АСТРОФИЗИКА

ТОМ 21 ДЕКАБРЬ, 1984 ВЫПУСК 3

УДК: 52—726:533.95:537.84

ОМИЧЕСКАЯ ДИССИПАЦИЯ И РЕЛАКСАЦИЯ БЕССИЛОВЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

А. А. СОЛОВЬЕВ

Поступила 11 октября 1983

Принята к печати 5 июня 1984

Рассмотрен процесс пассивной омической диссипации бессилового магнитного поля в плазме низкого давления с неоднородной проводимостью. Показано, что бессиловое поле ($\mathrm{rot}\,\vec{H} = \alpha\vec{H}$) сохраняет в процессе диссипации свою геометрическую форму, если отношение α^2/σ не зависит от координат. Исследован процесс топологической резистивной релаксации бессилового поля в скрученной магнитной петле к состоянию с наименьшей магнитной энергией. Найдено, что при фиксированном внешнем давлении и заданном моменте сил на концах магнитной петли этому состоянию соответствует однородно скрученный магнитный жгут. Дан критический анализ релаксационной модели Тейлора. Показано, что знакопеременное бессиловое поле с $\alpha = \mathrm{const}$ соответствует минимуму неполной магнитной энергии системы ε_m, а только минимуму отношения ε/K, где K — спиральность поля.

1. *Введение*. Во многих случаях, представляющих астрофизический интерес, космическая плазма низкого давления с находящимся в ней достаточно сильным магнитным полем ($H^2 \gg 8\pi P$) описывается системой МГД-уравнений, в которых всеми объемными силами, кроме магнитной, можно пренебречь:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\vec{H}\times\vec{H}], \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi}\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{rot}\vec{H}\right) + \mathrm{rot}\,[\vec{v}\times\vec{H}], \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) = 0. \tag{3}$$

В этом приближении система уравнений магнитной гидродинамики оказывается замкнутой, если проводимость плазмы $\sigma(\vec{r}, t)$ считается известной.

Пусть характерный пространственный масштаб изменения поля в интересующей нас области равен l. Все процессы, происходящие здесь с магнитным полем, условно можно разделить на три группы, в зависимости от их временных масштабов.

Первая группа — это возмущения типа альвеновских волн, распространяющиеся за счет «упругости» магнитного поля, с характерным временем $t_A \simeq l/v_A$, где $v_A = H/\sqrt{4\pi\rho}$, а ρ и H — некоторые средние значения соответствующих параметров в данной области. Примечательная особенность возмущений этого типа состоит в том, что они полностью сохраняют топологические свойства магнитного поля.

Вторая группа процессов — это чисто диссипативные изменения непотенциального магнитного поля, связанные с выделением джоулева тепла в среде с конечной проводимостью. Их характерное время $t_\sigma = \dfrac{4\pi\sigma l^2}{c^2}$.

Топология магнитного поля при этом, вообще говоря, меняется, хотя в отдельных, частных случаях она может и сохраняться. (Таким случаем является, например, омическая диссипация бессилового магнитного поля с $\alpha = \mathrm{const}$ (см. ниже) в однородной среде).

Наконец, в качестве третьей, промежуточной группы процессов можно выделить, так называемые, резистивные неустойчивости, понижающие магнитную энергию системы за счет топологической перестройки структуры магнитного поля с характерным временем t_r, средним между t_A и t_σ: $t_r \simeq \sqrt{t_A \cdot t_\sigma}$ (см., например, [1, 2]).

Как правило, соотношение характерных времен таково, что

$$t_A \ll t_r \ll t_\sigma. \tag{4}$$

Так для плазмы в области солнечной вспышки, где $\rho \simeq 10^{-13}$ г/см^3, $H \simeq 100$ Э, $l \simeq 10^7$ см (тонкая структура), даже в случае возбуждения аномального сопротивления плазмы ($\sigma \simeq 10^{10}$ с$^{-1}$) имеем (в секундах):

$$0.1 \ll 300 \ll 10^4.$$

Если нас интересуют процессы, происходящие за время порядка t_A и меньше, то диссипативным членом в (2) можно пренебречь, и система уравнений (1)—(3) будет описывать магнитное поле, вмороженное в плазму низкого давления:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\vec{H} \times \vec{H}], \tag{5}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,[\vec{v} \times \vec{H}], \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}\rho) = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим, как изменится система исходных уравнений в другом предельном случае — на временах $t \gtrsim t_\sigma$. Пользуясь порядковыми оценками, из уравнения (1) получим

$$\rho \frac{v_A}{t_\sigma} \simeq \frac{H^2}{4\pi l}\,[\vec{k} \times \vec{h}], \tag{8}$$

