

УДК: 524.3—17:510.67

БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ЭЛЛИпсоИДОВ РИМАНА: САМОСОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЛИпсоИДА С «НАКЛОННЫМ» ВРАЩЕНИЕМ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

Поступила 3 марта 1984

Принята к печати 20 мая 1984

Построена новая в своем классе модель эллипсоидальной звездной системы, у которой отсутствует экваториальная плоскость симметрии, перпендикулярная оси вращения. Ориентацией относительно оси вращения модель напоминает некоторые типы жидких эллипсоидов Римана. Исследовано движение частицы и найдено условие касания ею граничной поверхности эллипсоида. Особенностью модели является отличие от нуля некоторых недиагональных компонентов тензора дисперсии скоростей. Модель имеет

два независимых параметра: одно отношение полуосей $\frac{a_2}{a_1}$ и угол ориентации фигуры эллипсоида относительно оси вращения. Эквивалентной последнему является величина

$\eta = \frac{\Omega_3^2}{2A_2} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}, \eta \right)$ модель заполняет две изолированные области. В

частных случаях модель превращается в четыре однопараметрические фигуры равновесия. Две из них не имеют дисперсии скоростей и являются сопряженными друг другу (в смысле теоремы Дедекинда) аналогами жидких эллипсоидов Римана 2-го рода без давления. Две другие фигуры имеют дисперсию скоростей. Это — эллипсоид Фримана заданной формы и одна вырожденная модель с наклонным вращением, у которой в направлении, перпендикулярном главной плоскости с лежащей в ней осью вращения, компонент дисперсии скоростей равен нулю.

1. *Введение.* В последние годы заметно усилился интерес к глобальной динамике галактик. В связи с этим весьма актуальным является создание и исследование самосогласованных моделей бесстолкновительных гравитирующих систем. До недавнего времени были известны только сравнительно простые фигуры с вращением вокруг одной из осей симметрии. Среди них — модели Фримана [1—3]. Изложение этих работ смотрите в монографии [4].

Не обязательно, однако, чтобы вращение фигур равновесия происходило только вокруг осей симметрии. Ярким примером фигур с наклонным положением оси вращения являются жидкие эллипсоиды Римана [5].

Именно существование эллипсоидов Римана ставит в звездной динамике проблему — а могут ли бесстолкновительные фигуры иметь «наклонное» вращение? До недавнего времени задача построения подобных моделей даже не ставилась.

Некоторые стационарные бесстолкновительные модели с «наклонным» вращением построены в работе [6]. Среди них — эллипсоид без дисперсии скоростей. Точнее, построены сразу две таких модели, являющиеся сопряженными друг другу в смысле теоремы Дедекинда [5]. Практическая важность новых моделей заключается в исследовании характерных закономерностей в динамике звездных систем с «наклонным» положением оси вращения [7].

В данной статье создана более общая модель эллипсоида с наклонным вращением, у которой дисперсия скоростей отлична от нуля. Она содержит в себе эллипсоид Фримана и обе модели с наклонным вращением без дисперсии скоростей как предельные частные случаи. В разделе 2 записаны уравнения движения частицы и вводится важное для построения модели понятие «особой» прямой. Общее решение уравнений и движение частицы внутри эллипсоида исследуется в разделах 3—4. В разделе 5 установлено, что данная модель допускает предельный переход к двум эллипсоидам без дисперсии скоростей. Это обстоятельство не тривиально, поскольку характер движения частицы подобный предельный переход сильно изменяет. В связи с этим, весьма поучительно выполнить этот предельный переход не только от решений уравнений движения (или первых интегралов движения), но и от конечных формул, описывающих саму модель с дисперсией скоростей (раздел 9). При этом будет обнаружено, что модель с дисперсией образует две изолированные друг от друга последовательности. Только одна из них допускает предельный переход к модели Фримана (раздел 8). Формулы, описывающие общую модель, получены в разделах 6, 7.

2. Уравнения движения и «особая» прямая. Рассмотрим изолированное скопление свободных, взаимодействующих по закону Ньютона частиц одинаковой массы. Пусть в целом это скопление представляет собой однородный эллипсоид плотности ρ с полуосями a_1, a_2, a_3 . Пусть, далее, прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$, связанная с главными осями эллипсоида, равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega} (0, \Omega_2, \Omega_3)^*$. По законам динамики, если вектор $\vec{\Omega}$ не зависит от времени, ось вращения сохраняет неизменное направление как в инерциальной, так и в собственной

* Если принять все три компонента вектора $\vec{\Omega}$ отличными от нуля, то рассуждения, аналогичные проведенным в тексте, приводят к противоречию.

системах отсчета. Граничная поверхность и потенциал модели описываются формулами

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 = 1, \quad (1)$$

$$\varphi = I - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2 - A_3 x_3^2, \quad (2)$$

причем

$$A_i = \pi G \rho a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(u) (a_i^2 + u)} \quad \text{и} \quad \Delta(u) = \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}. \quad (3)$$

Уравнения движения частицы внутри эллипсоида имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -(2A_1 - \Omega^2) x_1 - 2(\Omega_2 \dot{x}_3 - \Omega_3 \dot{x}_2), \\ \ddot{x}_2 &= -(2A_2 - \Omega_2^2) x_2 - \Omega_2 \Omega_3 x_3 - 2\Omega_3 \dot{x}_1, \\ \ddot{x}_3 &= -(2A_3 - \Omega_3^2) x_3 - \Omega_2 \Omega_3 x_2 + 2\Omega_2 \dot{x}_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее в наших рассуждениях важнейшую роль играет элемент, который мы назовем «особой» прямой. Внутри эллипсоида как фигуры равновесия можно выделить плоскости, в каждой из которых центробежная и гравитационная силы уравниваются в одном из трех направлений собственной системы координат. Уравнения этих трех плоскостей найдем, положив в исходных уравнениях [4] $\dot{x}_i = \ddot{x}_i = 0$,

$$\begin{aligned} (2A_1 - \Omega^2) x_1 &= 0, \\ (2A_2 - \Omega_2^2) x_2 + \Omega_2 \Omega_3 x_3 &= 0, \\ \Omega_2 \Omega_3 x_2 + (2A_3 - \Omega_3^2) x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае, когда дискриминант системы алгебраических уравнений (5) равен нулю, пересечение данных плоскостей определяет такую прямую, в каждой точке которой центробежная и гравитационная силы полностью уравнивают друг друга. Эту прямую, условием существования которой является равенство

$$\Omega_2^2/2A_3 + \Omega_3^2/2A_2 = 1, \quad (6)$$

мы и назовем особой. Особая прямая лежит в главной плоскости Ox_2x_3 и имеет угловой коэффициент

$$k = -\frac{2A_2 - \Omega_2^2}{\Omega_2 \Omega_3} = -\frac{\Omega_2 \Omega_3}{2A_3 - \Omega_3^2} = -\frac{\Omega_2 A_3}{\Omega_3 A_2}. \quad (7)$$

В частности, особая прямая есть и в модели Фримана [2]. Однако там она просто совпадает с одной из главных осей эллипсоида и смысл ее существования не был раскрыт полностью. Основное же свойство особой прямой, как мы покажем ниже, заключается в одновременном существовании с нею линейного интеграла движения системы уравнений (4)*. В кинематике и динамике частиц особая прямая занимает выделенное положение. На особой прямой частицы или всегда покоятся, или пересекают ее только в перпендикулярном к ней направлении.

