АСТРОФИЗИКА

ТОМ 21 ДЕКАБРЬ, 1984 ВЫПУСК 3

УДК: 521.14

ЗАРЯД, МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ И ЭФФЕКТ ЛЕНЗЕ—ТИРРИНГА В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Г. Г. АРУТЮНЯН, В. В. ПАПОЯН

Поступила 13 октября 1983
Принята к печати 15 апреля 1984

Получено решение трех физических задач в рамках обобщенной теории тяготения. Найдены гравитационное поле точечной заряженной массы и выражение вектора потенциала для магнитного поля дипольного характера, получена угловая скорость вовлечения локально-инерциальной системы отсчета во вращение центрального тела.

Введение. На сегодняшний день нет наблюдательных фактов, сколько-нибудь достоверно подтверждающих вывод теории тяготения Эйнштейна (ОТО) о неизбежном коллапсе достаточно массивных небесных тел на конечном этапе их эволюции. С другой стороны, данные астрофизических наблюдений допускают интерпретацию, на основе которой возникла космогоническая концепция Амбарцумяна [1], в которой коллапсу нет места. С этих позиций кажется обоснованной разработка неэйнштейновских вариантов теории тяготения. Одним из таковых является обобщенная теория тяготения (ОТТ). В этой теории гравитационное поле помимо десяти компонент метрического тензора характеризуется также, так называемым, гравитационным скаляром, который не оказывает непосредственного воздействия на вещество и его единственная роль состоит в том, что вместе с веществом и негравитационными полями он определяет геометрию пространства — времени. Разработанная Саакяном с сотрудниками [2] модификация ОТТ согласуется с известными экспериментальными данными и при разумном подборе граничных условий допускает существование компактных объектов с массами порядка галактической, что гармонирует с космогонической концепцией Амбарцумяна.

Вышеизложенное позволяет заключить, что каждый новый результат в обобщенной теории тяготения представляет определенный интерес. В настоящей работе получены решения трех физических задач. Определено гравитационное поле заряженной сосредоточенной массы, найдены обусловленные искривлением пространства поправки для поля магнитного диполя и, наконец, рассмотрено медленное вращение релятивистской конфигурации в ОТТ (аналог эффекта Лензе—Тирринга).

1. Гравитационное поле точечного тела массой m, наделенного зарядом Q, очевидно, статично и обладает сферической симметрией. Если пользоваться изотропными координатами $(x^0, x^1, x^2, x^3) \to (t, \rho, \theta, \varphi)$, то выражение для интервала в рассматриваемом случае следует выбрать в виде

$$ds_0^2 = e^{2\alpha} c^2 dt^2 - e^{2\beta} [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \tag{1.1}$$

Искомая зависимость гравитационного скаляра $\chi = 8\pi G/c^2$, а также α и β от ρ может быть найдена решением следующей системы уравнений ОТТ (см. [2]):

$$\Delta_0 \chi = \frac{2\chi_1^2}{\chi}, \tag{1.2}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\chi}{8\pi c^2} e^{-2\beta} \frac{Q^2}{\rho^4}, \tag{1.3}$$

$$(\alpha + 2\beta)_{11} + \alpha_1 (\alpha_1 - \beta_1) + \beta_1 \left(\frac{2}{\rho} + \frac{\chi_1}{\chi}\right) - \left(\frac{\chi_1}{\chi}\right)_1 -$$

$$- (\zeta - 1) \frac{\chi_1^2}{\chi^2} = \frac{\chi}{8\pi c^2} e^{-2\beta} \frac{Q^2}{\rho^4}, \tag{1.4}$$

$$\Delta\beta + \frac{1}{\rho}\left(\alpha_1 + \beta_1 - \frac{\chi_1}{\chi}\right) = - \frac{\chi}{8\pi c^2} e^{-2\beta} \frac{Q^2}{\rho^4}, \tag{1.5}$$

$$\Delta_0 (\alpha + 2\beta) - \beta_1 (\beta_1 + 2\alpha_1) = \frac{\zeta}{2} \chi_1^2/\chi^2, \tag{1.6}$$

здесь $\Delta_0 = \frac{e^{-\alpha-\beta}}{\rho^2} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 e^{\alpha+\beta} \frac{d}{d\rho}\right)$, $\Delta = \Delta_0 - \frac{\chi_1}{\chi} \frac{d}{d\rho}$, ζ — безразмерный параметр теории, индекс 1 означает дифференцирование по ρ.

