

УДК 524.354.6—423

МОДЕЛИ КОНФИГУРАЦИЙ ИЗ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ  
С УЧЕТОМ РОЛИ ГРАВИТАЦИОННОГО ВАКУУМА

Л. Ш. ГРИГОРЯН

Поступила 30 июля 1983

Принята к печати 20 апреля 1984

Рассчитаны модели сверхплотных звездных конфигураций из несжимаемой жидкости на основе представления о существовании специального гравитационного вакуума [1]. В случае сверхплотных небесных тел вакуумные эффекты оказываются важными. Наиболее существенным результатом является заключение о возможности существования равновесных сверхплотных небесных тел с массами, намного превышающими массу Солнца.

1. *Введение.* В работе [1] развито представление о том, что наряду с искривлением пространства—времени гравитация изменяет и физическое состояние вакуума. Вакуум пространства—времени Минковского можно характеризовать тензором энергии—импульса, тождественно равным нулю. В присутствии гравитации, благодаря нарушению однородности и изотропности, изменяется и физическое состояние вакуума, он как бы «деформируется». В результате возникает поле натяжений, описываемое определенным тензором энергии—импульса  $\tau_{ik}$ . В [1] разработана теория гравитационного вакуума для случая центрально-симметрического статического гравитационного поля. Основным в ней является утверждение, что вещество, гравитационный вакуум и метрика пространства—времени неразрывно связаны друг с другом и определяются совместно уравнениями поля.

В соответствии с этими представлениями уравнения Эйнштейна с учетом роли вакуума должны быть записаны в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} (t_{ik} + \tau_{ik}), \quad (1)$$

где  $t_{ik}$ —тензор энергии—импульса звездного вещества. Ниже будем исходить из метрики центрально-симметрического статического поля в виде

$$ds^2 = e^{2\nu} c^2 dt^2 - e^{-2\nu} [d\chi^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (2)$$

где  $\nu$  и  $R$  функции от  $\chi$ . Вне небесного тела имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} e^{2\nu} (-\dot{\nu}^2 + R^2/R^2 - 1/R^2) &= \alpha \varepsilon^*, \\ e^{2\nu} (\nu^2 + \dot{R}/R) &= -\alpha \varepsilon^*, \\ \varepsilon + 4\varepsilon R/R - (3 - 1/\alpha) \varepsilon \dot{\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon^* = 8\pi k\varepsilon/c^4$ , а штрих означает дифференцирование по  $\chi$ . Последнее выражение представляет собой уравнение гидродинамики  $\tau_{ik}^k = 0$  для „вакуумного вещества“.

Тензор  $\tau_{ik}^i$ , очевидно, является диагональным:

$$\tau_0^0 = \varepsilon, \quad \tau_1^1 = -p, \quad \tau_2^2 = \tau_3^3 = -p_{\perp},$$

где  $\varepsilon$  — плотность энергии вакуума, а  $p$  и  $p_{\perp}$  — его давления в радиальном и поперечном направлениях. Следуя [1], будем предполагать, что

$$p = -p_{\perp} = \alpha \varepsilon, \quad (4)$$

где  $\alpha$  — постоянный параметр. В [1] были найдены следующие внешние решения

$$e^{(1-1/\alpha)\nu} = \begin{cases} \frac{4\delta}{\delta-1} \frac{z}{(1+z)^2}, & z = \frac{\sqrt{\delta}-1}{\sqrt{\delta}+1} \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{(\alpha-1)/2\alpha} \quad \text{при } \delta > 0 \\ \left( 1 + \frac{\alpha-1}{4\alpha} \frac{r_g}{\chi + c_1 r_g} \right)^{-2} & \text{при } \delta = 0 \\ \frac{\delta}{\delta-1} \sin^{-2} z, & z = \arctg \sqrt{-\delta} + \frac{\alpha-1}{2\alpha} \arctg y \quad \text{при } \delta < 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $y = r_g / \sqrt{|\delta|} / 2 (\chi + c_1 r_g)$  и  $\alpha \neq 1$ . В случае  $\alpha = 1$

