, y) \equiv V(x, y; \varepsilon^\pm; L)$, представляющие собой интенсивности излучения, выходящего соответственно через правую и левую границы системы поверхность + атмосфера, когда она слева и справа освещена внешним излучением интенсивности x и y . При этом отражающие и пропускающие характеристики отдельных составляющих частей данной системы считаются заданными: $Q^\pm(x, y; \varepsilon^\pm)$ для подстилающей поверхности и $u \equiv u(x, y) \equiv u(x, y; L)$, $v \equiv v(x, y) \equiv v(x, y; L)$ - для атмосферы геометрической толщины L в отсутствие примыкающей поверхности.

В верхней части рис.1 показано каким образом поверхность и атмосфера объединяются в единую систему, внизу отмечаются отражающие-пропускающие радиационные характеристики как каждого из компонентов, так и среды, получающейся в результате их объединения.

Задача заключается в определении величин U и V по известным $Q^\pm$, u , v . Интенсивности излучения, идущие вправо и влево на контактной границе атмосферы с поверхностью, обозначим через p и s , соответственно.

Формулы нелинейного сложения слоев (см., например, [4]) для искоемых величин в данном случае можно записать в виде

$$U(x, y) = u(p, y), \quad V(x, y) = Q^-(x, s; \varepsilon^-), \quad (2)$$

$$\begin{cases} s = v(p, y) \\ p = Q^+(x, s; \varepsilon^+) \end{cases} \quad (3)$$

где величины u и v имеют явные представления [1]

$$u = y + (x - y)T, \quad v = x - (x - y)T, \quad (4)$$

а ЛО $T \equiv T(x, y; L) \equiv T(x + y; L) \equiv T(z; L) \equiv T(z)$ дается выражением

$$T(z) = q \frac{1 + bz}{1 + qbz}, \quad (5)$$

при этом величина $q \equiv q(L)$ представляет пропускающую способность среды геометрической толщины L в одномерной, линейной и консервативной задаче переноса излучения.

Величина s в (3) с учетом соотношений (4) и (5) находится из трансцендентного уравнения

$$s = \frac{(1-q)Q^+ + [1 + (Q^+ + y)b]qy}{1 + (Q^+ + y)bq}, \quad (6)$$

которое при обозначениях

$$A(s) \equiv (1-q) - (s-y)bq, \quad B \equiv 1 + bqy, \quad C \equiv (1+by)qy, \quad (7)$$

с учетом (1) примет простой вид

$$A(s)\tilde{Q}^+(x, s) - \tilde{B}s + \tilde{C} = 0, \quad (8)$$

где

$$\tilde{B} \equiv 1 + bq(\varepsilon^+ + y), \quad \tilde{C} \equiv (1-q)\varepsilon^+ + [1 + b(\varepsilon^+ + y)]qy. \quad (9)$$

Решение трансцендентного уравнения (8) относительно s , можно строить, например с помощью надлежащего выбора итеративной схемы, с учетом условий

$$Q^+(x, s; \varepsilon^+) \leq x + s + \varepsilon^+ \quad \text{или} \quad \tilde{Q}^\pm(x, y) \leq x + y, \quad (10)$$

отражающих факт отсутствия процессов размножения фотонов в поверхности. После определения s , значение искомой величины V находится непосредственно из второго соотношения (2). Другая искомая величина U определится из первого соотношения (2) с учетом выражений (4), (5)

$$U(x, y) = \frac{(1-q)y + [1 + (p+y)b]pq}{1 + (p+y)bq}, \quad (11)$$

где значения величин p и $p+y$ с помощью (3), (1) и (8) находятся в виде:

$$p = \frac{Bs - C}{A(s)} = \frac{s - [1 - (s-y)b]qy}{1 - q - (s-y)bq}, \quad p+y = \frac{s + (1-2q)y}{1 - q - (s-y)bq}. \quad (12)$$

Соотношение (3) позволяет переписать выражение (11) также непосредственно в форме

$$U(x, y) = \frac{(1-q)y + (1+by)qQ^+ + bq(Q^+)^2}{1 + (Q^+ + y)bq}, \quad Q^+ \equiv Q^+(x, s; \varepsilon^+). \quad (13)$$

Так решается поставленная нами задача в общем случае, когда многократно взаимодействующие между собой составляющие системы обладают нелинейными свойствами.