3. *Общее решение уравнений движения.* Перейдем к новой, связанной с особой прямой, системе отсчета. Для этого поворотом осей Ox_2x_3 на угол $x \leq \frac{\pi}{2}$ совместим ось Ox_3 с особой прямой (рис. 1а). Угол x известен,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\Omega_2 \Omega_3}{2A_2 - \Omega_2^2} = \frac{2A_3 - \Omega_2^2}{\Omega_2 \Omega_3} = \frac{\Omega_3 A_3}{\Omega_2 A_2}. \quad (8)$$

В новой системе отсчета уравнения движения упрощаются,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -(2A_1 - \Omega^2) x_1 + 2\omega_2 \dot{x}_2 - 2\omega_3 \dot{x}_3, \\ \ddot{x}_2 &= -K_2 \dot{x}_2 - 2\omega_3 \dot{x}_1, \\ \ddot{x}_3 &= 2\omega_2 \dot{x}_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\omega_2 = \Omega_2 \cos x + \Omega_3 \sin x > 0; \quad \omega_3 = \Omega_3 \cos x - \Omega_2 \sin x \leq 0, \quad (10)$$

$$K_2 = \frac{\Omega_2 \Omega_3}{\sin x \cos x} = \frac{4A_2 A_3}{\omega_2^2} = \Omega_3^2 \frac{A_3}{A_2} + \Omega_2^2 \frac{A_2}{A_3} = 2(A_2 + A_3) - \Omega^2 > 0. \quad (11)$$

Ограничение $\omega_3 \leq 0$ получит объяснение в разделе 6. Таким образом, угол между положительным направлением особой прямой и вектором $\vec{\Omega}$ ни при каких условиях острым быть не может (рис. 1а).

Один первый интеграл движения (линейный, см. выше) сразу получаем из 3-го уравнения (9)

$$\dot{x}_3 - 2\omega_2 x_1 = \text{const} = 0, \quad (12)$$

причем постоянную интегрирования следует приравнять нулю, чтобы частицы не покидали модель. Из линейного интеграла прямо следует, что

* Справедливо и обратное: если существует интеграл $x_1 + \gamma \dot{x}_2 + \delta \dot{x}_3 = 0$ (γ и δ коэффициенты, находящиеся из условия совместности данного интеграла с уравнениями (4)), существует и особая прямая.

частицы не могут совершать хаотических движений вдоль направлений, параллельных особой прямой и следует ожидать (ниже это подтвердится), что дисперсия скоростей в данном направлении равна нулю.

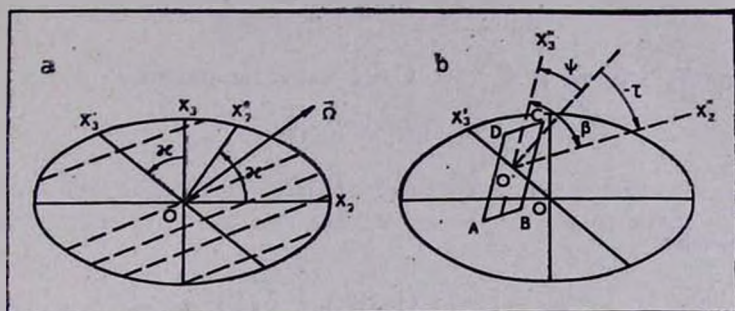


Рис. 1. а) Сечение эллипсоида плоскостью Ox_2x_3 . Ось Ox_3 совпадает с особой прямой. Штрихи-следы пересечения плоскости Ox_2x_3 с плоскостями, в которых в модели без дисперсии скоростей „Б“ движутся частицы. б) Вид с оси $O'x_1$ на фигуру $ABCD$, поверхность которой покрывает частица. Центр симметрии этого параллелограмма (как и аналогичных ему) находится на особой прямой Ox_3 . Штрихами показано направление, перпендикулярное особой прямой и косоугольная система координат $O'x_2'x_3'$. Углы ψ и τ определяют ориентацию осей второй системы.

Подставляя (12) в первое уравнение (9), получим замкнутую систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -K_1 x_1 + 2\omega_3 \dot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 &= -K_2 x_2 - 2\omega_3 \dot{x}_1, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$K_1 = 2A_1 - \Omega^2 + 4\omega_2^2. \quad (14)$$

Искомое решение уравнений (9) есть

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos(\mu t - \varepsilon_1) + C_2 \cos(\nu t - \varepsilon_2), \\ x_2' &= -l_\mu C_1 \sin(\mu t - \varepsilon_1) + l_\nu C_2 \sin(\nu t - \varepsilon_2), \\ x_3 - x_3^{(0)} &= \frac{2\omega_2}{\mu} C_1 \sin(\mu t - \varepsilon_1) + \frac{2\omega_2}{\nu} C_2 \sin(\nu t - \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (15)$$

где C_1 , C_2 и $x_3^{(0)}$ — постоянные интегрирования.

Частоты колебаний μ и ν ($\mu > \nu > 0$)* удовлетворяют биквадратному уравнению

* Без ограничения общности частоты считаем положительными.

$$\xi^4 - (K_1 + K_2 + 4\omega_3^2)\xi^2 + K_1K_2 = 0. \quad (16)$$

По теореме Виета

$$\begin{aligned} \mu^2, \nu^2 &= K_1K_2, \\ \mu^2 + \nu^2 &= K_1 + K_2 + 4\omega_3^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку $K_2 > 0$, то и $K_1 > 0$. Сами частоты равны

$$\begin{aligned} \mu &= (R_1 + R_2)/2, \\ \nu &= (R_1 - R_2)/2, \end{aligned} \quad (18)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} R_1 &= [4\omega_3^2 + (\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2})^2]^{1/2}, \\ R_2 &= [4\omega_3^2 + (\sqrt{K_1} - \sqrt{K_2})^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Коэффициенты распределения колебаний равны

$$l_\mu = \frac{\mu^2 - K_1}{2\omega_3\mu} = \frac{2\omega_3\mu}{\mu^2 - K_2} < 0, \quad (20)$$

$$l_\nu = \frac{K_1 - \nu^2}{2\omega_3\nu} = \frac{2\omega_3\nu}{K_2 - \nu^2} < 0. \quad (21)$$

Легко показать, что

$$l_\mu l_\nu = \frac{K_1}{\mu\nu} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}. \quad (22)$$

Непосредственно из уравнения (16) следует

$$\mu^2 \geq \max(K_1, K_2); \quad \nu^2 \leq \min(K_1, K_2). \quad (23)$$

При $K_1 > K_2$

$$-1 < l_\mu \leq 0; \quad l_\nu < -1. \quad (24)$$

При $K_2 > K_1$

$$l_\mu < -1; \quad -1 < l_\nu \leq 0. \quad (25)$$

Ниже (раздел 9) выяснится, что модель существует только в случае (25).