$$\nu = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \ln \frac{1-y}{1+y} & \text{при } \delta > 0 \\ -\frac{r_g}{2(\chi + c_1 r_g)} & \text{при } \delta = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-\delta}} \arctg y & \text{при } \delta < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Наконец,

$$R^2 = (\lambda + c_1 r_g)^2 - \frac{\delta}{4} r_g^2. \quad (7)$$

В (5)—(7)  $r_g$  — гравитационный радиус звезды, а  $c_1$  и  $\delta$  — постоянные интегрирования. В теории Эйнштейна  $\delta=1$ . Приведем также выражение

$$\varepsilon^* = \frac{\delta-1}{\alpha} [\delta + (1-\delta)e^{(1-1/\alpha)v}]^{-1} \left(\frac{dv}{dl}\right)^2 e^{(1-1/\alpha)v} \quad (8)$$

для плотности вакуумной энергии, где  $dl = e^{-v} dr$  — элемент собственной длины в радиальном направлении.

2. *Внутренняя задача.* Для внутренней области имеем следующие уравнения [1]:

$$\begin{aligned} e^{2\tilde{v}} \left( -\tilde{v}'^2 + \tilde{R}'^2/\tilde{R}^2 - 1/\tilde{R}^2 \right) &= P^* + \alpha \varepsilon^*, \\ e^{2\tilde{v}} \left( \tilde{v}'^2 + \tilde{R}''/\tilde{R} \right) &= P^* - \alpha \varepsilon^*, \\ P + [\rho c^2 + (1-\omega)P]\tilde{v}' &= 0, \\ \alpha \varepsilon + [(1-3\alpha)\varepsilon + \omega P]\tilde{v}' + 4\alpha \tilde{R}'/\tilde{R} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{v} = v - v(0), \quad \tilde{R} = R e^{-v(0)/2}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda e^{-v(0)/2},$$

штрих означает дифференцирование по  $\tilde{\lambda}$ ;  $\rho$ ,  $P$  — плотность и давление звездного вещества, а  $\omega$  — некоторая новая безразмерная постоянная, характеризующая «упругость вакуума». Система (9) получается из (1) и уравнения

$$\tau_{i,k}^k = \omega t_{ik} w^k, \quad (10)$$

которое описывает взаимодействие вакуума со звездным веществом,  $w^i$  — «ускорение вакуумного вещества».

В случае вырожденных звездных конфигураций для интегрирования системы (9) необходимо задать уравнение состояния вещества  $\rho = \rho(P)$ , а также постоянные  $\alpha$  и  $\omega$ . Выбор последних, разумеется, не произвольный. Очевидно,  $|\alpha| \sim 1$ . В [1] для  $\omega$  было найдено следующее ограничение:

$$0 \leq \omega \leq 1 + \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\rho c^2}{P}. \quad (11)$$

При  $\omega = 0$  вакуумных эффектов нет, и мы возвращаемся к исходным уравнениям Эйнштейна. В случае  $P \ll \rho c^2$  вакуумные эффекты не существенны, чем обеспечивается корректный переход к нерелятивистскому пределу.

Введем новую функцию  $\mu(\chi)$ , определяемую соотношением

$$\varepsilon^* = - \frac{\mu}{a(1+\mu)} \left( \frac{d\tilde{\nu}}{dl} \right)^2, \quad (12)$$

где  $dl$  — введенный выше элемент собственной длины в радиальном направлении. Подставив выражение (12) в последнее уравнение системы (9), получим

$$\mu = \left( 1 - \frac{1}{a} \right) \tilde{\nu} + \frac{(1+\mu)}{\tilde{\nu}} \{ \omega P^* - \mu [\rho^* c^2 + (3-\omega) P^*] \} e^{-2\tilde{\nu}}. \quad (13)$$