Определенный интерес представляют также частные случаи рассмотренной задачи, когда какой-либо из компонентов составной системы обладает линейными свойствами.

2.1. Линейная поверхность. В данном случае очевидно:

$$Q^+(x, s; \varepsilon^+) = t^+x + r^+s + \varepsilon^+, \quad Q^-(x, s; \varepsilon^-) = r^-x + t^-s + \varepsilon^-, \quad (14)$$

при этом величинами $t^\pm$ и $r^\pm$ обозначены двусторонние отражающие и

пропускающие способности подстилающей поверхности в линейном случае. Из (8) и (9) имеем

$$A_0 s^2 + B_0 s - C_0 = 0, \quad (15)$$

где приняты обозначения:

$$A_0 \equiv r^+ b q, \quad B_0 \equiv b_0 + b_1 x + b_2 y, \quad C_0 = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x y + a_4 y^2, \quad (16)$$

$$b_0 \equiv 1 - (1 - q) r^+ + b q \varepsilon^+, \quad b_1 \equiv b q t^+, \quad b_2 \equiv (1 - r^+) b q, \quad (17)$$

$$a_0 \equiv (1 - q) \varepsilon^+, \quad a_1 \equiv (1 - q) t^+, \quad a_2 \equiv (1 + b \varepsilon^+) q, \quad a_3 \equiv b q t^+, \quad a_4 \equiv b q. \quad (18)$$

Физическому решению уравнения (15) соответствует положительный знак перед квадратным корнем. После определения s из (15), выходящее через левую границу среды излучение с учетом (14) находится из соотношения (2)

$$V(x, y) = r^- x + t^- s + \varepsilon^-, \quad (19)$$

а излучение $U(x, y)$, выходящее через правую границу среды, как и раньше, находится из (11)-(13).

2.2. Линейная атмосфера. В этом случае достаточно (см. [1]) в любую из формул (6)-(9) подставить $b \equiv 0$, чтобы свести вопрос к решению уравнения

$$s = (1 - q) Q^+(x, s; \varepsilon^+) + q y \quad \text{или} \quad s = (1 - q) [\tilde{Q}^+(x, s) + \varepsilon^+] + q y. \quad (20)$$

Полученное уравнение имеет весьма прозрачный физический смысл - внутреннее поле, идущее к поверхности, состоит из двух компонентов: от доли излучения самой поверхности - Q^+ , которая отразилась от линейной среды и части падающего на правую границу излучения y , которая была пропущена атмосферой. После решения (20) интенсивность излучения, выходящая через правую границу, находится из (13) или (11) подстановкой $b \equiv 0$

$$U(x, y) = q Q^+(x, s; \varepsilon^+) + (1 - q) y = \frac{q s + (1 - 2q) y}{1 - q}, \quad (21)$$

а $V(x, y)$ из (2).

2.3. Оба компонента линейные. Это наиболее простой случай, задача становится линейной, поэтому решение приводится здесь лишь в справочных целях. Оно может быть получено разными путями, в частности, из уравнения (20) с учетом равенств (1), (14) нетрудно получить

$$s = \frac{(1 - q)(\varepsilon^+ + t^+ x) + q y}{1 - (1 - q) r^+}. \quad (22)$$

3. Нелинейные задачи переноса в обратной постановке. С точки зрения астрофизической интерпретации наблюдений область обратных задач восстановления истинных характеристик объектов по наблюдаемым

величинам гораздо шире и разнообразнее (см., например, [3,5-9]). Более того, анализ диффузных полей излучения с помощью математически точной формулировки обратной задачи подчас намного эффективнее и актуальнее, чем прямое моделирование процессов многократного взаимодействия излучения с веществом. Действительно, исходные радиационные свойства исследуемого объекта, явления или физической ситуации чаще приходится восстанавливать именно посредством практического измерения интенсивностей наблюдаемых полей излучения. Однако, несмотря на их практическую важность, обратные нелинейные задачи переноса лучистой энергии вследствие математической сложности все еще остаются мало изученными. Поэтому целесообразно попытаться полученные в [1] аналитические выражения прямой задачи, использовать также для анализа задач в обратной постановке.

