УДК 52—64

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ
НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ.
II. СРЕДНЕЕ ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ ФОТОНА В СРЕДЕ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ.

А. Г. НИКОГОСЯН

Поступила 14 февраля 1984

Принята к печати 28 июля 1984

При весьма общих предположениях относительно элементарного акта рассеяния получены уравнения для определения среднего числа рассеяний фотонов в трехмерной полубесконечной среде, когда первичные источники фотонов находятся внутри среды. Отдельно рассматриваются числа рассеяний фотонов, гибнущих в среде, и фотонов, покидающих среду. Выявляется зависимость числа рассеяний от исходных характеристик фотона. Более подробно разбирается случай рассеяния с полным перераспределением по частотам при учете поглощения и излучения в непрерывном спектре. При этом приводится ряд новых формул для среднего числа рассеяний фотонов в полубесконечной и бесконечной средах.

1. *Введение.* В настоящей статье мы продолжим изучение вопроса об определении среднего числа рассеяний, рассмотрев случай, когда первичные источники энергии расположены внутри среды. Как и в первой части работы [1], нас будут интересовать как фотоны, покидающие среду в результате многократных рассеяний, так и фотоны, гибнущие в среде в ходе диффузии.

По аналогии с рассмотренными в [1] для случая внешнего источника излучения функциями $N_+(x, \eta)$ и $N_0(x, \eta)$ среднее число рассеяний, испытываемых каждой из вышеуказанных двух групп фотонов, обозначим соответственно через $N_+(\tau, x, \eta)$ и $N_0(\tau, x, \eta)$. Аргументы введенных функций N_+ и N_0 указывают на то, что исходные фотоны обладают частотой x и движутся на оптической глубине τ в направлении η . Аналогичным образом, среднее число рассеяний, которым подвергаются все фотоны вне зависимости от их дальнейшей „судьбы“, будет описываться функцией $\langle N(\tau, x, \eta) \rangle$. Очевидно, что область изменения углового аргумента η функций $N_+(\tau, x, \eta)$, $N_0(\tau, x, \eta)$ и $\langle N(\tau, x, \eta) \rangle$ охватывает всевозможные направления, в то время как у одноименных функций, зависящих от двух аргументов, — лишь нижнюю полусферу.

Отсюда нетрудно понять, что последние соответствуют частным значениям введенных здесь функций N при $\tau = 0$ и отрицательных τ , например, $N_+(x, \eta) = N_-(0, x, -\eta)$ и т. д.

Если среда содержит первичные источники энергии, то часто представляет интерес среднее число рассеяний, испытываемых всеми фотонами, движущимися в среде независимо от глубины. Указанная величина, понятно, зависит от мощности внутренних источников $\varepsilon(\tau, x, \eta)$ и дается одной из введенных выше функций $N_+(\tau, x, \eta)$, $N_-(\tau, x, \eta)$ и $\langle N(\tau, x, \eta) \rangle$, взвешенной по $\varepsilon(\tau, x, \eta)$. Этот путь определения среднего числа рассеяний обладает тем очевидным преимуществом, что названные функции N не зависят от источников энергии и потому вычисляются раз и навсегда. Однако в дальнейшем мы укажем и на другую возможность вычисления нужных нам средних величин, которая в отдельных случаях может оказаться предпочтительней.

Прежде чем приступить к рассмотрению нашей задачи, следует оговориться, что номера формул из первой части работы спереди будут отмечаться римской цифрой I. Кроме того, для величин, введенных уже в первой статье, используются принятые в ней обозначения и их смысл вновь не разъясняется.