Из очевидных условий:  $\tilde{\nu}(0) = 0$  и конечности  $\mu(0)$  находим

$$\mu(0) = \frac{\omega P_0}{\rho_0 c^2 + (3-\omega) P_0}. \quad (14)$$

Из (11) следует, что  $\mu(0) \geq 0$ . Четвертое уравнение (9) можно представить также в следующем интегральном виде:

$$\varepsilon = - \frac{\omega}{a \tilde{R}^4} \int_0^{\tilde{\nu}} P(y) \tilde{R}^4(y) e^{(3-1/a)(\tilde{\nu}-y)} dy. \quad (15)$$

Сравнение (15) с (12) показывает, что для значений  $\omega$ , допустимых соотношением (11) либо  $\mu \geq 0$ , либо  $\mu < -1$ . Последняя возможность исключается, поскольку она несовместима с условием  $\mu(0) \geq 0$ , поэтому  $\mu(\tilde{\chi}) \geq 0$ .

Подробнее обсудим процедуру сшивки решений. Результаты интегрирования внутренней задачи на поверхности конфигураций, определяемой уравнением  $P(\tilde{\chi}) = 0$ , необходимо сшить с внешними решениями (5)–(7),

что сводится к требованию непрерывности функций  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{R}'$  и  $\varepsilon$ , откуда определяются постоянные  $\nu(0)$ ,  $r_g$ ,  $c_1$  и  $\delta$ . Приравняв выражения для плот-

ности вакуумной энергии  $\epsilon$  во внутренней (12) и внешней (8) областях и

учитывая непрерывность  $\tilde{\nu}$  и  $\tilde{\nu}$  находим

$$\mu_1 = \left( \frac{1}{\delta} - 1 \right) e^{(1-1/\alpha)\nu_1} \quad (16)$$

Здесь и далее индексом «1» обозначены значения величин на поверхности небесного тела. Имея в виду условие  $\mu \geq 0$ , приходим к заключению

$$0 < \delta \leq 1. \quad (17)$$

Это означает, что во внешних решениях (5)—(7) возможности  $\delta \leq 0$  и  $\delta > 1$  не реализуются. Найденное ограничение на  $\delta$  позволяет выписать явную зависимость постоянных  $\nu(0)$ ,  $r_g$ ,  $c_1$  и  $\delta$  от значений функций

$\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{R}$  и  $\mu$  на поверхности звезды. В самом деле, если  $\tilde{\nu}_1$ ,  $\tilde{R}_1$ ,  $\tilde{R}_1$  и  $\mu_1$  уже найдены в результате интегрирования системы уравнений (9), то из внешних решений (5)—(7) видно, что  $\nu_1$  определяется выражением (16), где

$$\sqrt{\delta} = \frac{1-y}{1+y}, \quad y = \mu_1 \frac{\left( \tilde{R}_1 + \sqrt{\tilde{R}_1^2 - 1} \right)^{(1-1/\alpha)}}{(1 + \sqrt{1+\mu_1})^2}, \quad (18)$$

если  $\alpha \neq 1$ , и

$$\nu_1 = -\frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \left( \tilde{R}_1 + \sqrt{\tilde{R}_1^2 - 1} \right), \quad \delta = \frac{1}{1 + \mu_1}, \quad (19)$$

если  $\alpha = 1$ . Зная  $\nu_0 = \nu_1 - \tilde{\nu}_1$ , находим

$$r_g = \frac{2}{\sqrt{\delta}} \tilde{R}_1 \sqrt{\tilde{R}_1^2 - 1} e^{\nu_0}, \quad c_1 = \frac{\tilde{R}_1 \tilde{R}_1 - \tilde{\gamma}_1}{r_g} e^{\nu_0} \quad (20)$$

Таким образом определяются масса, радиус, число барионов и т. д. в зависимости от давления в центре конфигурации. Число барионов можно найти, интегрируя уравнение

$$N = 4\pi n \tilde{R}^2 e^{-3\nu}, \quad (21)$$

где  $n$  — плотность числа барионов.

3. *Конфигурации из несжимаемой жидкости.* Для осуществления описанной программы необходимо задать конкретные значения параметров  $\alpha$  и  $\omega$ . В принципе, они могут быть не одинаковыми для разных конфигураций, т. е. зависеть от  $q_0 = P_0/\rho c^2$ , где  $P_0$  — давление в центре конфигурации. Однако с целью оценки порядка величины вакуумных эффектов ниже будем полагать, что  $\alpha$  и  $\omega$  не зависят от  $q_0$  и рассчитаем модели конфигураций из несжимаемой жидкости для ряда их значений, соблюдая при этом вышеприведенное ограничение на  $\omega$ .