где $\vec{k}$ и $\vec{h}$ — единичные векторы в направлениях $\operatorname{rot}\vec{H}$ и $\vec{H}$ соответственно. Учитывая определение v_A, находим:

$$\frac{t_A}{t_\sigma} \simeq [\vec{k} \times \vec{h}] \ll 1. \tag{9}$$

Действуя аналогично, из (2) получим:

$$[\vec{i} \times \vec{h}] \simeq \frac{t_A}{t_\sigma} \ll 1, \tag{10}$$

где $\vec{i}$ — единичный вектор скорости перемещения плазмы.

Таким образом. согласно (9), (10), поведение магнитного поля в масштабах времени $t \gtrsim t_\sigma$ описывается уравнениями:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \alpha(\vec{r}, t)\,\vec{H}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot}\left[\frac{1}{\sigma(\vec{r}, t)} \operatorname{rot}\vec{H}\right]. \tag{12}$$

Физический смысл данного приближения состоит в том, что за время порядка t_σ магнитное поле успевает релаксировать к бессиловому состоянию (11) (время релаксации $\simeq t_A$) и, таким образом, оно, т. е. поле, изменяясь с течением времени за счет диссипации, проходит непрерывную последовательность квазиравновесных бессиловых конфигураций. Плазма ведет себя при этом как пассивная среда, скорость ее перемещения, согласно условию (10), направлена вдоль магнитного поля.

2. *Омическая диссипация бессилового магнитного поля.* Подстановка уравнения (11) в (12) дает:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\vec{H}\right) = -\frac{c^2}{4\pi}\frac{\alpha}{\sigma} \operatorname{rot}\vec{H} - \frac{c^2}{4\pi}\left[\nabla\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \times \vec{H}\right]. \tag{13}$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на $\vec{H}$ и учтем еще раз уравнение бессилового поля (11):

$$\frac{\partial H^2}{\partial t} = -\frac{c^2}{2\pi}\frac{\alpha^2}{\sigma}H^2. \tag{14}$$

Интегрируя, получим:

$$H^2(\vec{r}, t) = H^2(\vec{r}, 0)\exp\left\{-\frac{c^2}{2\pi}\int_0^t \frac{\alpha^2(\vec{r}, t')}{\sigma(\vec{r}, t')}dt'\right\}. \tag{15}$$

Это решение показывает, что распределение магнитной энергии в пространстве сохраняет свою геометрическую форму в том единственном случае, когда отношение α^2/σ не зависит от координат, т. е. от $\vec{r}$. Если же такая зависимость имеет место, то омическая диссипация обязательно изменяет пространственную структуру магнитного поля. Этот вывод является обобщением известной теоремы ([3], стр. 88) о том, что бессиловое поле с $\alpha = \mathrm{const}$ при диссипации в однородной среде ($\sigma = \mathrm{const}$) не меняет своей геометрии.

Обсудим полученный результат применительно к цилиндрически симметричному бессиловому полю. Распишем уравнение (11) по компонентам:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \alpha H_\varphi, \tag{16}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = \alpha H_z. \tag{17}$$

Исключив из этих уравнений α, найдем:

$$\frac{d}{dr}(H_z^2 + H_\varphi^2) = -\frac{2H_\varphi^2}{r}. \tag{18}$$

Из последнего соотношения следует, что для бессиловых полей в цилиндре плотность магнитной энергии играет роль «производящей» функции [4], поскольку она однозначно определяет оба компонента поля и α:

$$H_\varphi(r) = \sqrt{-\frac{r}{2}f'(r)}, \tag{19}$$

$$H_z(r) = \sqrt{f + \frac{r}{2}f'(r)}, \tag{20}$$

$$\alpha = -\frac{3f' + rf''}{4\sqrt{-\frac{r}{2}f'}\sqrt{f+\frac{r}{2}f'}}, \tag{21}$$

где обозначено $f(r) = H_\varphi^2 + H_z^2 \equiv H^2(r)$.