Для иллюстрации ниже приводятся некоторые простые примеры, типичные для моделей различных экспериментально-практических ситуаций, когда по наблюдаемым величинам определяются величины, недоступные измерению или те или иные локальные характеристики самой среды.

3.1. Определение внешних возбуждающих полей по данным выходящего из среды излучения. Определить интенсивности x и y , входящих в среду пучков по наблюдаемым значениям u и v , выходящего из среды излучения. Из (4), получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} x + y = u + v \\ x - y = \frac{u - v}{2T(x + y) - 1} \end{cases} \quad (23)$$

Если учесть первое из уравнений (23), то решение этой системы нетрудно записать непосредственно в виде:

$$x = \frac{(u + v)T(u + v) - v}{2T(u + v) - 1}, \quad y = \frac{(u + v)T(u + v) - u}{2T(u + v) - 1}, \quad (24)$$

где ЛО задается формулой (5). Выражениями (24) дается явное решение поставленной задачи.

3.2. Определение интенсивности излучения на недоступной для измерения границе среды по наблюдениям светового режима на другой границе. Если наблюдателю доступны измерения, сделанные лишь со стороны одной из границ среды (например левой), то по наблюдаемым на этой границе значениям интенсивностей излучения (падающего x и отраженного v) можно определить значения соответствующих величин (входящих y и выходящих u интенсивностей) на противоположной - (правой) границе среды. Для этого достаточно с учетом (5) решить систему (23) относительно y и u

$$bqy^2 + [1 + (x-v)b]qy = (1+bv)qx - (x-v), \quad (25)$$

$$bqu^2 + [1 - (x-v)b]qu = (1+bv)qx - (x-v)(1-q). \quad (26)$$

В полученных квадратных уравнениях физическим решениям соответствует положительный знак перед квадратным корнем. При этом, если решено лишь одно из (25), (26), то решение другого можно непосредственно найти из (4).

3.3. Определение интенсивностей излучения в одном из направлений по измерениям интенсивности противоположно направленного излучения. Пусть, как и выше, обе границы среды одновременно освещены мощными пучками излучения интенсивностей x и y , соответственно, при этом известно, идущие в одном и том же направлении (например слева направо x и y). Требуется определить значения аналогичных интенсивностей излучения соответствующие обратному направлению (т. е. справа налево y и x):

$$y = \frac{(1+bqx)u - (1+bx)qx}{1-q + (x-u)bq} \quad \text{или} \quad y = \frac{u - [1 + (x-u)b]xq}{1 - [1 - (x-u)b]q}, \quad (27)$$

$$v = \frac{(1-q)x - (x-u)(1+ub)q}{(1-q) + (x-u)bq}. \quad (28)$$

3.4. Определение некоторых характеристик среды по измерениям интенсивностей падающего излучения и излучения, выходящего через одну из ее границ. Пусть измерены интенсивности падающего на среду излучения (x , y) и выходящего (например v) через одну из границ излучения. Требуется определить как оптическую толщину $\tau(0,0)$ этой среды в невозбужденном состоянии (т.е. когда $x=0$, $y=0$), так и выявить закон изменения оптической толщины $\tau(x, y)$ в зависимости от интенсивностей (x , y) внешнего возбуждающего излучения, т.е. определить уровень просветления среды в зависимости от внешнего возбуждающего излучения и, наконец, "экспериментальным" путем найти локальную характеристику b вещества среды.