Результаты численных расчетов приведены на рис. 1—3. На первом из них изображена зависимость гравитационного радиуса  $r_g$  от параметра  $q_0$  для ряда значений  $\alpha$  и  $\omega$ . На всех кривых имеется ограничение, связанное с тем, что при  $q_0 = 1$  скорость звука равна скорости света [2], и поэтому значения  $q_0 > 1$  лишены физического смысла. Но реализуется, по-видимому, более жесткое условие  $q_0 \leq 1/3$  в соответствии с сложившимся представлением об асимптотической свободе кварков в плазме в пределе ультрарелятивистских плотностей. На кривых с  $\omega > 1$  конфигурации с  $q_0 > 1/(\omega - 1)$  не приведены, поскольку в них давление имеет ненормальное поведение: возрастает с удалением от центра звезды. На рис. 2, 3 представлены кривые, изображающие зависимости  $r_g$  от числа барионов  $N$  и истинного радиуса звезды  $l$  от  $r_g$ , соответствующие ряду конфигураций рис. 1. Из приведенных рисунков видно, что для конфигураций с  $q_0 \ll 1$  вакуумные эффекты ничтожно малы. Они становятся заметными лишь при  $q_0 \sim 1$ . Ситуация качественно иная для конфигураций с  $q_0 \rightarrow 1/(\omega - 1)$  и  $0 < \alpha < 1/(\omega - 1)$ . В этих случаях (кривые с  $\omega = 2$ ,  $0 < \alpha < 1$  и с  $\omega = 4$ ,  $0 < \alpha < 1/3$ ) существуют конфигурации со сколь угодно большими значениями массы, числа барионов и истинного радиуса. Для них  $l/r_g \rightarrow 0$  при  $q_0 \rightarrow 1/(\omega - 1)$  и  $0 < \alpha < 1/(\omega - 1)$ , а отношение истинной длины экваториальной окружности звезды к  $r_g$  стремится к const. Имея в виду принципиальное значение этих результатов, считаем необходимым подтвердить их теоретическими оценками.

Выясним, допускает ли система уравнений (9), (21) решения со сколь угодно большими значениями гравитационного радиуса. Для таких конфигураций возможны два случая: либо  $\bar{v}_1 \rightarrow \infty$ , либо — нет. Напомним, что индексом «1» мы обозначаем значение функций на поверхности. Можно убедиться, что второй случай не совместим с уравнениями (9), (21). Это и понятно, поскольку для конфигураций с  $r_g \rightarrow \infty$  разность «потенциалов»  $\bar{v}_1 = v_1 - v(0)$  не может оставаться конечной. Остается рассмотреть первый случай, когда  $\bar{r}_1, \tilde{R}_1, \bar{v}_1 \rightarrow \infty$ . Почти во всем объеме таких конфигураций давление практически остается постоянным, и только вбли-

зи поверхности оно должно сравнительно быстро спадать до нуля. Из третьего уравнения системы (9) следует, что это возможно только при