Таким образом, согласно (15),

$$f(r, t) = f(r, o)\exp\left(-\frac{c^2}{2\pi}\int_0^t \frac{\alpha^2[f(r, t')]}{\sigma(r, t')}\right)dt'. \tag{22}$$

Из (19)—(22) следует, что не только распределение плотности магнитной энергии, но и каждый компонент поля и функция $\alpha(r, t)$ могут сохранять при диссипации свою геометрическую форму, т. е. вид зависимости от r, только при условии

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\alpha^2[f(r, t)]}{\sigma(r, t)}\right\} = 0. \tag{23}$$

3. *Резистивная релаксация бессилового поля в цилиндре.* Рассмотрим слабоискривленную скрученную магнитную петлю в атмосфере Солнца с закрепленными концами. Объем петли — $\pi a^2 L$, поле внутри нее будем считать бессиловым. От поперечного расширения петлю предохраняет квазипродольное внешнее магнитное поле, так что на боковой поверхности (при $r = a$) выполняется условие непрерывности магнитного давления:

$$f(a) = H_{ex}^2 = \text{const}. \tag{24}$$

В условиях неизменности внешних параметров (постоянство скручивающих усилий на торцах и внешнего магнитного поля) минимум функционала полной магнитной энергии петли

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\int_0^a f(r)\,rdr \tag{25}$$

достигается на некоторой, вполне определенной функции $f_0(r)$ [5]. На временах порядка t_r релаксация системы к состоянию с $f_0(r)$ происходит за счет резистивных неустойчивостей, изменяющих топологические свойства поля при перезамыкании магнитных силовых линий в малых масштабах.

В лабораторной плазме такого рода процессы хорошо известны (см. обзоры [6, 7]). Основой их теоретического анализа является обычно модель Тейлора [8]. Суть этой модели состоит в том, что состояние с минимальной ε приписывается, в соответствии с теоремой Вольтье [9] (см.

также изложение этой теоремы в [3], стр. 86) бессиловой конфигурации с $\alpha = \text{const}$, которая может быть получена из условия сохранения спиральности поля [6, 8, 11]:

$$K = \frac{1}{c}\int\limits_{(V)} \vec{A}\cdot\vec{H}\,dv = \text{const}, \tag{26}$$

где $\vec{A}$ — векторный потенциал магнитного поля $(\text{rot}\,\vec{A} = \vec{H})$.
В цилиндре условию $\alpha = \text{const}$ отвечает распределение

$$H_z = H(o)\,J_0(\alpha r); \quad H_\varphi = H(o)\,J_1(\alpha r), \tag{27}$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя.

Предполагается, что процесс релаксации, т. е. топологическая перестройка поля, идет с сохранением K до состояния (27) и прекращается с достижением последнего, поскольку минимум магнитной энергии в системе оказывается достигнутым.

Такой подход, однако, не может быть признан удовлетворительным, он вызывает ряд серьезных теоретических возражений.

1. Можно показать, что существует бессиловая конфигурация магнитного поля менее энергоемкая, чем распределение (27). В работе [10] автором путем непосредственного сравнения энергий двух конфигураций поля показано, что в заданном объеме пространства и при равенстве потоков поля однородно скрученный бессиловой жгут обладает меньшей магнитной энергией, чем конфигурация с $\alpha = \text{const}$.

2. Интегральное соотношение $K = \text{const}$ есть строгое следствие условия вмороженности поля в плазму [3]. Нетрудно показать, что

$$\frac{dK}{dt} = -2\int\limits_{(V)}(\vec{E}\cdot\vec{H})\,dV = -2\int\limits_{(V)}(\vec{j}\cdot\vec{H}/\sigma)\,dV. \tag{28}$$

Как видим $dK/dt \to 0$ лишь при $\sigma \to \infty$.