Имеется четыре интеграла движения:

$$\dot{x}_1 = -\frac{K_1}{2\omega_3}(x_3' - x_3'^{(0)}) + 2\omega_3 x_2', \quad (26)$$

$$I = x_3' - 2\omega_3 x_1 = 0, \quad (27)$$

$$C_1^2 \sigma^2 = (\dot{x}_2 - x_1 \nu l_\nu)^2 + \frac{K_2}{K_1} (\dot{x}_1 l_\nu + \nu \dot{x}_2)^2, \quad (28)$$

$$C_2^2 \sigma^2 = (\dot{x}_2 + x_1 \mu l_\mu)^2 + \frac{K_2}{K_1} (\dot{x}_1 l_\mu - \mu \dot{x}_2)^2, \quad (29)$$

где

$$\sigma = (\mu l_\mu + \nu l_\nu) = K_2 \left(\frac{l_\mu}{\mu} + \frac{l_\nu}{\nu} \right) = \frac{\mu^2 - \nu^2}{2\omega_3}. \quad (30)$$

Далее нам потребуется записать найденные решения и интегралы движения в основной системе координат, связанной с осями эллипсоида,

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos(\mu t - \varepsilon_1) + C_2 \cos(\nu t - \varepsilon_2), \\ x_2 &= -C_1 T_1 \sin(\mu t - \varepsilon_1) + C_2 T_2 \sin(\nu t - \varepsilon_2) - x_3^{(0)} \sin x, \\ x_3 &= C_1 D_1 \sin(\mu t - \varepsilon_1) + C_2 D_2 \sin(\nu t - \varepsilon_2) + x_3^{(0)} \cos x, \end{aligned} \quad (31)$$

где обозначено

$$T_1 = l_\mu \cos x + \frac{2\omega_2}{\mu} \sin x, \quad (32)$$

$$T_2 = l_\nu \cos x - \left(\frac{2\omega_2}{\nu} \right) \sin x,$$

$$D_1 = -l_\mu \sin x + \left(\frac{2\omega_2}{\mu} \right) \cos x, \quad (33)$$

$$D_2 = l_\nu \sin x + \left(\frac{2\omega_2}{\nu} \right) \cos x.$$

Интегралы движения есть

$$I = x_1 + \left(\frac{\Omega_3}{4A_2} \right) \dot{x}_2 - \left(\frac{\Omega_2}{4A_3} \right) \dot{x}_3 = 0, \quad (34)$$

$$x_3^{(0)} = \frac{2\omega_2}{K_1} \dot{x}_1 - x_2 \left(\sin x + \frac{4\omega_2 \omega_3}{K_1} \cos x \right) + x_3 \left(\cos x - \frac{4\omega_2 \omega_3}{K_1} \sin x \right), \quad (35)$$

$$C_1^2 \sigma^2 = \frac{(x_1 T_2 \nu - x_2)^2}{\cos^2 x} + \frac{K_2}{K_1} [\dot{x}_1 l_\nu + \nu (x_2 \cos x + x_3 \sin x)]^2, \quad (36)$$

$$C_2^2 \sigma^2 = \frac{(x_1 T_1 \mu + x_2)^2}{\cos^2 x} + \frac{K_2}{K_1} [\dot{x}_1 l_\mu - \mu (x_2 \cos x + x_3 \sin x)]^2. \quad (37)$$

4. Движение частицы внутри эллипсоида: общий случай. Для исследования этой задачи перейдем к косоугольной системе координат. Оставим направление оси Ox_1 , прежним, но для двух других координат применим преобразование (рис. 1b)

$$\begin{aligned}x_2' &= x_2'' \cos \tau + x_3'' \cos \psi, \\x_3' &= x_3'' - x_2'' \sin \tau + x_3'' \sin \psi,\end{aligned}\quad (38)$$

где

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{2\omega_2}{v l_v} > 0; \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{2\omega_2}{\mu l_\mu} > 0. \quad (39)$$

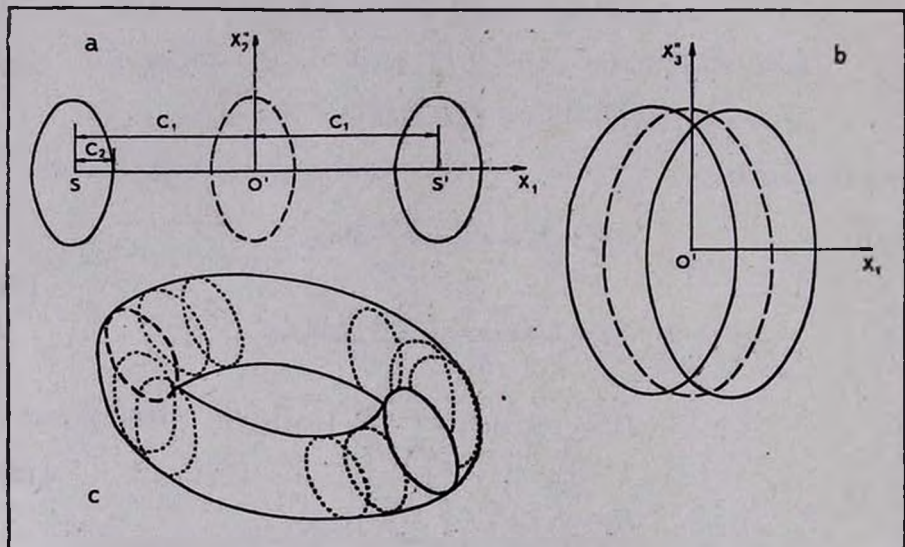


Рис. 2. а) Сечение фигуры, поверхность которой покрывает частица, плоскостями, параллельными осям $O'x_1x_2$. Штриха-сечение при $x_3'' = \pm C_1 \frac{|l_\mu|}{\cos \psi}$; сплошная линия-сечение центральной плоскостью $x_3'' = 0$. б) То же самое, но в плоскости $O'x_1x_3$. Штрихами показаны сечения при $x_2'' = \pm C_2 \frac{|l_v|}{\cos \tau}$, сплошной линией-сечение при $x_2'' = 0$. в) Объемное изображение той же фигуры. Ее основания показаны сплошным и пунктирным малыми эллипсами, а сечения рукавов-точками.

Угол между осями $O'x_2''$ и $O'x_3''$ обозначим $\beta = \psi + \tau$, причем

$$\operatorname{tg} \beta = -(2\omega_2 \sigma) / (2A_1 - \Omega^2) > 0. \quad (40)$$

В новой системе движение частицы описывается сравнительно простыми формулами:

$$\begin{aligned}x_1 &= C_1 \cos(\mu t - \varepsilon_1) + C_2 \cos(\nu t - \varepsilon_2), \\x_2^* &= C_2 \left(\frac{l_\nu}{\cos \tau} \right) \sin(\nu t - \varepsilon_2), \\x_3^* &= -C_1 \left(\frac{l_\mu}{\cos \psi} \right) \sin(\mu t - \varepsilon_1).\end{aligned}\quad (41)$$

Из формул (41) следует, что при движении частица покрывает сложную поверхность четвертого порядка

$$\left[x_1 \pm \sqrt{C_1^2 - \left(\frac{\cos \psi}{l_\mu} x_3^* \right)^2} \right]^2 + \left(\frac{\cos \tau}{l_\nu} x_2^* \right)^2 = C_2^2. \quad (42)$$

Сбоку (с оси $O'x_1$) фигура, ограниченная поверхностью (42), представляет собой параллелограмм (рис. 1b) со сторонами $AB = 2C_2 \frac{|l_\nu|}{\cos \tau}$ и $AD = 2C_1 \frac{|l_\mu|}{\cos \psi}$.

При сечении рассматриваемой фигуры плоскостями, параллельными $O'x_1x_2^*$, обнаружим, что на расстоянии $x_3^* = \pm C_1 \frac{|l_\mu|}{\cos \psi}$ получается эллипс

$$x_1^2 + \left(\frac{\cos \tau}{l_\nu} x_2^* \right)^2 = C_2^2. \quad (43)$$

Промежуточные же сечения демонстрируют раздвоение этого эллипса и при $x_3^* = 0$ расстояние между центрами эллипсов достигает максимального значения $2C_1$ (рис. 2a). Фигура, следовательно, является двухрукавной.