Посредством второго выражения (4), с учетом (5), нетрудно получить

$$\frac{1}{q} = \frac{x - y - [y^2 + xy - (x+y)v]b}{x - v}. \quad (29)$$

При этом (см. [10])

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\tau(0)}{2}}, \quad (30)$$

где сохранены все обозначения, использованные ранее в [1]:

$$\tau(x, y, L) = \tau(x + y, L) \equiv \tau(z, L) \equiv \tau(z), \quad \tau(0) = \int_0^L k_0(l) dl = \frac{h\nu}{2} B_{12} N, \\ k_0(l) = n(l) \frac{h\nu}{2} B_{12}, \quad N \equiv \int_0^L n(l) dl. \quad (31)$$

Из соотношений (29), (30) окончательно получим значение оптической толщины невозбужденной среды, выраженное через измеряемые величины ν , x , y и значение b микро характеристики вещества рассеивающей-поглощающей среды

$$\tau(0) = 2 \frac{\nu - y - (y^2 + xy - zv)b}{x - \nu} = 2 \frac{\nu - y}{x - \nu} (1 + bz). \quad (32)$$

С учетом (31) найдем также число нейтральных атомов

$$N = \frac{4}{h\nu B_{12}} \frac{\nu - y - (y^2 + xy - zv)b}{x - \nu} = \frac{4}{h\nu B_{12}} \frac{\nu - y}{x - \nu} (1 + bz). \quad (33)$$

Уместно подчеркнуть, что посредством формул (32) и (33) определяются параметры невозбужденной среды, несмотря на то, что измерения относились именно реально возбужденной среде. Очевидно, правые части соотношений (32) и (33) инвариантны по отношению к мощности внешнего возбуждающего излучения (x , y). Из тех же наблюдений, помимо исходной оптической толщины $\tau(0)$ среды, нетрудно определить также ее реальную оптическую толщину $\tau(z)$ как функцию от мощности возбуждающих полей x и y

$$\tau(z) = \int_0^L k(z, l) dl = \frac{\tau(0)}{1 + bz} = 2 \frac{\nu - y}{x - \nu}. \quad (34)$$

Величина b является одной из локальных характеристик вещества среды и непосредственно связана с атомными величинами

$$b = \frac{B_{12} + B_{21}}{2 A_{21}} = \frac{c^2}{4 h \nu_{12}^3} \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right). \quad (35)$$

Эта величина до сих пор считалась заранее известной. Если же теперь поставить задачу независимого "экспериментального" определения значения этой величины, то потребуются данные еще одного наблюдения. Действительно, используя результаты уже двух наблюдений (x_1, y_1, ν_1) и (x_2, y_2, ν_2) из инварианта (32) нетрудно получить также ее значение:

$$\frac{\nu_1 - y_1}{x_1 - \nu_1} (1 + bz_1) = \frac{\nu_2 - y_2}{x_2 - \nu_2} (1 + bz_2), \quad (36)$$

$$b = \frac{(\nu_1 - y_1)(x_2 - \nu_2) - (\nu_2 - y_2)(x_1 - \nu_1)}{(x_1 - \nu_1)(\nu_2 - y_2)z_2 - (x_2 - \nu_2)(\nu_1 - y_1)z_1}. \quad (37)$$

Отметим, наконец, что вышеприведенные формулы в значительной мере упрощаются, когда среда освещена лишь с одной стороны, т.е., например, при условии $y \equiv 0$, $x \neq 0$. Здесь мы сталкиваемся с классической задачей

определения оптических параметров среды посредством измерения падающего x и отраженного v от среды излучения:

$$\tau(0) = 2 \frac{v_0}{x - v_0} (1 + xb), \quad N = \frac{4}{h v B_{12}} \frac{v_0}{x - v_0} (1 + xb), \quad (38)$$

$$\tau(x) = 2 \frac{v_0}{x - v_0}, \quad b = \frac{(x_2 - v_2)v_1 - (x_1 - v_1)v_2}{(x_1 - v_1)x_2 v_2 - (x_2 - v_2)x_1 v_1}, \quad (39)$$

где $v_0 \equiv v(x, 0)$.

3.5. Определение поля излучения внутри среды по измерениям двухсторонних полей на одной из границ среды. В первой части данного исследования [1] задача определения поля внутри среды была решена двумя способами: как прямая задача сложения двух отдельных слоев с заранее известными отражающими-пропускающими свойствами и как обратная задача, сформулированная в виде задачи Коши для уравнения переноса излучения. Здесь же она будет рассматриваться в виде классической обратной задачи "дистанционного зондирования", когда по данным "измерений" интенсивностей входящего и выходящего излучений определяется внутренний световой режим среды без какого-либо использования уравнения переноса излучения. Будем исходить из формул нелинейного сложения слоев, полученных впервые Амбарцумяном в [11,12].