Величина K характеризует степень «сцепленности» магнитного поля [11], поэтому условие $K = \text{const}$, жестко фиксируя сцепленность H_φ и H_z — полей, по существу запрещает всякие перезамыкания магнитных силовых линий. Утверждение Тейлора [8], что условие (26) не ограничивает мелкомасштабных перезамыканий, носит характер лишь общих рассуждений, не подкрепляемых никакими расчетами или оценками. Условие сохранения K используется Тейлором в точном виде, без каких-либо приближений. Решение (27) им взято из работы Вольтье [9], где оно было получено в предположении идеальной вмороженности поля.

3. Бессиловое распределение с $\alpha = \text{const}$ получается у Вольтье как результат взятия лишь первой вариации функционала магнитной энергии, что еще не позволяет говорить о минимуме этой величины [12]. Эта вариация может быть представлена в виде [13]:

$$\delta\varepsilon = -\int\limits_{(V)} \vec{\xi}\,[\text{rot}\,\vec{H}\times\vec{H}]\,dv, \tag{29}$$

где $\vec{\xi}$ — виртуальное смещение элементов плазмы. Отсюда ясно, что условию $\delta\varepsilon = 0$ отвечает весь класс бессиловых конфигураций поля:

$$[\text{rot}\,\vec{H}\times\vec{H}] = 0. \tag{30}$$

Частное бессиловое решение с $\alpha = \text{const}$ получается у Вольтье за счет выбора определенной калибровки потенциала магнитного поля $\vec{A}$ [14]).

4. Уже из самого факта знакопеременности распределения (27) следует, что в такой конфигурации поля релаксация не может полностью прекратиться, поскольку в этом поле существуют так называемые резонансные поверхности, на которых $(\vec{k}\cdot\vec{H}) = 0$, где $\vec{k}$ — волновой вектор возмущения, и, следовательно, могут развиваться резистивные неустойчивости, понижающие магнитную энергию системы [15].

Каждого из приведенных выше аргументов достаточно, чтобы показать теоретическую несостоятельность модели Тейлора, но проблема состоит в том, что, несмотря на явную логическую противоречивость, эта модель неплохо оправдывается в экспериментах. В «диффузных» пинчах, поле которых скручено достаточно сильно $(H_\varphi \approx H_z)$, действительно отмечается появление продольного поля обратного знака на периферии плазменного шнура.

Очевидно, какие-то важные свойства релаксационного процесса модель Тейлора действительно отражает, но ее теоретическая интерпретация должна быть изменена, чтобы устранить отмеченные выше противоречия.

В качестве одного из возможных объяснений можно предложить следующую гипотезу. Рассмотрим отношение $D = \varepsilon/K$, которое по смыслу образующих его величин определяет магнитную энергию, приходящуюся на «единичное сцепление» силовых линий полей H_φ и H_z. Не претендуя на доказательство какой-либо общей теоремы, связанной с минимизацией D, выскажем предположение, что при релаксации в первую очередь развиваются такие перезамыкания силовых линий, которые в наибольшей степени уменьшают величину D. Неустойчивости, ведущие к таким перезамыканиям, должны обладать наибольшим инкрементом, поскольку в каждом единичном акте перезамыкания выделяется и наибольшая магнитная энергия.

По мере того, как наиболее результативные в смысле энерговыделения резонансные поверхности «выгорят», в процесс релаксации включаются резистивные неустойчивости при все меньшем значении параметра D, пока в системе не возникнет такое распределение полей, при котором величина D достигнет некоторого минимума по отношению к другим, близким к данному распределению, бессиловым структурам. Минимальной окажется при этом и скорость релаксационного процесса. Подчеркнем, что абсолютный минимум энергии при этом еще не достигнут, релаксация продолжается, но лишь скорость ее и величина энерговыделения — минимальны. Для короткоживущей лабораторной плазмы последнее условие практически равносильно прекращению процесса, поэтому наблюдаемое в лабораторном эксперименте «послерелаксационное» распределение поля должно соответствовать условию $\delta D = 0$, т. е.

$$\frac{\delta\varepsilon}{K_0} - \frac{\varepsilon_0}{K_0}\frac{\delta k}{k_0} = 0. \tag{31}$$

Обозначив $\lambda = \varepsilon_0/K_0$, мы приходим к известной формулировке задачи Тейлора [6]:

$$\delta(\varepsilon - \lambda K) = 0, \tag{32}$$

которая и дает бессиловое решение (27) с $\alpha = \text{const}$.