Введем $\Phi = \chi_1/\chi$ и $\psi = \alpha_1 + \beta_1 + \frac{2}{\rho} - \Phi$, тогда из (1.2) и комбинации (1.3) + (1.5) — (1.2) получим

$$\Phi_1 + \psi\Phi = 0, \tag{1.7}$$

$$\rho\psi_1 + \rho\psi^2 - \psi = 0. \tag{1.8}$$

Тривиальное $\psi = 0$ решение уравнения Бернулли (1.8) приводит к результату $\chi = \mathrm{const}$, который не выходит за рамки теории тяготения Эйнштейна и поэтому не нуждается в дальнейшем обсуждении. Другое решение (1.8) $\psi = 2\rho/(\rho^2 - \rho_0^2)$ дает

$$\chi = \chi_0 \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0}\right)^{A/\rho_0}, \tag{1.9}$$

где ρ_0 и A — постоянные интегрирования, а χ_0 — предельное значение χ при $\rho \to \infty$, пропорциональное гравитационной постоянной.

Из (1.2), используя (1.9), найдем

$$\alpha + \beta = \ln\left[D \frac{(\rho^2 - \rho_0^2)}{\rho^2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0}\right)^{A/\rho_0}\right], \tag{1.10}$$

что позволяет привести разность уравнений (1.5) и (1.6) к виду

$$\left[\alpha_1 - \frac{A}{\rho^2 - \rho_0^2}\right]^2 + \frac{3A^2 - 4\rho_0^2 - 2A^2\zeta}{(\rho^2 - \rho_0^2)^2} = \frac{\chi_0 Q^2}{8\pi c^2} \frac{e^{-2\beta}}{\rho^4} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0}\right)^{A/\rho_0}.$$

Далее подставим в это выражение β из (1.10) и введем

$$u_1(\rho)/u(\rho) = \frac{A}{\rho^2 - \rho_0^2} - \alpha_1,$$

что дает достаточно простое уравнение для $u(\rho)$:

$$(u_1/u)^2 - b^2/(\rho^2 - \rho_0^2)^2 = d^2/u^2 (\rho^2 - \rho_0^2),$$

где $b^2 = 4\rho_0^2 + 2A^2\zeta - 3A^2$, а $d^2 = \dfrac{\chi_0 Q^2 e^{2\alpha_0}}{8\pi c^2 D^2}$, α_0 и D — новые константы интегрирования.

Дальнейшие выкладки сводятся к стандартной процедуре (см., например, [3]) и приводят в результате к

$$e^{-\alpha} = \frac{e^{-\alpha_0} y_0}{2b} \left(\frac{\rho + \rho_0}{\rho - \rho_0}\right)^{\frac{A-b}{2\rho_0}} \left[1 - \frac{d^2}{y_0^2} \left(\frac{\rho + \rho_0}{\rho - \rho_0}\right)^{b/\rho_0}\right],$$

$$e^{\beta} = D \frac{e^{-\alpha_0} y_0}{2b} \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^2}\right) \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0}\right)^{\frac{A+b}{2\rho_0}} \left[1 - \frac{d^2}{y_0^2} \left(\frac{\rho + \rho_0}{\rho - \rho_0}\right)^{b/\rho_0}\right].$$

Для определения постоянных интегрирования преобразованием

$$\rho = \frac{2be^{\alpha_0}}{Dy_0} \rho', \qquad t = \frac{2be^{\alpha_0}}{y_0} t'$$