2. Функция Грина. В дальнейшем изложении используется понятие функции Грина уравнения переноса для полубесконечной атмосферы, поэтому в настоящем разделе приведем нужные сведения об этой функции. Напомним, что функция Грина G допускает наглядную вероятностную трактовку: величина $G(\tau', x', \eta'; \tau, x, \eta) dx d\eta$ представляет собой вероятность того, что фотон, обладающий частотой x' и движущийся в полубесконечной среде на оптической глубине τ' в направлении η' в результате многократных рассеяний пересечет поверхность, параллельную границе среды, на глубине τ внутри телесного угла $2\pi d\eta$ в направлении η , обладая при этом частотой, принадлежащей интервалу $(x, x + dx)$. В применении к функции Грина принцип обратимости оптических явлений позволяет написать

$$|\eta'| G(\tau', x', -\eta'; \tau, x, \eta) = |\eta| G(\tau, x, -\eta; \tau', x', \eta'). \quad (1)$$

Функция Грина удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \eta' \frac{\partial G(\tau', x', \eta'; \tau, x, \eta)}{\partial \tau'} + \nu(x') G(\tau', x', \eta'; \tau, x, \eta) = \\ = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', \eta'') G(\tau', x'', \eta''; \tau, x, \eta) dx'' + \\ + |\eta'| \delta(\tau - \tau') \delta(\eta - \eta') \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (2)$$

где δ — дельта-функция Дирака; $v(x) = z(x) + \beta$. Далее вероятностный смысл введенной в [1] функции Y позволяет написать $G(\tau', x', \eta'; 0, x, \eta) = Y(\tau', x', \eta'; x, \eta)$, поэтому последнюю часто называют поверхностной функцией Грина. Наконец, заметим, что двойственная интерпретация функции Y , которая неоднократно использовалась в первой части работы, непосредственно вытекает из соотношения (1). Уравнение для функции Y можно получить непосредственно из уравнения (2), если в последнем положить $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} \eta' \frac{\partial Y(\tau, x', \eta'; x, \eta)}{\partial \tau} + v(x') Y(\tau, x', \eta'; x, \eta) = \\ = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', \eta'') Y(\tau, x'', \eta''; x, \eta) dx'' \end{aligned} \quad (3)$$

(для упрощения записи штрихи при τ опущены).

В качестве граничного условия имеем:

$$Y(0, x', \eta'; x, \eta) = \begin{cases} \delta(x - x') \delta(\eta - \eta'), & \eta' > 0 \\ \eta r(x, \eta; x', -\eta'), & \eta' \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

3. Число рассеяний при диффузии фотонов. Наше обсуждение мы начнем с величины $N_*(\tau, x, \eta)$. Сначала заметим, что уравнению (3) удовлетворяет также величина

$$R_*(\tau, x', \eta) = \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} Y(\tau, x', \eta'; \eta; x, \eta) dx$$

представляющая собой вероятность выхода из среды фотона, обладающего частотой x' и движущегося на глубине τ в направлении η' . Поскольку речь идет о движущемся фотоне, то из сказанного в работе [1] заключаем, что $N_*(\tau, x, \eta) = \lambda \partial \ln R_*(\tau, x, \eta) / \partial \lambda$. Тогда величина $N_*(\tau, x, \eta)$ может быть представлена в виде отношения v_*/R_* , где $v_*(\tau, x, \eta) = \lambda \partial R_*(\tau, x, \eta) / \partial \lambda$. Уравнение для функции $v_*(\tau, x, \eta)$ формально можно получить из (3). Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial v_*(\tau, x, \eta)}{\partial \tau} + v(x) v_*(\tau, x, \eta) = \\ = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') [v_*(\tau, x', \eta') + R_*(\tau, x', \eta')] dx', \end{aligned} \quad (5)$$

причем $\gamma_0(0, x, \eta) = 0$ при $\eta > 0$. Более строгий вывод уравнения (5) основывается на рассуждениях, аналогичных тем, которые проводились в [1] при выводе уравнений (I.16) и (I.29).

Переходя к вопросу об определении $N_0(\tau, x, \eta)$, введем в рассмотрение производящую функцию $Q(\tau, x, \eta; s) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau, x, \eta) s^n$ для величин

$$q_n(\tau, x, \eta) = \int_{-1}^1 \frac{d\eta'}{|\eta'|} \int_{-\infty}^{\infty} u(x') dx' \int_0^{\infty} G_{n-1}(\tau, x, \eta; \tau', x', \eta') d\tau',$$

где $u(x) = (1 - \lambda)\alpha(x) + \beta$. Последние дают вероятность того, что фотон частоты x , движущийся на глубине τ в направлении η , испытает определенное число n рассеяний (акт поглощения также принимается за рассеяние), погибнет где-либо в среде.