Таким образом, традиционную интерпретацию модели Тейлора следует изменить в том отношении, что речь в ней должна идти не о сохранении степени сцепленности полей при их топологической перестройке (это противоречит физической природе релаксационного процесса), а о том, что при релаксации изменяется как ε, так и K, но этот процесс резко замедляется, когда отношение двух указанных величин оказывается минимальным.

Закончив на этом критический анализ модели Тейлора, вернемся к проблеме определения минимизирующей функции $f_0(r)$ для бессиловой магнитной петли в атмосфере Солнца.

Дополнительным условием задачи будет:

1) Условие сохранения полного потока продольного магнитного поля в жгуте:

$$\Phi_z = \int_0^a H_z 2\pi r dr = \text{const} \tag{33}$$

или

$$\int_0^a \sqrt{f + \frac{r}{2} f'}\, r\, dr = \text{const}. \quad (34)$$

2) Требование сохранения в процессе релаксации полного вращающего момента, приложенного к произвольно выделенному поперечному сечению жгута:

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_0^a H_\varphi \cdot H_z \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = M_1 = M_2 = \text{const}, \quad (35)$$

где M_1 и M_2 — вращающие моменты сил на торцах магнитной петли. Сохранение M обеспечивается переносом момента вдоль оси жгута за счет торсионных волн.

Выравнивание скручивающих моментов от сечения к сечению происходит на альвеновских временах [6], поэтому, на основании (4), можно считать, что в процессе релаксации в магнитной петле поддерживается одно и то же значение M.

Используя (19), (20), запишем последнее условие в виде:

$$\int_0^a \sqrt{-\frac{r}{2} f'} \cdot \sqrt{f + \frac{r}{2} f'} \cdot r^2 dr = \text{const}. \quad (36)$$

Наконец, граничное условие задачи (24) перепишем в форме:

$$\delta f(a) = 0. \quad (37)$$

Таким образом, вариационная задача определения $f_0(r)$ сводится к отысканию минимума функционала (25) при дополнительных условиях (34), (36) и граничном условии (37).

Вводя неопределенные множители Лагранжа, запишем:

$$\delta \left\{ \int_0^a f(r)\, r dr - 2\lambda_1 \int_0^a \sqrt{-\frac{r}{2} f'} \cdot \sqrt{f + \frac{r}{2} f'} \cdot r^2 dr + \right.$$

$$\left. + 2\lambda_2 \int_0^a \sqrt{f + \frac{r}{2} f'} \cdot r dr \right\} = 0. \quad (38)$$

Коэффициент «2» в множителях Лагранжа и знак «плюс» перед λ_2 выделены из соображений математического удобства.

Запишем с учетом граничного условия (37) уравнение Эйлера для данного функционала:

$$r-\lambda_1 r^2 \frac{\sqrt{-\frac{r}{2}f_0'}}{\sqrt{f_0+\frac{r}{2}f_0'}}+\frac{\lambda_2 r}{\sqrt{f_0+\frac{r}{2}f_0'}}=$$

$$=\frac{d}{dr}\left[\frac{\lambda_1 r^3 (f_0+rf_0')}{2\sqrt{-\frac{r}{2}f_0'}\cdot\sqrt{f_0+\frac{r}{2}f_0'}}+\frac{\lambda_2 r^2}{2\sqrt{f_0+\frac{r}{2}f_0'}}\right]. \tag{39}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$f_0(r)=\frac{C_1}{1+C_2 r^2}, \tag{40}$$