Пусть среда геометрической толщины L со стороны левой и правой границ освещена излучением с интенсивностями x и y , соответственно. Необходимо определить интенсивности вправо (+) и влево (-) направленного излучения $I^\pm(l; x, y; L)$ на глубине l данной среды по известному отраженному излучению $v(x, y; L) \equiv I^-(0; x, y; L)$. Проведя мысленно разрез на произвольной глубине $0 < l < L$, нетрудно записать (рис.2)

$$v(x, y; L) = v(x, I^-(l; x, y; L); l). \quad (40)$$

Действительно, соотношение (40) показывает [11,12] (см. также [1]), что выходящее из слоя $[0, L]$ поле $v(x, y; L)$ при внешнем воздействии (x, y) инвариантно по отношению отсекаания от исходной среды ее части $[l, L]$ при

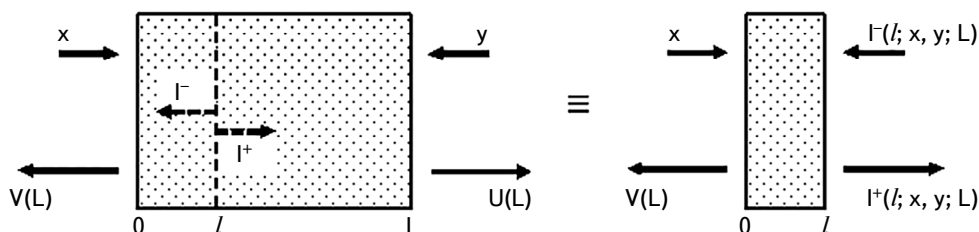


Рис.2. Схема иллюстрирующая эквивалентность задач о выходящем излучении и поля излучения внутри среды.

сохранении на оставшуюся часть $[0, l]$ воздействия $(x, I^-(l; x, y; L); l)$ в качестве внешнего.

Из соотношения (40) и рис.2 явствует, что одной и той же паре измеряемых значений $(v; x)$ соответствует произвольное число значений l и L (при $0 < l < L$), для которых решение обратной задачи 3.2. о восстановлении входящих и выходящих интенсивностей y и u для слоя толщины L одновременно будут давать решение также более общей задачи о восстановлении внутренних полей излучения $I^\pm(l; x, y; L)$ на произвольной глубине l слоя L . Действительно, замена $y \rightarrow I^-(l; x, y; L)$ и $u(x, y; L) \rightarrow I^+(l; x, y; L)$, а также $q(L) \rightarrow q(l)$ и переобозначением $v(x, y; L) \equiv V(L)$ уравнения (25), (26) переписутся уже в виде

$$bq(l)(I^-)^2 + \{1 + [x - V(L)]b\}q(l)I^- - [1 + bV(L)]q(l)x - [x - V(L)] = 0, \quad (41)$$

$$bq(l)(I^+)^2 + \{1 - [x - V(L)]b\}q(l)I^+ - [1 + bV(L)]q(l)x - [x - V(L)][1 - q(l)] = 0. \quad (42)$$

Последние нетрудно вывести также непосредственно. Для вывода уравнения (41), например, достаточно в правой части (40) использовать вторую из формул (4), и учитывать (5). При этом, если одна из величин $I^\pm(l; x, y; L)$ уже определена из соответствующего уравнения (41) или (42), то вторую можно найти уже без привлечения соответствующего уравнения, с использованием лишь одного из явных выражений нелинейного сложения слоев:

$$I^+(l; x, y; L) = u(x, I^-(l; x, y; L); l) \quad \text{или} \quad I^-(l; x, y; L) = v(I^+(l; x, y; L), y; L - l). \quad (43)$$

Раскрытые формы последних нетрудно записать при помощи (4):

$$I^+(l; x, y; L) = I^-(l; x, y; L) + [x - I^-(l; x, y; L)]T_l(x + I^-(l; x, y; L)), \quad (44)$$

$$I^-(l; x, y; L) = I^+(l; x, y; L) - [I^+(l; x, y; L) - y]T_{L-l}(y + I^+(l; x, y; L)), \quad (45)$$

где ЛО T_l , T_{L-l} даются выражением (5), здесь нижним индексом дополнительно указана толщина слоя, к которому относится данный ЛО. Таким образом соотношения (41), (44) или же (42), (45) определяют поле внутри среды как решение обратной задачи, те же искомые величины определялись в [1] путем формулирования прямой задачи посредством системы (44), (45).