Если написать уравнения, аналогичные (2), для функций G_n , то последние приводят к следующему уравнению относительно производящей функции:

$$\begin{aligned} & \eta \frac{\partial Q(\tau, x, \eta; s)}{\partial \tau} + v(x) Q(\tau, x, \eta; s) = \\ & = \frac{\lambda s}{2} \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') Q(\tau, x', \eta'; s) dx' + su(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая в (6) $s=1$, для функции $R_0(\tau, x, \eta) = Q(\tau, x, \eta; 1)$ имеем

$$\begin{aligned} & \eta \frac{\partial R_0(\tau, x, \eta)}{\partial \tau} + v(x) R_0(\tau, x, \eta) = \\ & = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') R_0(\tau, x', \eta') dx' + u(x) \end{aligned} \quad (7)$$

с условием $R_0(0, x, \eta) = 0$ при $\eta > 0$. Величина $R_0(\tau, x, \eta)$, как легко понять, представляет собой вероятность гибели фотона где-либо в среде. Заметим, что величины R_+ и R_0 , как и в [1], описывают противоположные события, поэтому их сумма равна единице. С другой стороны, используя принцип обратимости оптических явлений (1), можно написать

$$R_0(\tau, x, \eta) = I(\tau, x, -\eta), \quad (8)$$

где I представляет собой интенсивность излучения в изотермической атмосфере при мощности первичных источников энергии, равной $u(x)$.

Чтобы вычислить функцию $N_0(\tau, x, \eta)$, представим ее в виде $N_0 = v_0/R_0$, где $v_0(\tau, x, \eta) = \partial Q(\tau, x, \eta; s)/\partial s|_{s=1}$. На основе (6) для функции $v_0(\tau, x, \eta)$ получаем уравнение

$$\eta \frac{\partial v_0(\tau, x, \eta)}{\partial \tau} + v(x) v_0(\tau, x, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') [v_0(\tau, x', \eta') + R_0(\tau, x', \eta')] dx' + u(x). \quad (9)$$

В качестве граничного условия имеем $v_0(0, x, \eta) = 0$ при $\eta > 0$.

Если теперь почленно сложить уравнения (5) и (9), то для функции

$$\langle N(\tau, x, \eta) \rangle = v_*(\tau, x, \eta) + v_0(\tau, x, \eta)$$

будем иметь

$$\eta \frac{\partial \langle N(\tau, x, \eta) \rangle}{\partial \tau} + v(x) \langle N(\tau, x, \eta) \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') \langle N(\tau, x', \eta') \rangle dx' + v(x) \quad (10)$$

с условием $\langle N(0, x, \eta) \rangle = 0$ при $\eta > 0$.

Таким образом, мы заключаем, что интегро-дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют нужные нам величины v_* , v_0 , $\langle N \rangle$, как, впрочем, и функции R_* и R_0 , отличаются друг от друга лишь свободным членом. Вопрос о решении указанного типа задач при общем законе перераспределения по частотам рассматривался в работах [2, 3], поэтому на нем мы здесь не останавливаемся. Однако некоторые общие замечания можно сделать уже из сравнения свободных членов приведенных уравнений. Так, сравнивая (7) и (10), можно заключить, что при $\beta = 0$

$$\langle N(\tau, x, \eta) \rangle = R_0(\tau, x, \eta)/(1 - \lambda), \quad (11)$$

то есть при $\beta = 0$ среднее число рассеяний для фотона, движущегося на глубине τ , весьма просто выражается через интенсивность излучения на той же глубине изотермической атмосферы (ср. с (8)). Полученная в [1] формула (I.34) является частным случаем соотношения (11). Следует особо отметить, что последнее имеет место при любых предположениях относительно элементарного акта рассеяния.