Сечение фигуры плоскостями, параллельными $O'x_1x_3^*$ (рис. 2b), подтверждает существование у нее двух рукавов. В целом, фигура представляет собой как бы два изогнутых эллиптических цилиндра, сращенных друг с другом с противоположных концов (рис. 2c), причем основания ее скошены.

При движении частица навивается на поверхность рукава, доходит до скошенного основания и переходит на другой рукав. При переходе с рукава на рукав направление вращения частицы по рукаву сохраняется! Это совсем не тривиально, ибо в известном случае движения по поверхности тора направление вращения не сохраняется. Как мы убедимся в разделе 8, именно это свойство сохранения вращения позволит сделать предельный переход к модели Фримана.

Движение по рукаву происходит с частотой ν и направлено, если смотреть с положительного конца оси $O'x_3^*$, по часовой стрелке. Это легко видеть из второй и третьей формул (41), т. к. коэффициенты C_2 и

$\left(C_2 \frac{l_\mu}{\cos \tau}\right)$ имеют разные знаки. Переход с рукава на рукав происходит с частотой μ . Если смотреть с положительного конца оси $O'x_2$ это движение происходит против часовой стрелки (т. к. коэффициенты C_1 и $\left(-C_1 \frac{l_\mu}{\cos \psi}\right)$ в (41) имеют одинаковые знаки).

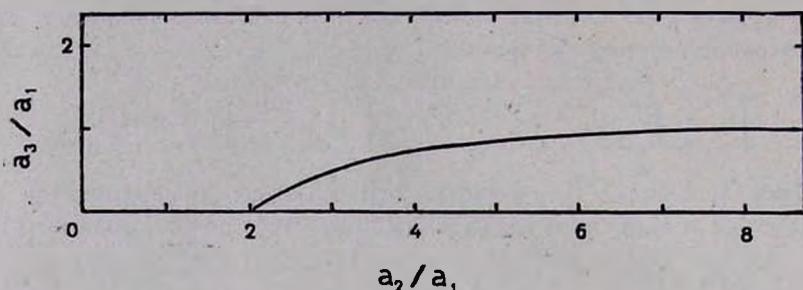


Рис. 3. Кривая на плоскости $\left(\frac{a_2}{a_1}; \frac{a_3}{a_1}\right)$, изображающая последовательности моделей и с дисперсией скоростей, и без нее.

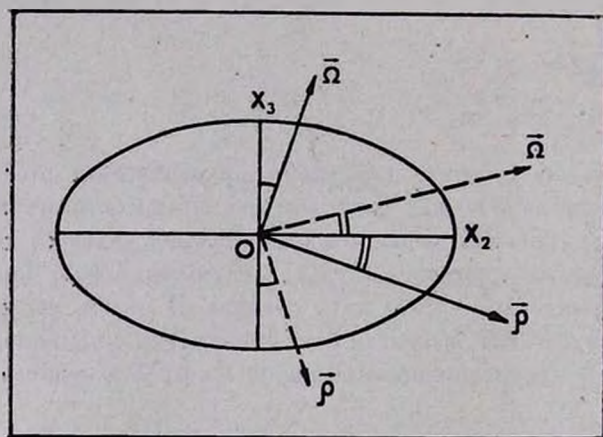


Рис. 4. Схема взаимных расположений векторов $\vec{Q}$ и завихренности $\vec{p} = \text{rot}(\vec{r})$ для сопряженных моделей без дисперсии скоростей. Модель „А“ показана сплошной линией, а модель „Б“ — пунктиром.

Ниже мы убедимся в том, что топология фигуры (42) допускает при определенных условиях превращение этой фигуры или в одиночный эллиптический цилиндр с прямыми образующими (раздел 8), или же в плоский эллипс (раздел 9).

5. Частный случай: две модели без дисперсии скоростей. Прежде чем продолжать исследование модели в общем случае, полезно рассмотреть следующий простой частный случай. В формулах (31) потребуем, чтобы C_1 обратилась в нуль. На другие характеристики модели ограничений не

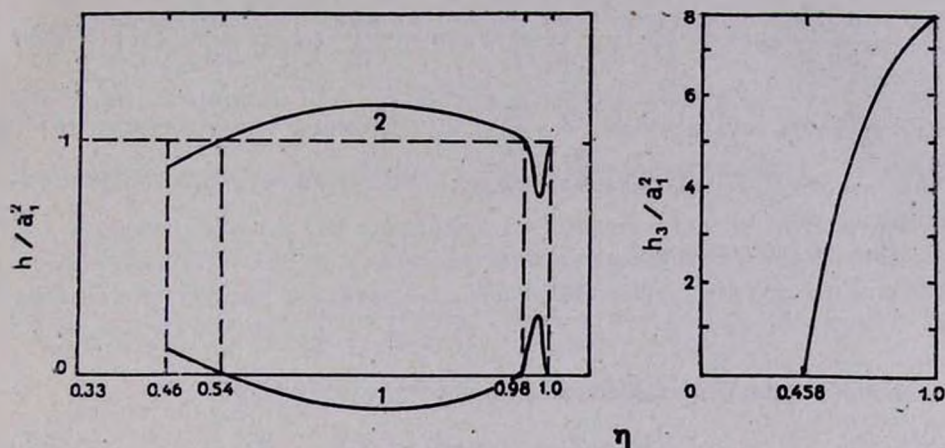


Рис. 5. Кривые на плоскости $\left(\frac{h}{a_1^2}, \eta\right)$: а) цифрами 1 и 2 обозначены функции h_1 и h_2 . Заштрихованы области, допустимые для модели. Графики и значения критических точек η_1, η_2, η_3 вычислены для отношения полуосей $\frac{a_2}{a_1} = 2.8$ (и, как следствие, при $\frac{a_3}{a_1} = 0.359$); б) зависимость величины h_3 от η . В области $\eta < \eta_3$ выполняется $h_3 < 0$.

накладываем. В этом случае движение частицы будет происходить только с частотой ω и, как легко убедиться, траектория есть замкнутый плоский эллипс. Левая часть выражения (36) равна нулю, поэтому поле скоростей внутри модели описывается формулами

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{v}{l_v}(x_2 \cos x + x_3 \sin x), \\ \dot{x}_2 &= T_2 v x_1, \\ \dot{x}_3 &= \frac{4A_3}{\Omega_2} \left(1 + \frac{\Omega_3}{4A_2} T_2 v\right) x_1, \end{aligned} \quad (44)$$

причем третья формула получена с привлечением интеграла (34). Линейность поля скоростей делает очевидным, что условие сохранения граничной поверхности (1) принимает вид

$$\frac{x_1 \dot{x}_1}{a_1^2} + \frac{x_2 \dot{x}_2}{a_2^2} + \frac{x_3 \dot{x}_3}{a_3^2} = 0. \quad (45)$$

Подстановка (44) в выражение (45) дает два условия:

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} \frac{v}{l} \cos x = T_2 v; \quad \frac{a_3^2}{a_1^2} \frac{v}{l} \sin x = \frac{4A_3}{\Omega_2} \left(1 + \frac{\Omega_3}{4A_2} T_2 v \right). \quad (46)$$

Для четырех неизвестных $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_1}$, Ω_2 , Ω_3 имеем три уравнения (6) и (46), поэтому рассматриваемая модель может быть только однопараметрической.