приведем метрику к псевдоевклидовому виду. Сравнивая затем постньютоновское приближение найденных выражений при $d = 0$ с известным [4]

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2Gm}{c^2\rho} + 2\sigma\frac{G^2m^2}{c^4\rho^2}\right]dt^2 -$$

$$-\left[1 + 2\delta\frac{Gm}{c^2\rho}\right]\left[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right]$$

и переобозначая постоянные, получим решение рассматриваемой задачи

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{2}q\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{-1/\eta}\left[1 - \frac{\dot{Q}^2}{q^2}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\mu}\right], \tag{1.11}$$

$$e^{\beta} = \frac{1}{2}q(1 - z^2)\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{(a-1)/\eta}\left[1 - \frac{\dot{Q}^2}{q^2}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\mu}\right], \tag{1.12}$$

$$\chi = \chi_0\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{a/\eta}, \tag{1.13}$$

где $z = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\eta Gm}{2c^2\rho}$, $q = 1 + \sqrt{1 + \dot{Q}^2}$, $\eta^2 = (a-1)^2 + a - \frac{1}{2}\zeta a^2$, $\dot{Q}^2 = 4Q^2/Gm^2(a-2)^2$, $\mu = \frac{(2-a)}{\eta}$. Постньютоновские параметры ОТТ $\sigma = 1$, $\delta = 1 - a$. Подчеркнем, что a — постоянная интегрирования.

Полученное решение можно записать в гармонических координатах $x^1 = r(\rho)\sin\theta\cos\varphi$, $x^2 = r(\rho)\sin\theta\sin\varphi$, $x^3 = r(\rho)\cos\theta$, $ds^2 = e^{2\nu}c^2dt^2 - e^{2\lambda}[dr^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$.

Условие гармоничности имеет вид

$$\frac{d}{d\rho}\left(e^{\alpha+\beta}\rho^2\frac{dr}{d\rho}\right) = 2re^{\alpha+\beta}.$$

Поскольку из (1.11) и (1.12) следует, что выражение для χ и $\alpha + \beta$ остается одним и тем же как в случае нейтральной, так и заряженной масс, связь между r и ρ будет в обоих случаях одной и той же. Другими словами, соотношение

$$r = \rho\left(1 + \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) + \frac{a}{\eta}\rho_0, \tag{1.14}$$

полученное в [5] для нейтральной массы, удовлетворяет условию гармоничности и в рассматриваемом случае. Поэтому

$$e^{-\nu} = \frac{1}{2}q\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{1/2\eta}\left[1 - \frac{\dot{Q}^2}{q^2}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{\mu/2}\right],$$

$$e^{\lambda} = \frac{1}{2} q \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)^{\frac{\alpha-1}{2\eta}} \left[1 - \frac{\dot{Q}^2}{q^2} \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)^{\mu/2}\right], \tag{1.15}$$

$$R^2 = 4\gamma_0^2 (\xi^2 - 1),$$

где $\xi = \dfrac{1 + z^2}{2z}$.

Таким образом, (1.15) вместе с (1.13) определяет поле заряженной сосредоточенной массы в гармонических координатах в рамках обобщенной теории тяготения.

Найденное решение можно записать также и в шварцшильдовских координатах

$$ds^2 = e^{2\tilde{\nu}} c^2 dt^2 - e^{2\tilde{\lambda}} d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

с условием гармоничности

$$\frac{d\tilde{r}^2}{dr} + \tilde{r}^2 (\nu' - \lambda') = 2re^{2\lambda}$$

(штрих означает дифференцирование по r), которое дает

$$\begin{gathered} \tilde{r}^2 = fe^{\lambda - \nu}, \qquad f = 8\gamma_0^2 \int \left(\xi + \frac{a}{2\eta}\right) \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)^{a/2\eta} d\xi, \\ e^{\tilde{\nu}} = e^{\nu}, \qquad e^{\tilde{\lambda}} = \frac{Re^{\nu + \lambda}}{re^{\nu + \lambda} + f(\lambda' - \nu')}. \end{gathered} \tag{1.16}$$