где C_1 и C_2 — некоторые произвольные константы. Подставляя (40) в (39) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, получаем, что (40) действительно является решением уравнения (39), если

$$\lambda_1=\sqrt{C_2}, \quad \lambda_2=\sqrt{C_1}. \tag{41}$$

Распределение магнитного поля, задаваемое производящей функцией (40), имеет, согласно (19) и (20), следующий вид:

$$H_z(r)=\frac{\lambda_2}{1+(\lambda_1 r)^2}; \quad H_\varphi(r)=\lambda_1 r\cdot H_z(r). \tag{42}$$

Шаг винта магнитной силовой линии в такой конфигурации не зависит от r:

$$s=\frac{2\pi r H_z}{H_\varphi}=\frac{2\pi}{\lambda_1}=\text{const}, \tag{43}$$

т. е. полученное решение описывает однородно скрученный бессиловой магнитный жгут. Константы λ_1 и λ_2 имеют смысл скрученности ($\lambda_1=2\pi/s$) и напряженности поля на оси $H(0)$ соответственно.

Ранее эта же конфигурация бессилового поля была получена автором [5] как результат решения несколько иной вариационной задачи, в которой в качестве дополнительного условия использовалось сохранение полного потока азимутального поля в жгуте:

$$\Phi_\varphi(a)=L\int_0^a H_\varphi dr=\text{const}. \tag{44}$$

Подход, развитый в данной работе, является несколько более общим, поскольку условие (44) связано с требованием $\sigma(r=0)\to\infty$ [5], т. е. запрещает релаксационные процессы на магнитной оси жгута. Условие же (35) определяется постоянством внешних параметров системы (условия на торцах) и, следовательно, сохраняет силу при нарушении вмороженности в любой точке объема скрученной магнитной петли.

Причина, по которой две несколько различных по своей постановке вариационных задачи приводят к одному решению типа (42), состоит в том, что используемые в них дополнительные условия (35) и (44) не накладывают ограничений на степень сцепленности полей. Благодаря этому релаксация поля в обоих случаях может идти до конца, до полного выгорания «резонансных» поверхностей ($\vec{k}\cdot\vec{H}=0$), о которых упоминалось выше, т. е. до исчезновения шира, что и соответствует однородной скрученности поля (подробнее см. [5]).

Таким образом, в солнечной атмосфере состоянию с минимальной магнитной энергией в цилиндрически симметричных бессиловых магнитных структурах соответствует не знакопеременное распределение (27), а однородно скрученное поле (42). Аналогичный вывод может быть получен и для лабораторной плазмы низкого давления, но здесь мы на этом останавливаться не будем.

4. *Обсуждение.* Выше, на основании формулы (22), мы пришли к выводу, что в процессе пассивной омической диссипации поля сохраняет свой геометрический вид лишь такая производящая функция, которая удовлетворяет условию (23). С другой стороны, в предыдущем разделе было показано, что более быстрый процесс резистивной релаксации переводит систему в состояние с $f_0(r)$, задаваемой формулой (40).

В общем случае, когда проводимость плазмы, входящая в (25), определяется не только омическим нагревом, но и другими тепловыми процессами, не зависящими от геометрии поля, соотношения (23) и (40) входят в противоречие, поскольку они соответствуют разным производящим функциям. Это «рассогласование» может рассматриваться в качестве одной из причин вспышечной активности скрученных магнитных петель: медленные диссипативные процессы «уводят» геометрию магнитного поля все дальше от состояния f_0 и тем самым подготавливают почву для развития неустойчивости типа «срыва», быстро возвращающей геометрическое распределение поля к состоянию вида (40). Скачкообразность процесса обеспечивается тем, что при малых отклонениях от $f_0(r)$ малы и инкременты резистивных неустойчивостей. Приведенная ранее порядковая оценка t_r справедлива лишь в том случае, если разность $f(r)-f_0(r)$ не слишком мала по сравнению с $f_0(r)$ [1, 2, 14].