Введем обозначения

$$\eta = \frac{\Omega_3^2}{2A_2}; \quad y = \frac{\pi G \rho}{A_3 - A_2} \quad (47)$$

и запишем известные величины в форме

$$\Omega^2 = 2[A_3 - \eta(A_3 - A_2)], \quad (48)$$

$$\omega_1^2 = \frac{2A_2 A_3}{A_2 + \eta(A_3 - A_2)}. \quad (49)$$

С помощью формул раздела 3 уравнения для неизвестных $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_1}$, η принимают после преобразований вид

$$1 + 2\eta + y + \sqrt{(1+y)^2 - 4\eta y} = \frac{4a_2^2}{a_2^2 - a_3^2}, \quad (50)$$

$$2\eta - 1 - y + \sqrt{(1+y)^2 - 4\eta y} = \frac{4a_1^2}{a_2^2 - a_3^2}. \quad (51)$$

Корнями этих уравнений являются

$$y = \frac{a_2^2 + a_3^2 - 2a_1^2}{a_2^2 - a_3^2}, \quad (52)$$

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2(a_2^2 - a_3^2)} [4a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \pm \sqrt{[4a_1^2 - (a_2 + a_3)^2][4a_1^2 - (a_2 - a_3)^2]}]. \quad (53)$$

Выражение (52) дает уравнение

$$A_3 - A_2 = \pi G \rho \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2 - 2a_1^2}, \quad (54)$$

которое в неявном виде связывает отношения полуосей $\frac{a_2}{a_1}$ и $\frac{a_3}{a_1}$. Решение этого уравнения показано на рис. 3. Задавая независимый параметр модели $\frac{a_2}{a_1}$, область изменения которого суть $2 \leq \frac{a_2}{a_1} < \infty$, по уравнениям (54), (53) и (6) найдем все основные характеристики модели.

Важно заметить, что при одном значении параметра $\frac{a_2}{a_1}$ (а следовательно, и одном отношении $\frac{a_3}{a_1}$), η , согласно формуле (53), имеет два значения (рис. 6). Следовательно, при одной и той же геометрической форме существуют две модели без дисперсии скоростей, с различной ориентацией относительно оси вращения и различными динамическими характеристиками (рис. 4).

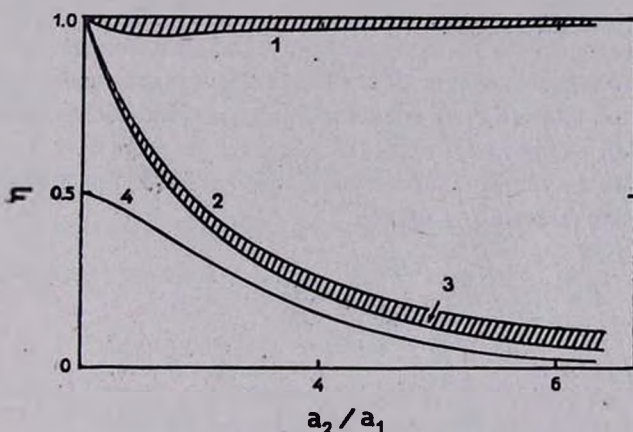


Рис. 6. Кривые на плоскости $\left(\eta, \frac{a_2}{a_1}\right)$, показывающие зависимость от $\frac{a_2}{a_1}$ критических для модели значений параметра η . Цифрами 1, 2, 3, 4 соответственно обозначены функции η_1 , η_2 , η_3 и η_4 . При $\eta = \eta_{1,2}$ обращается в нуль функция h_1 , при $\eta = \eta_3$ — функция h_3 . Кривая η^* делит плоскость на две области: в верхней области выполняется неравенство $k_2 > k_1$, в нижней — $k_1 > k_2$.

Отсутствие дисперсии скоростей и движение частиц по подобным друг другу эллипсам — все это наводит на мысль о возможном существовании для нее гидродинамического аналога. Однако вопрос об аналоге в принципе совершенно не тривиален. Дело в том, что у данной бесстолкновительной модели дисперсии скоростей нет, поэтому у предполагаемого

жидкого аналога давление тоже должно отсутствовать! Единственная жидкая фигура равновесия, у которой равновесие в любой внутренней точке осуществляется только при участии силы гравитации, центробежной и кориолисовой сил — это граничная ветвь эллипсоидов Римана 2-го рода ([5], стр. 192). Эта аналогия между бесстолкновительной моделью и жидкими фигурами равновесия примечательна по многим причинам. Не вдаваясь в подробности, отметим только один факт: для каждого эллипсоида Римана имеется сопряженная с ним фигура равновесия (теорема Дедекинда). Это полностью согласуется с тем, что при одной и той же геометрической форме существуют (см. выше) две бесстолкновительные модели без дисперсии скоростей.

6. *Общий случай: модель с дисперсией скоростей.* В разделе 4 была исследована фигура, поверхность которой покрывает частица. Размещение этой фигуры внутри эллипсоида не может быть произвольным. Геометрический центр ее всегда должен находиться на особой прямой и, кроме того, фигура обязательно должна касаться граничной поверхности модели. Причина в том, что однородная плотность модели с дисперсией скоростей сохранится только при условии касания каждой частицей поверхности модели. Из сказанного ясно, что прежде всего следует найти условие касания. При этом промежуток времени между двумя последовательными касаниями одной какой-либо частицей нас не интересует.

Движение частицы описывается формулами (31) и для координат точек касания справедливо условие

$$R^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1. \quad (55)$$

Удобно ввести относительные координаты $\lambda_i = \frac{x_i}{a_i}$, причем для точек касания

$$\sum_1^3 \lambda_i^2 = 1. \quad (56)$$

При заданных λ_i (т. е. при фиксированной точке касания) формула (55) может быть записана как уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\lambda_1 \frac{x_1}{a_1} + \lambda_2 \frac{x_2}{a_2} + \lambda_3 \frac{x_3}{a_3} = 1. \quad (57)$$

Подставляя формулы (31) в (57) и максимизируя по времени полученное выражение (при этом используем известный факт: максимум выражения $a \sin \theta + b \cos \theta$ равен $\sqrt{a^2 + b^2}$, находим:

$$R'_{\max} = C_1 \left[\frac{a_1^2}{a_1^2} + \left(-a_2 \frac{T_1}{a_2} + a_3 \frac{D_1}{a_3} \right)^2 \right]^{1/2} + \\ + C_2 \left[\frac{a_1^2}{a_1^2} + \left(a_2 \frac{T_2}{a_2} + a_3 \frac{D_2}{a_3} \right)^2 \right]^{1/2} + x_3^{(0)} \left(-a_2 \frac{\sin x}{a_2} + a_3 \frac{\cos x}{a_3} \right). \quad (58)$$

Касание может происходить в любой точке эллипсоида, поэтому в (58) методом максимизации следует избавиться от a_i . Более полный анализ показывает, что результат этой максимизации однозначен только при следующем условии: если записать для краткости (58) в виде

$$R'_{\max} = C_1 F_1(a_1, a_2, a_3) + C_2 F_2(a_1, a_2, a_3) + x_3^{(0)} F_3(a_2, a_3), \quad (59)$$

то функции F_i должны удовлетворять условию

$$h_1 F_1^2 + h_2 F_2^2 + h_3 F_3^2 = \sum_1^3 a_i^2 = 1. \quad (60)$$

Тогда величины h_i должны удовлетворять уравнениям

$$h_1 + h_2 = a_1^2, \quad (61)$$

$$h_1 T_1^2 + h_2 T_2^2 + h_3 \sin^2 x = a_2^2, \quad (62)$$

$$h_1 D_1^2 + h_2 D_2^2 + h_3 \cos^2 x = a_3^2, \quad (63)$$

$$h_1 T_1 D_1 - h_2 T_2 D_2 + h_3 \sin x \cos x = 0. \quad (64)$$

По методу Лагранжа тогда находим

$$R_{\max}^2 = \frac{C_1^2}{h_1} + \frac{C_2^2}{h_2} + \frac{(x_3^{(0)})^2}{h_3} = 1. \quad (65)$$

Выражение (65) и является условием касания частицей поверхности эллипсоида. Эта квадратичная комбинация из интегралов движения должна целиком войти в фазовую функцию распределения (см. ниже).