2. Для оценки «жизнеспособности» обобщенной теории тяготения и сравнения ее выводов с эйнштейновскими попробуем получить закон вовлечения локально-инерциальной системы отсчета во вращение создающего гравитационное поле тела (эффект Лензе—Тирринга). В теории тяготения Эйнштейна этот эффект проявляется и в случае медленного вращения. Поэтому при его рассмотрении в ОТТ ограничимся линейным по угловой скорости вращения Ω приближением. Другими словами, деформации, вызванные вращением, следовательно и влияние вращения на диагональные компоненты метрического тензора, будем считать пренебрежимо малыми. Тогда в рассматриваемом приближении

$$ds^2 = ds_0^2 - 2\omega\rho^2 e^{2\beta} \sin^2\theta \cdot d\varphi dt, \tag{2.1}$$

причем зависимость λ, α и β от ρ дается (1.11), (1.12) и (1.13) при $Q=0$. Эти выражения позволяют привести уравнение, определяющее $\omega = \omega(\rho)$, к виду

$$z(1 - z^2)\omega_{zz} = 2\omega_z (2z^2 - 2\mu z + 1),$$

решение которого дает

$$\omega = \frac{c_1 t^{2\mu-2}}{64\mu(\mu^2-1)}\left[\mu(\mu+1) - 2(\mu^2-1)t^2 + \mu(\mu-1)t^4\right] + c_2, \quad t = \frac{1-z}{1+z}. \tag{2.2}$$

На больших расстояниях ($\rho \to \infty$)

$$\omega(z\to 0) = \frac{c_1}{3} z^3 - \frac{c_1}{32\mu(\mu^2-1)} + c_2. \tag{2.3}$$

Сравнивая далее получившееся выражение $g_{03}^{\text{ОТТ}}$ с известным [6]

$$g_{03}^{\text{ОТО}}(\rho\to\infty) \simeq \frac{2GJ\Omega}{\rho c^2}\sin^2\theta,$$

окончательно получим:

$$\omega^{\text{ОТТ}} = \frac{c^3}{G^2 m^3}\,\frac{3J\Omega}{4\mu(\mu^2-1)\eta^3}\left\{t^{2\mu-2}\left[\mu(\mu+1) - 2(\mu^2-1)t^2 + \mu(\mu-1)t^4\right] - 2\right\}, \tag{2.4}$$

J — момент инерции центрального тела.

Для сравнения величины $\omega^{\text{ОТТ}}$ с $\omega^{\text{ОТО}}$ $(a = 0,\ \mu = 2)$ оценим значение $\mu = (2-a)/\eta$ в ОТТ. Полученные в экспериментах по запаздыванию радиолокационного сигнала результаты [4] дают $a = 0.00 \pm \pm 0.028$. Что касается возможных значений параметра теории ζ, то, как показано в [2], легко можно усмотреть приближенную связь $\zeta \approx \frac{3}{2} - \frac{1}{a}$. Учитывая также, что вариационный принцип естественнее формулировать для отрицательных значений ζ, приходим к заключению о положительности a. Расчет показывает, что для таких значений a и ζ расхождение в величине скорости вовлечения свободно падающей инерциальной системы отсчета во вращение центрального тела в ОТТ и ОТО не превышает 5 %.

3. В настоящее время принято считать, что интенсивные магнитные поля играют важную роль в проявлениях космической активности различных небесных тел. С этой точки зрения небезынтересно выяснить, как влияет наличие сильного гравитационного поля на величину и распределение магнитного поля. Обычно предполагают, что магнитное поле имеет дипольный характер, что в статическом случае позволяет, во-первых, ограничиться рассмотрением полей, потенциал которых имеет лишь одну неисчезающую компоненту $A_3 \equiv A$, и, во-вторых, считать, что вне распределения масс с магнитным моментом M метрика может быть задана выражением [6]:

$$ds^2 = e^{2\alpha}c^2dt^2 - e^{2\beta}[d\rho^2 + e^{2\gamma}\rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)],$$
$$\alpha = \alpha(\rho, \theta), \quad \beta = \beta(\rho, \theta), \quad \gamma = \gamma(\rho, \theta).$$