Попытаемся теперь вывести выражение для $\langle N \rangle$ при $\beta \neq 0$. Это проще сделать, если сравнить друг с другом уравнения для функций источ-

ника, соответствующих задачам (7) и (10). Для простоты сграницимся рассмотрением приближения полностью некогерентного рассеяния. В этом случае решение вышеуказанных задач эквивалентно решению следующих интегральных уравнений:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + 1 - \lambda + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_0(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau' \quad (12)$$

и

$$\bar{S}(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) \bar{S}(\tau') d\tau' + 1 + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_0(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau' \quad (13)$$

для функций

$$S(\tau) = 1 - \lambda + \frac{\lambda}{2} A \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} a(x') R_0(\tau, x', \eta') dx';$$

$$\bar{S}(\tau) = 1 + \frac{\lambda}{2} A \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} a(x') \langle N(\tau, x', \eta') \rangle dx'.$$

В уравнениях (12) и (13) мы воспользовались общепринятыми обозначениями:

$$K(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x) E_1[v(x)\tau] dx;$$

$$K_0(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} a(x) E_1[v(x)\tau] dx,$$

а также учли, что при $\tau \rightarrow \infty$ величины R_0 и $\langle N \rangle$ не возрастают быстрее, чем $\exp(\beta\tau)$.

Из сравнения свободных членов уравнений (12) и (13) находим

$$\bar{S}(\tau) = S(\tau) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} \left(1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \lambda, \beta) d\tau' \right), \quad (14)$$

где $\Phi(\tau, \lambda, \beta)$ — так называемая резольвентная функция. Явное выражение для $\Phi(\tau, \lambda, \beta)$ приводится в работе [4] и имеет вид

$$\Phi(\tau, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} e^{-\frac{\tau}{z}} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) F(z, \lambda, \beta) \frac{dz}{zH(z)}. \quad (15)$$

Пользуясь формулами (14) и (15), после ряда несложных, но громоздких выкладок, которые опускаются, получаем

$$\langle N(\tau, x, \eta) \rangle = R_0(\tau, x, \eta) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} \frac{\alpha(x)}{v(x)} \times \\ \times \left[\frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} - \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) F(z', \lambda, \beta) e^{-\frac{\tau}{z+z'}} \frac{z' dz'}{(z+z')H(z')} \right], \quad (16)$$

если $\eta < 0$, и

$$\langle N(\tau, x, \eta) \rangle = R_0(\tau, x, \eta) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} \frac{\alpha(x)}{v(x)} \left[\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{x}}}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) F(z', \lambda, \beta) \left(e^{-\frac{\tau}{z}} - e^{-\frac{\tau}{z+z'}} \right) \frac{z' dz'}{(z-z')H(z')} \right]. \quad (17)$$

если $\eta > 0$.

Формулы (16) и (17) и есть искомые соотношения, связывающие между собой $\langle N(\tau, x, \eta) \rangle$ и $R_0(\tau, x, \eta)$ при $\beta \neq 0$. Касаясь вопроса об определении $R_0(\tau, x, \eta)$, укажем лишь, что, как показывается в [5],

$$S(\tau) = (1-\tilde{\lambda}) \frac{4\pi}{\lambda} P(\tau, \infty, \lambda, \beta) - 2\pi \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) P(\tau, z, \lambda, \beta) dz, \quad (18)$$

причем

$$P(\tau, z, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi} H(z, \lambda, \beta) \left[e^{-\frac{\tau}{z}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{z}} \Phi(\tau', \lambda, \beta) d\tau' \right] \quad (19)$$

есть решение уравнения

$$P(\tau, z, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) P(\tau', z, \lambda, \beta) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}}. \quad (20)$$

Комбинируя явное выражение для резольвентной функции (15) с соотношениями (18) и (19), приходим к заключению, что функция $S(\tau)$, а следовательно и величина $R_0(\tau, x, \eta)$, в конечном счете, также выражаются через функцию $H(z, \lambda, \beta)$.