3.6. Внутреннее поле в полубесконечной среде. Рассмотрим частный случай "задачи 3.5", когда оптическая толщина чисто рассеивающей среды бесконечна, при этом пусть:

$$y = 0, \quad \tau \equiv \int_0^L k_0(l)dl = \infty, \quad I^\pm(l; x, 0; L)|_{\tau=\infty} \equiv I_\infty^\pm(l, x) \equiv I_\infty^\pm. \quad (46)$$

Из (4), (5) и (30) следует, что при чистом рассеянии:

$$V(L)|_{\tau=\infty} = x, \quad (47)$$

т.е. от чисто рассеивающей полубесконечной среды в нелинейном случае, аналогично линейному, полностью отражается все излучение, которое входило в нее извне через ее внешнюю границу. С учетом (47) и факта (сравнить с (30))

$$q(l) = \frac{2}{2 + \int_0^l k_0(l') dl'} \neq 0, \quad (48)$$

уравнения (41), (42) примут вид:

$$b(I_{\infty}^-)^2 + I_{\infty}^- - [1 + bx]x = 0, \quad (49)$$

$$b(I_{\infty}^+)^2 + I_{\infty}^+ - [1 + bx]x = 0. \quad (50)$$

Уравнения (49) и (50), описывающие поля "вперед" и "назад" идущих излучений идентичны, более того - не зависят от параметра глубины, значит имеет место:

$$I_{\infty}^+(l, x) = I_{\infty}^-(l, x) = \text{const}(x), \quad 0 < l < \infty, \quad (51)$$

т.е. на каждой глубине полубесконечной среды интенсивности "вперед" и "назад" идущих излучений равны между собой, а само поле однородно на всех глубинах. Из (51) с учетом $I_{\infty}^{\pm}(0, x) = x$ (ср. с (47)) или же прямо из решения уравнений (49), (50) будем иметь:

$$\text{const}(x) = x, \quad \text{т.е.} \quad I_{\infty}^{\pm}(l, x) = x. \quad (52)$$

Таким образом, в нелинейной задаче внешнего освещения полубесконечной среды, состоящей из двухуровневых атомов, при чистом рассеянии как выходящее из среды излучение, так и поле внутри нее одинаково на всех глубинах и равно входящему в среду излучению. Этот же световой режим имел место также и в линейной задаче (см., например, уравнения (49)-(50) при $b \equiv 0$). Более того, даже в предельном случае бесконечно мощном освещении среды извне данная нелинейная задача все же продолжает оставаться линейной. Этот результат отнюдь не является тривиальным, поскольку в нем задействованы три бесконечности: бесконечное время воздействия, бесконечно мощное внешнее освещение и бесконечная оптическая толщина среды. В результате их взаимодействия оптические свойства среды не меняются, она нисколько не просветляется, везде устанавливается режим линейного однородного светового поля. То есть здесь важно значение оптической толщины, в отличие от случая среды конечной оптической толщины, где в тех же условиях превосходство принадлежит величине мощности излучения, которая просветляет среду, в пределе доводя ее до полной прозрачности. В ином контексте нелинейная задача одномерной полубесконечной среды, состоящей из двухуровневых атомов, ранее рассматривалась в [11-13], а более общий случай трехуровневого

атома в [14].

4. *Заключение.* В работе показано, что знание введенной в [15,16] вспомогательной функции - ЛО отражения-пропускания в одномерной нелинейной задаче двухуровневого атома при чистом рассеянии позволяет получить явные решения некоторых более сложных прямых и обратных задач.