$$q_0 \rightarrow \frac{1}{\omega - 1}, \quad \omega > 1. \quad (22)$$

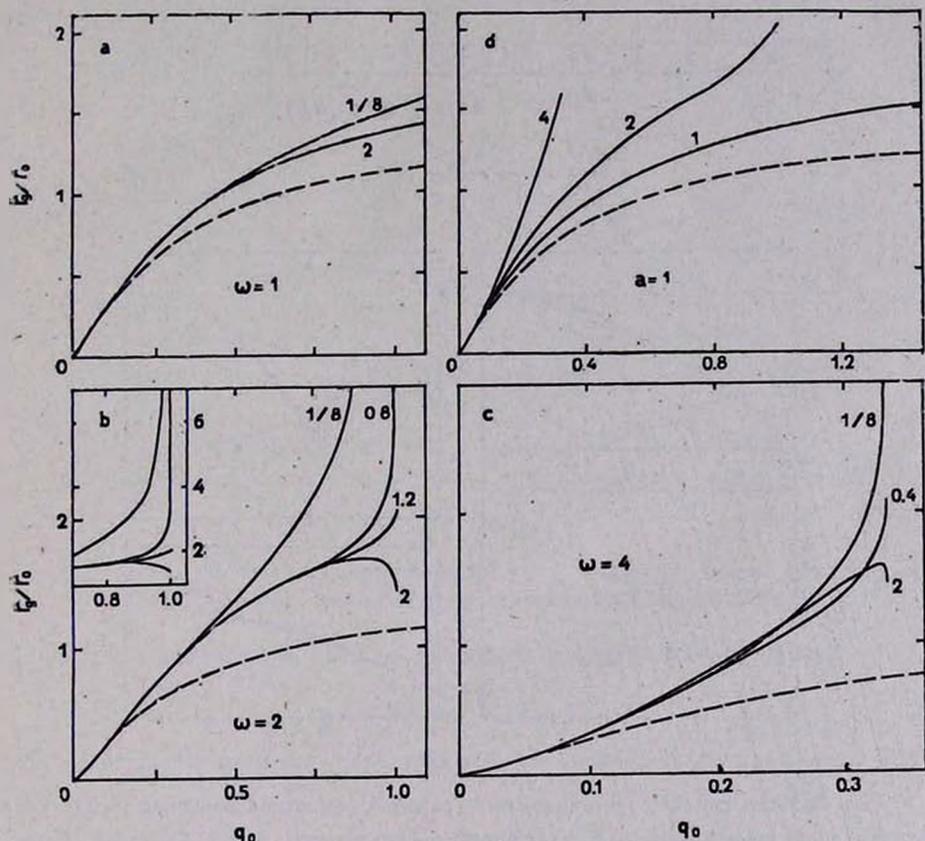


Рис. 1. Зависимость гравитационного радиуса  $r_g$  конфигураций из несжимаемой жидкости от параметра  $q_0 = P_0/\rho c^2$  для разных значений  $a$  и  $\omega$ ,  $r_0 = c/\sqrt{8\pi k\rho}$ . Пунктирные линии соответствуют конфигурациям по теории Эйнштейна ( $\omega = 0$ ). Числа на кривых рис. 1а, б, с указывают значения  $a$ . Рис. 1д соответствует  $a = 1$  и разным значениям  $\omega$ , указанным на кривых. На рис. 1б в левом верхнем углу приведены последние части кривых в крупном масштабе.

За исключением упомянутого тонкого поверхностного слоя, в объеме звезды  $P \approx P_0$ , и поэтому уравнения (9), (21) можно записать в следующем виде:

$$2z = y \frac{dz}{dy} + \frac{8y^2(y+z)}{1+\mu} \left( \frac{d\bar{v}}{dy} \right)^2,$$

$$\frac{dz}{dy} \approx 2yP_0^* e^{-2\bar{v}},$$

$$\frac{d\mu}{dy} \approx \frac{a-1}{a} \mu \frac{d\bar{v}}{dy} + \frac{(1+\mu)(\omega-2\mu)P_0^*}{4(y+z)(d\bar{v}/dy)} e^{-2\bar{v}},$$

$$\frac{dN}{dy} = \frac{2\pi n y}{V y+z} e^{-3\bar{v}}.$$

(23)