Из уравнений (61)–(63) находим

$$h_1 = (a_2^2 \cos^2 x + a_3^2 \sin^2 x - a_1^2 l_\mu^2) / (l_\mu^2 - l_\nu^2), \quad (66)$$

$$h_2 = (a_1^2 l_\mu^2 - a_2^2 \cos^2 x - a_3^2 \sin^2 x) / (l_\mu^2 - l_\nu^2), \quad (67)$$

$$h_3 = a_2^2 + a_3^2 - h_1 \left(l_\mu^2 + \frac{4\omega_2^2}{\mu^2} \right) - h_2 \left(l_\nu^2 + \frac{4\omega_2^2}{\nu^2} \right). \quad (68)$$

Но для h_i имеется еще одно уравнение (64). Подставляя в него найденные h_i , после тождественных преобразований (которые изложены ниже), по-

лучим вновь уравнение (54), связывающее между собой два отношения полюсей $\frac{a_2}{a_1}$ и $\frac{a_3}{a_1}$. Это обстоятельство является принципиально важным, т. к. на диаграмме $\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right)$ модель с дисперсией скоростей изображается тем же самым графиком, что и модель без дисперсии скоростей (рис. 3). Следовательно, геометрическая форма всех моделей с наклонным вращением задается одним только отношением полюсей $\frac{a_2}{a_1}$. Тожественность уравнений (64) и (54) доказывается следующим способом. Подставляя в (64) величины (66)–(68) и используя вспомогательные равенства

$$T_1 - D_1 \operatorname{tg} x = \frac{l_\mu}{\cos x}, \quad (69)$$

$$T_2 + D_2 \operatorname{tg} x = \frac{l_\nu}{\cos x}, \quad (70)$$

$$l_\nu^2 - l_\mu^2 = \frac{\sigma}{K_2} \frac{K_1 - K_2}{2\omega_3}, \quad (71)$$

$$T_1 D_2 + T_2 D_1 = \sigma \frac{2\omega_2}{\mu\nu}, \quad (72)$$

$$D_1 l_\mu + D_2 l_\nu = \frac{\sigma}{K_2} \left(2\omega_2 \cos x + \frac{K_1 - K_2}{2\omega_3} \sin x \right), \quad (73)$$

где σ из (30), исходное уравнение преобразовывается к виду

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{K_2} 2\omega_2 \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left\{ a_1^2 - a_2^2 \left(\cos^2 x + \frac{K_1 - K_2}{8\omega_2\omega_3} \sin 2x \right) - \right. \\ \left. - a_3^2 \left(\sin^2 x - \frac{K_1 - K_2}{8\omega_2\omega_3} \sin 2x \right) \right\}. \end{aligned}$$

В общем случае следует приравнять нулю выражение в фигурных скобках. Тогда с помощью соотношения

$$\omega_2\omega_3 = -(A_3 - A_2) \sin 2x \quad (74)$$

получим

$$\frac{K_1 - K_2}{8(A_3 - A_2)} = \cos^2 x - \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_2^2 - a_3^2}. \quad (75)$$

С учетом легко доказываемого равенства

$$\cos^2 \alpha = (1 - \gamma) / [1 + \gamma (A_3/A_2 - 1)], \quad (76)$$

из выражения (75) нетрудно получить требуемое уравнение (54).

Вторым (в дополнение к отношению $\frac{a_2}{a_1}$) независимым параметром модели с дисперсией скоростей можно взять величину γ из (47). Можно убедиться, что задание этих двух параметров достаточно для нахождения всех характеристик модели.

Фазовая функция модели зависит от четырех интегралов движения (34)—(37) и должна иметь следующий вид:

$$f(\vec{r}, \vec{V}) = \text{const} \cdot \hat{v}(I) \cdot \hat{v} [C_1^2/h_1 + C_2^2/h_2 + (x_3^{(0)})^2/h_3 - 1]. \quad (77)$$

Из уравнения (54) следует $a_2 > a_1 \geq a_3$, поэтому для коэффициентов потенциала справедливы неравенства $A_3 \geq A_1 > A_2$. Тогда $\alpha = \arctg \frac{\Omega_3 A_1}{\Omega_2 A_2} \geq \arctg \frac{\Omega_3}{\Omega_2}$, т. е. угол между положительным направлением особой прямой и вектором $\vec{\Omega}$ острым быть не может, и $\omega_3 \leq 0$.

7. Поле скоростей центроидов и тензор дисперсии скоростей. Для практического применения фазовой функции (77) выражение (65) следует преобразовать. Подставим в (65) интегралы движения (34)—(37) и после тождественных преобразований приведем его к виду

$$E = \frac{(x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)^2}{1/k} + \frac{(\dot{x}_2 + p_3 x_1)^2}{(\sigma^2 \cos^2 \alpha h_1 h_2)/a_1^2} + \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}, \quad (78)$$

где введены обозначения

$$p_3 = [T_1 \mu h_1 - T_2 \nu h_3]/a_1^2 > 0, \quad (79)$$

$$q_2 = \frac{1}{k} \left[\frac{K_2}{K_1 \sigma^2} \cos \alpha \left(\frac{\mu l_\mu}{h_2} - \frac{\nu l_\nu}{h_1} \right) + \frac{2\omega_2}{k_1 h_3} \left(\sin \alpha + \frac{4\omega_2 \omega_3}{K_1} \cos \alpha \right) \right] > 0, \quad (80)$$

$$q_3 = \frac{1}{k} \left[\frac{K_2}{K_1 \sigma^2} \sin \alpha \left(\frac{\mu l_\mu}{h_2} - \frac{\nu l_\nu}{h_1} \right) - \frac{2\omega_2}{K_1 h_3} \left(\cos \alpha - \frac{4\omega_2 \omega_3}{K_1} \sin \alpha \right) \right] \geq 0, \quad (81)$$

$$k = \frac{K_2}{K_1 \sigma^2} (l_\mu^2/h_1 + l_\nu^2/h_2) + 4\omega_2^2/(K_1^2 h). \quad (82)$$

В любой внутренней точке эллипсоида справедливо неравенство

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 \leq E \leq 1. \quad (83)$$

Учитывая условие нормировки $\rho = \int f(\vec{r}, \vec{V}) d\vec{V}$, окончательно находим

$$f(\vec{r}, \vec{V}) = \frac{\alpha_1 \rho}{\pi^3 \cos x} V \overline{k/(h_1 h_2)} \cdot \delta [x_3 - x_2 \operatorname{tg} x - (4A_3/\Omega_2) \cdot x_1] \times \\ \times \delta \left[\frac{(x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)^2}{1/k} + \frac{(x_2 + p_2 x_1)^2}{(\sigma^2 \cos^2 x h_1 h_2)/a_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 \right]. \quad (84)$$