Выражаю искреннюю признательность профессору А.Г.Никогосяну за внимание к работе, ценные замечания и помощь при ее выполнении.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна,
e-mail: hovpik@gmail.com hovpik@bao.sci.am

ANALYTICAL SOLUTION OF THE NON-LINEAR PROBLEM OF RADIATION DIFFUSION IN ONE-DIMENSIONAL PURE SCATTERING MEDIUM. II

H.V.PIKICHYAN

The work is the second part of the author's previous article. Using simple examples of nonlinear problems of a one-dimensional purely scattering medium, the purpose of it is to illustrate the efficiency of using previously introduced auxiliary functions, the so-called linear images (LI) of the reflection-transmission function. At first, an explicit analytical solution was obtained for the nonlinear "direct" problem of determining the fields of the emerging radiation from a "composite" medium consisting of a reflecting surface and a layer of finite thickness with known reflecting-transmitting properties. Then the nonlinear "inverse" problems of determining: a) the external exciting fields according to the data of the radiation emerging from the medium, b) fields on the "inaccessible" boundary of the medium by means of observations of the light regime at one of its boundaries, c) the intensities of radiation traveling in one direction from measurements of fields in the opposite direction, d) some characteristics of the medium by measuring the intensities of radiation incident on it from the outside and emerging through the one of its boundaries, e) fields inside the medium, according to measurements of two-sided radiation fields only at one boundary of the medium. Finally, it is shown that in the nonlinear problem of illumination of a semi-infinite medium the phenomenon of "enlightenment" of the medium does not

occur, whereas the light regime both outside and inside the medium coincides with the solution of the linear problem.

Keywords: *radiation transfer: nonlinear problem*

ЛИТЕРАТУРА

1. О.В.Пикичян, *Астрофизика*, **62**, 437, 2019, (*Astrophysics*, **62**, 387, 2019).
2. В.В.Соболев, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, М., ГИТТЛ, 1956, 391с.
3. Н.И.Минин, *Теория переноса излучения в атмосферах планет*, М., Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988, 264с.
4. О.В.Пикичян, *Астрофизика*, **53**, 285, 2010, (*Astrophysics*, **53**, 251, 2010).
5. Н.Н.Kagiwada, R.Kalaba, S.Ueno, *Multiple scattering processes. Inverse and Direct*, Addison-Wesley Publ.Company, 1975, 337p.
6. Н.Г.Преображенский, В.В.Пикалов, *Неустойчивые задачи диагностики плазмы*, Новосибирск, Наука, 1982, 238с.
7. А.В.Гончарский, А.М.Черепашук, А.Г.Ягола, *Некорректные задачи астрофизики*, М., Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1985, 352с.
8. О.И.Смоктый, А.С.Аниконов, *Рассеяние света в средах большой оптической толщины*, Санкт-Петербург, Наука, 2008, 440с.
9. В.Е.Зуев, И.Э.Наац, *Обратные задачи лазерного зондирования атмосферы*, Новосибирск, Наука, 1982, 242с.
10. В.А.Амбарцумян, *Изв. АН Арм. ССР, Естеств. науки*, **1-2**, 31, 1944.
11. В.А.Амбарцумян, *ДАН Арм. ССР*, **38**, 225, 1964.
12. В.А.Амбарцумян, с.91-104, в сб.: "Теория звездных спектров", под. ред. В.В.Соболева и др., М., Наука, 1966, 388с.
13. М.А.Мнацаканян, с.445-463, в сб.: "Принцип инвариантности и ее приложения", под. ред. М.А.Мнацаканяна и О.В.Пикичяна, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1989, 522с.
14. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, **1**, 285, 1965, (*Astrophysics*, **1**, 152, 1965).
15. О.В.Пикичян, с.48-49, в сб.: "Пятое Росс.-Арм. Совещ. по мат. физ., комплексному анализу и смежным вопросам" (28 сент. - 3 окт., 2014, Ереван, Армения), Тезисы докладов, Изд. НАН РА, Ереван, 2014, 56с.
16. Н.В.Рикичян, *JQSRT*, **183**, 113, 2016.