Если в соотношении (16) положить $\beta = 0$, то последнее переходит в полученную ранее формулу (11). Поскольку при $\tau \rightarrow \infty$, величина $R_0 \rightarrow 1$ (это утверждение с очевидностью вытекает из физического смысла функции $R_0(\tau, x, \eta)$, но в нем можно удостовериться и непосредственно из (18)), то при больших значениях τ имеем

$$\langle N(\tau, x, \eta) \rangle = 1 + \frac{\lambda}{1 - \tilde{\lambda}} \frac{\alpha(x)}{\nu(x)}. \quad (21)$$

Полученное выражение описывает среднее число рассеяний, испытываемых фотоном, движущимся в глубоких слоях полубесконечной атмосферы, или в бесконечной рассеивающей атмосфере. Это число, как и следовало ожидать, не зависит от направления движения исходного фотона. При $x \rightarrow \infty$, то есть в крыльях линии, $\langle N \rangle = 1$. Смысл этого результата также является очевидным. Действительно, фотоны в крыльях линии, будучи в глубоких слоях, не имеют практически возможности претерпеть рассеяние в линии или выйти из среды. Поэтому первое же поглощение происходит в непрерывном спектре, в результате чего фотон гибнет. Наконец, при $\beta = 0$ приходим к хорошо известному результату: $\langle N \rangle = 1/(1 - \lambda)$.

Возвращаясь к введенной выше функции источника $\bar{S}(\tau)$ уравнения (10), заметим, что последняя также характеризует среднее число рассеяний, однако для фотона, поглощенного на глубине τ . При $\beta = 0$ функция $\bar{S}(\tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению (13) со свободным членом, равным единице. Уравнение для $\bar{S}(\tau)$ при $\beta = 0$ впервые было получено В. В. Соболевым в работе [6]. Заслуживает внимания частное значение $\bar{S}(\tau)$ при $\tau = 0$, дающее среднее число рассеяний фотона, поглощенного на границе среды. Пользуясь соотношениями (14), (18) и (19), получаем

$$\bar{S}(0) = \frac{1 + \lambda\beta\delta(\beta)}{\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}} - \frac{\lambda}{2} \beta \gamma_{\infty}(\lambda, \beta), \quad (22)$$

где

$$\delta(\beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\nu(x)} dx, \quad \gamma_{\infty}(\lambda, \beta) = \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) H(z) dz.$$

При $\beta = 0$ вместо (22) имеем $\bar{S}(0) = 1/\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}$. Аналогичным образом можно рассчитать среднее число рассеяний, испытываемых поглощенным фотоном в бесконечной среде. Пользуясь определением функции $\bar{S}(\tau)$ и соотношением (21), находим

$$\bar{S}(\infty) = \frac{1 + \lambda \beta^2(\beta)}{1 - \bar{\lambda}}. \quad (23)$$

С другой стороны, мы видим, что формулами (22) и (23) задаются соответственно нижняя и верхняя границы изменения среднего числа рассеяний фотона, поглощенного в полубесконечной атмосфере.

В заключение настоящего раздела отметим, что после определения $\langle N \rangle$ можно поставить вопрос о нахождении какой-либо одной из величин N_+ и N_0 (или ν_+ и ν_0). Трудность данной задачи связана с тем, что по сравнению с уравнением (10) свободный член уравнения (5) (или уравнения (9)) имеет более сложный вид. Так, задача (5) эквивалентна решению следующего интегрального уравнения:

$$S_+(\tau) = \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) S_+(\tau') d\tau' + g(\tau) \quad (24)$$

для функции

$$S_+(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') \nu_+(\tau, x', \eta') dx', \quad (25)$$

причем

$$g(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') R_+(\tau, x', \eta') dx'.$$

Однако можно показать, что функция $g(\tau)$ представима в виде суперпозиции экспонент. В самом деле, выражая $g(\tau)$ через введенную выше функцию $S(\tau)$ и пользуясь соотношениями (18) и (19), получаем

$$g(\tau) = 1 - S(\tau) = \sqrt{1 - \tilde{\lambda}} \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) F(z, \lambda, \beta) e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{dz}{H(z)} - \\ - \frac{\lambda}{2} \beta \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) H(z) \left[e^{-\frac{\tau}{z}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau - \tau'}{z}} \Phi(\tau', \lambda, \beta) d\tau' \right] dz. \quad (26)$$