Особый интерес представляет случай, когда можно считать, что проводимость плазмы определяется, главным образом, омическими потерями протекающих по ней токов. В этом случае $\sigma(r, t)$ следует рассматривать не как независимо задаваемую функцию, а выводить ее из соотношений (21) и (23) при известной производящей функции поля — $f_0(r)$ (формула (40)). Это дает:

$$\sigma(r, t) \sim \alpha^2 \sim \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{s}\right)^2\right]^{-2}. \tag{45}$$

С другой стороны, как известно [3], классическая проводимость полностью ионизованной водородной плазмы зависит только от температуры: $\sigma \sim T^{3/2}$. Отсюда получаем, что распределение температуры по сечению магнитной петли, нагрев которой определяется джоулевым теплом, имеет вид:

$$T \sim \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{s}\right)^2\right]^{-4/3}. \tag{46}$$

В случае возбуждения аномальной проводимости плазмы σ зависит только от плотности $\sigma \sim \sqrt{n}$ ([16], стр. 110—111). Тогда:

$$n \sim \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{s}\right)^2\right]^{-4}. \tag{47}$$

Не исключено, что последнее соотношение имеет место в корональных магнитных петлях. Во всяком случае, оно хорошо объясняет весьма резкую концентрацию плазмы в центральной части петли.

5. *Заключение.* Изложенная в работе теория позволяет:

а) качественно анализировать процесс омической диссипации бессиловых магнитных полей в среде с неоднородной проводимостью;

б) теоретически предсказывать магнитную структуру вспышечных бессиловых петель после их релаксации к состоянию с наименьшей магнитной энергией;

в) рассчитывать распределение физических параметров по сечению бессиловой магнитной петли для случая, когда ее нагрев обусловлен, в основном, омическими потерями текущих в ней токов.

Калмыцкий государственный
университет

OHMIC DISSIPATION AND RELAXATION OF THE FORCE-FREE MAGNETIC FIELDS

A. A. SOLOV'EV

The passive ohmic dissipation of the force-free field in the low pressure plasma with inhomogeneous conductivity has been considered. The force-free field (rot $\vec{H}=\alpha\vec{H}$) is shown to be able to keep its geometry if the ratio α^2/σ is independent on coordinates. The process of the topological resistive relaxation of the force-free field in the twisted magnetic flux loop to the state of minimum magnetic energy is also investigated. It is found that the magnetic flux rope is uniformly twisted in this state if the external pressure is fixed and the torque on the ends of the loop is constant. The critical analysis of Taylor's model of relaxation has been given. The α-constant force-free field of variable sign is shown to correspond to the minimum of the ratio ε/k, where k is the spirality of the field, but not to energy minimum—ε_{min}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. P. Furth, J. Killeen, M. N. Rosenbluth*, Phys. Fluids, 6, 459, 1963.
2. *D. S. Spicer*, Solar Phys., 53, 305, 1977.
3. *С. Б. Пикельнер*, Основы космической электродинамики, Наука, М., 1966.
4. *А. Шлютер*, в сб. Управляемые термоядерные реакции, Атомиздат, М., 1960, стр. 215.
5. *А. А. Соловьев*, Солнечные данные, № 5, 80, 1982; № 2, 58, 1983.
6. *Б. Б. Кадомцев*, в кн. «Нелинейные волны», Наука, М., 1979, стр. 131.
7. *Б. Б. Кадомцев, В. Д. Шафранов*, УФН, 139, 399, 1983.
8. *J. B. Taylor*, Phys. Rev. Letters, 33, 1139, 1974.
9. *L. Woltjer*, Proc. Nat. Acad. Sci., 44, 489, 1958.
10. *А. А. Соловьев*, Солнечные данные, № 2, 94, 1972.
11. *Г. Моффат*, Возбуждение магнитного поля в проводящей среде, Мир, М., 1980.
12. *M. M. Molodensky*, Solar Phys., 39, 393, 1974.
13. *В. Д. Шафранов*, в кн. «Вопросы теории плазмы», вып. 2, Атомиздат, М., 1963, стр. 105.
14. *T. Sakurai*, P. A. S. Japan, 31, 209, 1979.
15. *D. S. Spicer*, Solar Phys., 70, 149, 1981.
16. *С. А. Каплан, Б. Н. Цытович*, Плазменная астрофизика, Нука, М., 1972.