С помощью функции (84) можно найти все макроскопические характеристики модели. Усредненные течения описываются формулами

$$\bar{x}_1 = q_2 x_2 + q_3 x_3; \quad \bar{x}_2 = -p_2 x_1; \quad \bar{x}_3 = -p_3 x_1, \quad (85)$$

где

$$p_3 = p_2 \operatorname{tg} x - 4A_3/\Omega_2 \cong 0. \quad (86)$$

Движение центроидов происходит на семействе эллипсоидальных, подобных граничной (1), поверхностях и является плоским. Вследствие (45) имеем

$$q_2/a_1^2 = p_2/a_2^2; \quad q_3/a_1^2 = p_3/a_3^2. \quad (87)$$

Усреднение в пространстве скоростей интеграла (34) дает с помощью (85)

$$(\Omega_3/4A_2)p_2 - (\Omega_2/4A_3)p_3 = 1. \quad (88)$$

Можно доказать, что полный момент вращения модели $\bar{L}_{\text{tot}}$ и вектор $\bar{\Omega}$ коллинеарны друг другу. Это указывает на отсутствие прецессии и нутации модели. Условие коллинеарности имеет вид

$$\Omega_3[(\Omega_2 + q_3) a_3^2 + (\Omega_2 + p_3) a_1^2] = \Omega_2[(\Omega_3 - p_2) a_1^2 + (\Omega_3 - q_2) a_2^2]. \quad (89)$$

Важные выражения p_2 и p_3 можно найти из уравнений (88), (89)

$$p_2 = 2\Omega_3 \left[1 + (1 - \eta) \frac{a_2^2 - a_3^2}{4a_1^2} \right] > 0; \\ p_3 = -2\Omega_2 \left[1 - \eta \frac{a_2^2 - a_3^2}{4a_1^2} \right] \cong 0, \quad (90)$$

а затем с помощью (87) находятся и выражения q_2 и q_3 . Найденные p_2 , p_3 , q_2 , q_3 , конечно, тождественны выражениям (79)—(81) и (86).

Тензор дисперсии скоростей имеет такие компоненты:

$$\begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma^2 h_1 h_2 \cos^2 \kappa)/a_1^2 & (\sigma^2 h_1 h_2 \sin \kappa \cos \kappa)/a_1^2 \\ 0 & (\sigma^2 h_1 h_2 \sin \kappa \cos \kappa)/a_1^2 & (\sigma^2 h_1 h_2 \sin^2 \kappa)/a_1^2 \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}\right). \quad (91)$$

Для нахождения компонентов σ_{32} и σ_{23} принималось во внимание очевидное следствие из интеграла (34): если обозначить пекулярные скорости $v_2 = x_2 - \bar{x}_2$ и $v_3 = x_3 - \bar{x}_3$, то $v_3 = v_2 \cdot \operatorname{tg} \kappa$. Все компоненты σ_{ij} остаются постоянными на семействе поверхностей, подобных граничной, и на последней обращаются в нуль. Подчеркнем, что недиагональные компоненты $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ отличны от нуля.

8. *Предельный переход к модели Фримана.* Эллипсоид Фримана вращается вокруг одной из главных осей симметрии, и величина угловой скорости должна быть такой, чтобы вдоль наибольшей из экваториальных осей дисперсия скоростей обращалась в нуль. Очевидно, эта ось и определяет направление особой прямой. Поэтому нам при предельном переходе надо следить, чтобы особая прямая стремилась совпасть с наибольшей из возможных экваториальных осей. Так как особая прямая лежит в плоскости Ox_2x_3 и для нашей модели $a_2 > a_3$, то к модели Фримана можно перейти только при $\Omega_2 \rightarrow 0$. Тогда ось вращения стремится совпасть с осью Ox_3 , а особая прямая — с осью Ox_2 . Имеем

$$\kappa \rightarrow \frac{\pi}{2}; \quad \omega_3 \rightarrow 0; \quad \omega_2 \rightarrow \Omega_3 = \sqrt{2A_2}; \quad \eta \rightarrow 1. \quad (92)$$

Таким образом, верхний предел для параметра η равен единице. Далее

$$\mu^2 \rightarrow K_2 = 2A_3; \quad \nu^2 \rightarrow K_1 = 2(A_1 + 3A_2). \quad (93)$$

Из формул (20), (21) следует

$$l_\mu \rightarrow -\infty \text{ (как } \cos^{-1} \kappa); \quad l_\nu \rightarrow 0 \text{ (как } \cos \kappa), \quad (94)$$

поэтому, согласно формулам (39), (40)

$$\tau \rightarrow \pi/2; \quad \psi \rightarrow 0; \quad \beta \rightarrow \pi/2.$$

Но из физических соображений ясно, что хотя $l_\mu \rightarrow -\infty$, но произведение $C_1 l_\mu$ в формулах (41) должно быть конечным. Поэтому следует потребовать $C_1 = 0$. При $C_1 = 0$ два рукава фигуры (42) сливаются в один (рис. 2а). Получается эллиптический цилиндр с прямыми образующими, параллельными оси вращения модели. Основания цилиндра не скошены. В двух точках цилиндр касается поверхности модели — это легко видно.

из условия (65) и выражений для h_i (97). Важно отметить, что при слиянии рукавов фактически происходит наложение двух движений по этим рукавам на один итоговый цилиндр. Поскольку же направление вращения на рукавах совпадает (раздел 4), то вращение на итоговом рукаве не исчезает. Само движение частицы описывается формулами, которые получаются при описываемом предельном переходе из формул (31)

$$\begin{aligned}x_1 &= C_2 \cos [\sqrt{2(A_1 + 3A_2)} t - \varepsilon_2], \\x_2 &= -x_3^{(0)} - 2 C_2 [A_2/(A_1 + 3A_2)]^{1/2} \sin [\sqrt{2(A_1 + 3A_2)} t - \varepsilon_2], \\x_3 &= \bar{C}_1 \sin [\sqrt{2A_3} t - \varepsilon_1].\end{aligned}\quad (96)$$

Отсюда следует, что вращение частицы по поверхности цилиндра происходит навстречу вращению эллипсоида. В направлении Ox_3 происходят гармонические колебания. Такое движение частицы и характерно для модели Фримана.

Предельным переходом в соответствующих формулах получим также

$$h_1 \rightarrow 0 \text{ (как } \cos^2 x); \quad h_2 \rightarrow a_1^2; \quad h_3 \rightarrow a_2^2 - a_1^2 \frac{4A_2}{A_1 + 3A_2}, \quad (97)$$

так что коэффициенты поля скоростей будут равны

$$p_2 \rightarrow 2\sqrt{2A_2}; \quad p_3 \rightarrow 0; \quad q_2 \rightarrow 2\sqrt{2A_2} \cdot \frac{a_1^2}{a_2^2}; \quad q_3 \rightarrow 0. \quad (98)$$

Наконец, компоненты тензора дисперсии скоростей равны

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2a_1^2(A_1 + 3A_2)[1 - 4A_2/(A_1 + 3A_2)] \left(1 - \sum_1^3 x_i^2/a_i^2\right); \\ \sigma_{33} &= 2A_3a_3^2 \left(1 - \sum_1^3 x_i^2/a_i^2\right); \quad \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0.\end{aligned}\quad (99)$$

Итак, предельный переход завершен — из модели с наклонным вращением получена модель Фримана с «прямым» вращением и форма последней описывается уравнением (54).