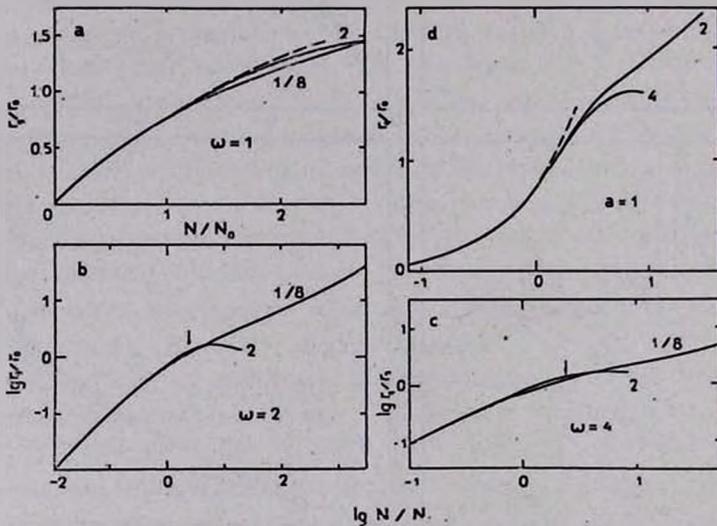


Рис. 2. Зависимость гравитационного радиуса от числа барионов  $N$  для ряда случаев, приведенных на рис. 1.  $N_0 = 4\pi l r_0^3$ ,  $l$  — плотность числа барионов. В случаях 2b, стрелкой указана конечная точка кривой по теории Эйнштейна ( $\omega = 0$ ), которая при выбранном масштабе сливается с остальными ( $\omega \neq 0$ ).

Здесь введены обозначения

$$y = \bar{R}^2, \quad z(y) = \bar{R}^2(\bar{R}^2 - 1). \quad (24)$$

При  $\bar{R}, \bar{v}, y \rightarrow \infty$  вблизи поверхности звезды верно следующее разложение:

$$e^{-2\bar{v}} = \gamma y^{-\lambda} + \dots, \quad \lambda > 0. \quad (25)$$

Поскольку собственная длина экваториальной окружности звезды  $2\pi R \exp(-v) \sim 2\pi \sqrt{\gamma} y^{(1-\lambda)/2}$  также должна расходиться, то  $\lambda < 1$ . Поэтому для искомого типа решений

$$0 < \lambda < 1. \quad (26)$$

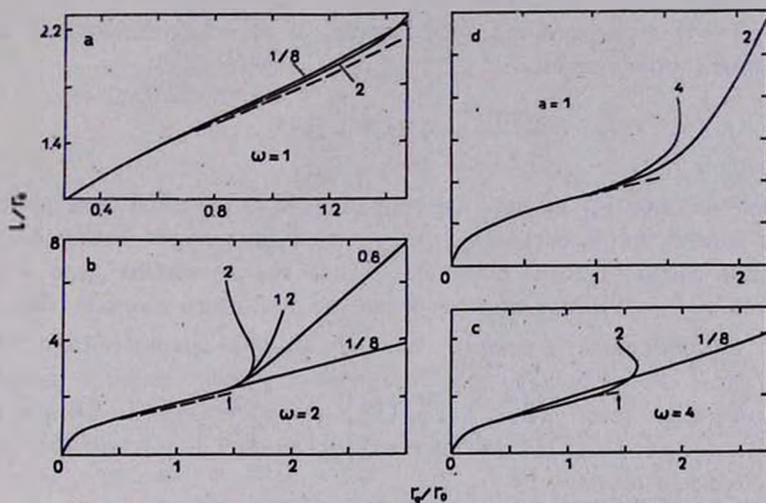


Рис. 3. Зависимость истинного радиуса  $l$  от  $r_g$  для ряда случаев, приведенных на рис. 1. Стрелка указывает конечную точку кривой по теории Эйнштейна.

Подставив разложение (25) во второе из уравнений (23), найдем

$$z(y) = 2P_0^* \gamma^{2-\lambda} / (2-\lambda) + \dots \quad (27)$$

После этого из первого уравнения той же системы с точностью до малых членов

$$2\lambda \approx 1 + \mu + \dots \quad (28)$$

Наконец, после подстановки найденных величин в третье уравнение системы получим

$$a = \left[ 3 - \frac{1}{\lambda} \left( 4 + \frac{2-\lambda}{1-2\lambda} \omega \right) \right]^{-1}, \quad (29)$$

следовательно,  $a < 0$  при  $0 < \lambda < 1/2$  и

$$0 < a < \frac{1}{\omega-1} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < \lambda < 1, \quad \omega > 1. \quad (30)$$