Если магнитное поле имеет величину порядка 10^{14} Г, то согласно [7] для решения задачи вполне удовлетворительно квадратичное по M приближение. В этом приближении соответствующее уравнение электродинамики приводится к виду

$$A_{11} + (\alpha_1^0 + \beta_1^0)A_1 + \frac{1}{\rho^2}(A_{22} - A_2 \operatorname{ctg}\theta) = 0.$$

Здесь индексы 1 и 2 обозначают производные по ρ и θ, а выражения для α_1^0 и β_1^0 можно получить дифференцированием (1.12) и (1.13) при $Q = 0$. Введем переменную

$$y = \cos\theta,$$

тогда

$$z^2A_{zz} + \frac{2z}{(z^2-1)}(\mu z - 1)A_z + (1-y^2)A_{yy} = 0. \tag{3.1}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$A(z, y) = z^l\sqrt{1-y^2}\,Y(x)\,\Phi(y),$$
$$x = 4z/(z+1)^2$$

и после разделения переменных получим

$$x(x-1)Y_{xx} + \left[\left(2l + 2 + \frac{\mu}{2}\right)x - 2(l+1)\right]Y_x + l\left(l + 1 + \frac{\mu}{2}\right)Y = 0,$$
$$(1-y^2)\Phi_{yy} - 2_y\Phi_y + \left[l(l+1) - \frac{1}{1-y^2}\right]\Phi = 0, \tag{3.2}$$

откуда следует

$$A(z, y) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l\left(\frac{4z}{(1+z)^2}\right)^l F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{4z}{(z+1)^2}\right)(1-y^2)\frac{dP_l(y)}{dy},$$
$$\alpha = l, \quad \beta = l + \frac{\mu}{2} + 1, \quad \gamma = 2(l+1), \tag{3.3}$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, P_l — полином Лежандра.

На больших расстояниях (3.3) должно совпадать с ньютоновским выражением для потенциала поля магнитного диполя с моментом M, что позволяет оборвать ряд на $l = 1$ и определить постоянную:

$$A = \frac{M}{\eta} \frac{c^2}{2Gm} \frac{4z}{(z+1)^2} F\left(1,\ 2+\frac{\mu}{2},\ 4,\ -\frac{4z}{(z+1)^2}\right) \sin^2\theta. \qquad (3.4)$$

Полученные выражения (1.11)—(1.13); (2.4), (3.4) переходят в соответствующие результаты ОТО, если положить $a \to 0$, $\eta \to 1$, что соответствует $\zeta \to \infty$.

В заключение выражаем глубокую благодарность Г. С. Саакяну и Р. М. Авакяну, а также всем участникам семинара кафедры теоретической физики Ереванского университета за полезные обсуждеия.

Ереванский государственный университет

THE CHARCE, MAGNETIC DIPOLE AND THE LENSE-THIRRING EFFECT IN GENERALIZED THEORY OF GRAVITY

G. H. HARUTYUNYIAN, V. V. PAPOYAN

Three physical problems are solved in the framework of generalized theory of gravity. The gravitational field of the point charged mass and the expression for the vector potential for the dipole magnetic field is found. The angular velocity of the involvment of the local frame into rotation of the central body is evaluated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Нестационарные явления в галактиках, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1968.
2. *Г. С. Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
3. *Э. Камке*, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Наука, М.. 1971.
4. *Р. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер*, Гравитация, Мир, М., 1977.
5. *Г. Г. Арутюнян, В. В. Папоян*, Астрофизика, 21, 175, 1984.
6. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1973.
7. *A. K. Avetisian, M. H. Minasian, V. V, Papoyan*, Astrophys., Space sci., 69, 71, 1980.