Поэтому решение уравнения (24) можно записать в виде

$$S_+(\tau) = 2\pi \sqrt{1 - \tilde{\lambda}} \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) F(z, \lambda, \beta) P(\tau, z, \lambda, \beta) \frac{dz}{H(z)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\pi\beta \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) H(z) \left[P(\tau, z, \lambda, \beta) + \right. \\
 & \left. + \int_0^\tau \Phi(\tau', \lambda, \beta) P(\tau, \tau', z, \lambda, \beta) d\tau' \right] dz. \quad (27)
 \end{aligned}$$

В частном случае, когда $\tau = 0$, имеем

$$S_0(0) = \frac{\tilde{\lambda}}{2\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} + \frac{\lambda}{2}\beta \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) H^2(z) dz. \quad (28)$$

4. *Внутренние источники энергии.* Здесь мы вкратце остановимся на другом способе определения среднего числа рассеяний, который в некоторых случаях может оказаться более удобным. Идея, лежащая в его основе, сходна с идеей, использованной в [7] при нахождении контуров спектральных линий.

Пусть, например, нас интересует среднее число рассеяний, которые испытывает тот или иной фотон, прежде чем покинет среду или погибнет в ней, если среда содержит источники энергии, излучающие изотропно в непрерывном спектре. Указанная величина будет задаваться формулой

$$\langle n_s(x, \eta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) \langle N(\tau, x, \eta) \rangle d\tau \bigg/ \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (29)$$

где $\varepsilon(\tau)$ — мощность первичных источников энергии.

Умножая обе части уравнения (10) на $\varepsilon(\tau)$ и интегрируя по всем глубинам, интересующую нас величину $\langle n_s(x, \eta) \rangle$ удастся связать (как и при определении контуров спектральных линий) с аналогичной величиной, но для мощности первичных источников, равной $d\varepsilon(\tau)/d\tau$. В отдельных случаях, в зависимости от конкретного вида функции $\varepsilon(\tau)$ (скажем, при $\varepsilon(\tau) = \tau^k e^{-\tau}$), указанная связь может привести к значительным упрощениям, позволяя получить решение задачи в замкнутом виде.

Еще проще обстоит дело, если нас интересуют средние характеристики фотонов, покинувших среду. Допустим, необходимо найти среднее число рассеяний, которым подверглись фотоны, обладающие при выходе из среды частотой x и направлением движения η . Пусть, далее, среда содержит источники энергии мощности $\varepsilon_k(\tau, x) = u(x)(\beta\tau)^k/k!$. Поскольку здесь речь идет о движущихся фотонах, то нет необходимости выписывать предварительно уравнение для производящей функции. Для решения задачи

в данном случае достаточно рассмотреть соответствующие уравнения для контуров спектральных линий, приведенные в [7], и воспользоваться описанной выше формальной процедурой дифференцирования по λ . Так, в простейшем случае полного перераспределения по частотам в указанной работе было получено следующее выражение для контура спектральной линии $R_k(x, \eta)$:

$$R_k(x, \eta) = \frac{\lambda}{2} \frac{\varphi_0(x, \eta)}{v(x)} \sum_{m=0}^k a_m \left(\frac{\eta}{v(x)} \beta \right)^{k-m}, \quad (30)$$

где постоянные

$$a_m = \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} R_k(x', \eta') x_0(x') dx'$$

определяются последовательно по формуле

$$a_k = \frac{\lambda}{2\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} \sum_{m=0}^{k-1} a_m \gamma_{k-m}(\lambda, \beta) \beta^{k-m},$$

причем

$$\gamma_k(\lambda, \beta) = \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) H(z) z^k dz.$$

Тогда для среднего числа рассеяний $N_k(x, \eta) = \lambda \partial \ln R_k(x, \eta) / \partial \lambda$, зависящего здесь лишь от комбинации $\eta/v(x) = z$, из (30) будем иметь

$$N_k(z) = 1 + f(z) + \frac{\sum_{m=0}^k \bar{a}_m (\beta z)^{k-m}}{\sum_{m=0}^k a_m (\beta z)^{k-m}}, \quad (31)$$