Покажем, что первый случай не приводит к конфигурациям с сколь угодно

большими массами. Из (15) видно, что при  $a < 0$  и  $\omega > 0$  плотность вакуумной энергии  $\epsilon > 0$ . Перейдем теперь к шварцшильдовым координатам, где

$$g_{11} = - \left[ 1 - \frac{2km(\eta)}{c^2\eta} \right]^{-1},$$

$\eta = \tilde{R} \exp(-\tilde{\nu})$  — радиальная координата, а  $m$  — „накопленная“ масса, определяемая уравнением

$$\frac{dmc^2}{d\eta} = 4\pi(\rho c^2 + \epsilon)\eta^2.$$

Из выражения для  $g_{11}$  видно, что когда  $\epsilon > 0$  и  $\rho = \text{const}$  при конечном значении накопленной массы  $m(\eta)$ , оно проходит через сингулярность, меняя свой знак. Таким образом, здесь мы не имеем дело с решениями типа  $r_s \rightarrow \infty$ . Поэтому остается исследовать случай (30). Пренебрегая изменениями функций  $\nu$ ,  $z$ ,  $\mu$  и  $N$  в сравнительно тонком поверхностном слое, где давление стремится к нулю, можно найденные приближенные решения (25), (27), (28) непосредственно сшить с внешними решениями (5)—(7). Выполняя эту процедуру согласно (16), (18)—(20), приходим к результату

$$\begin{aligned} \eta_1 &\sim y_1^{(1-\lambda)/2}, \\ l &\sim \sqrt{\frac{2-\lambda}{P_0^*}} \ln y_1, \\ r_s &= \left[ \frac{4}{(1 + \sqrt{1 + \mu_1})^2} \right]^{a/(1-a)} \eta_1 + \dots \\ N &\sim \frac{n}{(1-\lambda)} \sqrt{\frac{2-\lambda}{P_0^*}} \eta_1^2, \quad \text{при } y_1 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (31)$$

Он верен только тогда, когда выполнены условия (22) и (30). При этом  $a < 1$ . Существуют также решения с  $a \geq 1$ , но мы их не обсуждаем, поскольку для них  $q_0 > 1$ . Решение (31) характеризуется следующими соотношениями:  $r_s \sim \eta_1 \sim \sqrt{N} \rightarrow \infty$ ,  $l \sim \ln r_s \rightarrow \infty$ . Найденные асимптотики согласуются с результатами численных расчетов.

Таким образом, уже на примере простой модели мы убеждаемся в важной роли гравитационного вакуума в теории сверхплотных небесных тел. Есть основания ожидать, что обсуждаемый тип решений (31) должен иметь место и для реального уравнения состояния вырожденного звездного вещества  $\rho = \rho(P)$ .

Резюмируя можно утверждать, что учет гравитационного вакуума приводит к принципиальной возможности существования сверхплотных небесных тел с массами, намного превышающими массу Солнца. Невольно напрашивается мысль отождествить такие сверхплотные и сверхмассивные конфигурации с дозвездными телами В. А. Амбарцумяна [3].

Выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну и академику АН Арм.ССР Г. С. Саакяну за проявленный интерес к работе и ценные стимулирующие обсуждения.

Отдел прикладных проблем физики  
АН Арм.ССР

## MODELS OF CONFIGURATIONS FROM INCOMPRESSIBLE LIQUID TAKING INTO ACCOUNT THE ROLE OF GRAVITATIONAL VACUUM

L. SH GRIGORIAN

The models of superdense star configurations from incompressible liquid are calculated based on the idea of the existence of special gravitational vacuum [1]. The vacuum effects prove to be essential in the case of superdense celestial bodies. The most important result is that there may exist equilibrium superdense celestial bodies with masses many times exceeding the Solar one.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ш. Григорян, Г. С. Саакян, *Астрофизика*, 20, 615, 1984.
2. Г. С. Саакян, *Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс*, Наука, М., 1972.
3. V. A. Ambartsumian, *Rev. Mod. Phys.*, 30, 944, 1958.