9. *Предельные переходы к сопряженным эллипсоидам без дисперсии скоростей.* Зафиксируем у модели с дисперсией скоростей параметр $\frac{a_2}{a_1}$ и будем уменьшать, начиная с единицы, величину параметра γ . Тогда от модели Фримана перейдем к модели с наклонным вращением. Уменьшая γ , мы одновременно изменяем ориентацию модели относительно оси вращения. При каком-то $\gamma = \gamma_1 < 1$ эта ориентация будет такой же, как и у одной из построенных в разделе 5 моделей без дисперсии скоростей

(рис. 4). Условно назовем ее моделью «А». Точка $\eta = \eta_1$ — критическая, и уменьшать далее параметр η не имеет смысла, пока не выясним детали предельного перехода к модели «А».

Осисвой этого предельного перехода является обращение в нуль всех компонентов тензора (91). Для этого одну из функций h_1 или h_2 следует обратить в нуль. Относительной самостоятельностью обладает только одна из них (см. (61)). Из уравнения (65) известно, что одновременно с h_1 должна обращаться в нуль и C_1 . Вспоминая, что в разделе 5 модели без дисперсии скоростей построены именно при $C_1 = 0$, нам теперь следует потребовать $h_1 = 0$. Тогда из формулы (66) имеем

$$(a_2^2/a_1^2) \cos^2 \alpha + (a_3^2/a_1^2) \sin^2 \alpha = l_v^2. \quad (100)$$

Тогда из (21) и первого из уравнений (46) следует

$$l_v^2 = \frac{K_1 - v^2}{K_2 - v^2} = a_2^2/a_1^2 + \frac{4\omega_2\omega_3}{K_2 - v^2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (101)$$

Из последних двух уравнений с учетом тождества (74) получаем

$$\frac{a_2^2 - a_3^2}{8a_1^2} (K_2 - v^2) = A_3 - A_2. \quad (102)$$

Но

$$K_2 - v^2 = 2[(A_3 - A_2)(2\eta - 1) - \pi G\rho + \\ + \sqrt{(\pi G\rho + A_3 - A_2)^2 - 4\pi G\rho\eta(A_3 - A_2)}],$$

и с учетом (54) уравнение (102) приводится к виду

$$\eta^2 - \eta \frac{4a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 - a_3^2} + \frac{4a_1^2 a_2^2}{(a_2^2 - a_3^2)^2} = 0. \quad (103)$$

Корни этого уравнения совпадают с корнями (53). Этим полностью доказано, что случай $h_1 = 0$, $C_1 = 0$ действительно приводит к двум сопряженным моделям без дисперсии скоростей. Деформация фигуры (42) в этом случае более радикальна, чем при переходе к модели Фримана: два рукава ее не только сливаются в один, но последний еще и сжимается в плоский эллипс. Это видно из обращения в нуль стороны $AD = 2C_1 \frac{|L_\mu|}{\cos \psi}$ параллелограмма на рис. 1b.

Итак, на интервале $\eta_1 \leq \eta \leq 1$ наша модель граничит с моделью Фримана и с моделью „А“ без дисперсии скоростей. Поскольку дисперсия не может быть меньше нуля, переход за критическую точку η_1 невозможен. Но, как мы выяснили, $h_1 = 0$ и при $\eta = \eta_2$, что соответствует уже другой модели без дисперсии скоростей. Последняя со-

пряжена с моделью „А“, и назовем ее моделью „Б“. Для выяснения обстоятельств предельного перехода к модели „Б“ рассмотрим, при фиксированном $\frac{a_2}{a_1}$ графики функций h_1 , h_2 и h_3 (рис. 5). Нас интересуют на плоскости $\left(\frac{h_i}{a_1^2}, \eta\right)$ только те области, где все $h_i \geq 0$.

Видно, что, наряду с уже известным нам интервалом $\eta_1 \leq \eta \leq 1$, имеется еще один $\eta_3 \leq \eta \leq \eta_2$, где модель также существует. При $\eta = \eta_2$ достигается переход к модели „Б“, а при $\eta = \eta_3$ — к специальной модели (также с наклонным вращением), у которой обращается в нуль компонент σ_{11} . В последнем проще всего убедиться из того, что при $\eta \rightarrow \eta_3$ будет $h_3 \rightarrow 0$ и (см. (82)), тогда $x \rightarrow \infty$. Но последнее и означает $\sigma_{11} = 0$. Заметим, что при заданном $\frac{a_2}{a_1}$ значение η_3 находилось численно из (68) при нулевой левой части этого уравнения. Все три критические точки η_1 , η_2 , η_3 зависят от параметра $\frac{a_2}{a_1}$ (рис. 6). Там же изображена и функция η^* , находящаяся из условия $K_1 = K_2$.

$$\eta^* = [2A_2A_3/(A_2 + A_3 - \pi \bar{C}_p) - A_2]/(A_3 - A_2). \quad (104)$$

Видно, что модель существует только при $K_2 > K_1$, а случай $K_2 \leq K_1$ невозможен. Это и имелось в виду в примечании к неравенствам (25).

Итак, мы выяснили, что модель с дисперсией скоростей содержит в себе, как частные случаи, четыре однопараметрические модели. Две из них — это сопряженные модели без дисперсии скоростей; две другие — это модель Фримана и вырожденный случай модели с дисперсией скоростей и наклонным вращением, у которой обращается в нуль компонент дисперсии σ_{11} .

10. *Заключение.* В данной статье проводилось построение равновесных фигур звездных систем и ничего не говорилось об их устойчивости. Исследование на устойчивость будет проведено в следующей статье.

Выражаю благодарность В. А. Антонову за внимание и критическое отношение к работе.

Астрофизический институт
АН КазССР

COLLISIONLESS COUNTERPARTS OF THE RIEMAN ELLIPSOIDS:
THE SELF-CONSISTENT ELLIPSOIDAL MODEL WITH
OBLIQUE ROTATION

B. P. KONDRAT'EV

The new self-consistent stellar dynamics model of rotating barred system is constructed. The case where the angular velocity vector Ω does not coincide with a principal symmetry axis but lies in one of the principal planes of the ellipsoid is considered. The properties of individual stellar orbits are investigated and the condition for preservation of the outer elliptical boundary is derived. The model has two variable parameters: the axial ratio $\frac{a_2}{a_1}$ and the angle of orientation of the ellipsoidal figure about its own rotational axis. There are two disconnected domains in the $\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{\Omega_2^2}{2A_2}\right)$ —plane. In limiting cases, the model is transformed into four models with the only variable parameter $\frac{a_2}{a_1}$. Two of them may be considered as limiting forms of the adjoint Riemann ellipsoids of type II (without pressure). Two other models have velocity dispersion. Among them are we noticeable Freeman's ellipsoid with determining form and a special model with an oblique rotation.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. C. Freeman, M. N. RAS, 133, 47, 1966.
2. K. C. Freeman, M. N. RAS, 134, 1, 1966.
3. K. C. Freeman, M. N. RAS, 134, 15, 1966.
4. В. А. Поляченко, А. М. Фридман, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976.
5. С. Чандрасекар, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
6. Б. П. Кондратьев, Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Структура галактик и звездообразование», Киев, 1983, стр. 15.
7. Б. П. Кондратьев, Астрон. ж., 60, 858, 1983.