где постоянные $\bar{a}_k$ определяются из соотношения

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= \frac{2-\tilde{\lambda}}{2(1-\tilde{\lambda})} a_k + \\ &+ \frac{\lambda}{2\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} \sum_{m=0}^{k-1} [\bar{a}_m \bar{\gamma}_{k-m}(\lambda, \beta) + a_m \gamma_{k-m}(\lambda, \beta)] \beta^{k-m}, \end{aligned}$$

при этом

$$\bar{\gamma}_k(\lambda, \beta) = \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) f(z) H(z) z^k dz.$$

5. *Заключительные замечания.* Завершая обсуждение вопроса об определении среднего числа рассеяний, отметим вкратце главные особенности и достоинства предложенного подхода, основанного на применении производящих функций. Описанный метод позволяет выявить область применения формальной процедуры дифференцирования по λ , а с другой стороны, дает возможность определить величину N_0 независимым путем. Тот факт, что для искомых средних величин удастся получить уравнения, является важным, поскольку в рамках данной геометрической модели последние записываются при самых общих предположениях относительно элементарного акта рассеяния (общий закон перераспределения по частотам, анизотропное рассеяние), а переход к различным частным случаям не встречает принципиальных затруднений. Лишь в иллюстративных целях наиболее часто рассматривался случай полного перераспределения по частотам (при $\beta \neq 0$), для которого мы привели ряд новых результатов. Средние величины определяются в расчете на фотон, движущийся (но не поглощенный) на данной глубине, поскольку именно эти величины, будучи взвешенными по мощности первичных источников энергии, дают среднее число рассеяний, когда среда содержит источники излучения. Предлагаемый подход даст возможность выявить также зависимость среднего числа рассеяний от частоты и направления движения первоначального фотона.

Основные идеи работы могут быть использованы и в случае сред с неплоской конфигурацией, а также для неоднородной среды. Кроме того, описанным путем в случае необходимости могут быть найдены вероятностные средние и других дискретных случайных величин, характеризующих процесс диффузии фотонов. Такой величиной может служить, например, среднее число пересечений какого-либо уровня в среде фотонами различных частот. В следующей статье данной серии будет показано, что развитый нами подход естественным образом распространяется и на случай непрерывных случайных величин, описывающих поле излучения.

Автор выражает глубокую признательность академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение полученных здесь результатов.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

THE STATISTICAL DESCRIPTION OF A RADIATION FIELD ON
THE BASIS OF THE INVARIANCE PRINCIPLE.
II. THE MEAN NUMBER OF SCATTERINGS IN THE MEDIUM
CONTAINING ENERGY SOURCES

A. G. NIKOGHOSSIAN

Under general assumptions, concerning the elementary act of scattering, equations for determining the mean number of scatterings of photons in a three-dimensional semi-infinite medium are obtained. The initial sources of radiation, assumed, are within the medium. The numbers of scatterings of photons, absorbed in the medium, and those escaped from it, are considered separately. The dependence of mean number of scatterings on the original characteristics of the photon is revealed. For illustration the case of complete frequency redistribution, including the absorption and emission in a continuum is examined in more detail. In this case, a number of new formulas for the mean numbers of scatterings in a semi-infinite and infinite media are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, 21, 323, 1984.
2. Н. Б. Емибарян, А. Г. Никогосян, Препринт № 4 Бюраканской обс., 1972.
3. Н. В. Уеҗгйварян, А. Г. Никогосян, *JQSRT*, 767, 13, 1973.
4. Д. И. Назирнер, *Астрон. ж.*, 669, 41, 1964.
5. В. В. Иванов, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, М., 1969.
6. В. В. Соболев, *Астрофизика*, 239, 2, 1966.
7. А. Г. Никогосян, Н. А. Нарутхунян, *Astrophys. Space Sci.*, 269, 64, 1979.