УДК: 52—7:517.972

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ
НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ. I. СРЕДНЕЕ
ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ В СРЕДЕ, ОСВЕЩАЕМОЙ ИЗВНЕ

А. Г. НИКОГОСЯН

Поступила 1 ноября 1983

Принята к печати 3 апреля 1984

Предлагается новый подход к определению среднего числа рассеяний, опирающийся на принцип инвариантности Амбарцумяна и систематическое применение метода производящих функций. Найденные в работе средние величины относятся к случаю, когда среда освещается извне. Отдельно рассматриваются фотоны, гибнущие в среде в ходе диффузии, и фотоны, покидающие среду. Показано, что предлагаемый подход позволяет выявить зависимость среднего числа рассеяний от характеристик исходного фотона и может применяться при самых общих предположениях относительно элементарного акта рассеяния. В качестве иллюстрации более подробно разбирается случай полного перераспределения по частотам с учетом поглощения в континууме. Развитые в работе идеи допускают принципиальную возможность применения при определении любых других дискретных случайных величин, дающих статистическое описание поля излучения.

1. *Введение.* Основной вопрос, который обычно ставится при рассмотрении диффузии фотонов в той или иной среде, заключается в определении интенсивности излучения в каждой точке среды в зависимости от частоты, направления и других его характеристик. Однако по целому ряду причин немаловажный интерес представляют также величины, дающие статистическое описание процесса рассеяния. Важность такого описания, на наш взгляд, обусловлена прежде всего тем, что оно в значительной мере способствует лучшему пониманию физической сути различного рода эффектов, предсказываемых математическим решением задачи. С другой стороны, статистическое исследование процесса многократного рассеяния дает возможность определить ряд важных физических характеристик среды, таких, как средняя плотность излучения, средняя степень возбуждения атомов и т. д. Велико и теоретическое значение подобного исследования. Следует также отметить, что упомянутый выше вопрос о нахождении излучательно-го режима в среде, в конечном счете, тоже может рассматриваться как сто-

хастическая задача, заключающаяся в определении статистического среднего некоторой случайной величины.

Среди различных величин, дающих статистическое описание поля излучения, наибольшее внимание в литературе уделялось определению числа рассеяний, испытываемых фотонами при диффузии в среде. Основопологающей в этом направлении является работа В. А. Амбарцумяна [1], в которой для среднего числа рассеяний, приходящихся на один фотон какого-либо их пучка, была предложена формула

$$N = \lambda \partial \ln I / \partial \lambda, \quad (1)$$

где I — интенсивность излучения, а λ представляет собой вероятность переизлучения фотона при элементарном акте взаимодействия его с атомами среды. Среднее число рассеяний фотона в дальнейшем оценивалось многими авторами для разных частных случаев, однако общее рассмотрение проблемы было дано В. В. Соболевым в серии работ [2—5]. В частности, насколько нам известно, впервые именно в этих работах среднее число рассеяний вычислялось в отдельности для фотонов, вышедших в результате диффузии наружу, и фотонов, «погибших» (т. е. испытавших истинное поглощение) в среде в ходе диффузии. Здесь же заметим, что формула (1) применима для оценки среднего числа рассеяний лишь движущихся (но не погибших) фотонов, поэтому из указанных выше двух групп фотонов эта формула будет относиться к той, которая покидает среду.

В упомянутых работах [2—5] для некоторых случаев (когерентное рассеяние, приближение полностью некогерентного рассеяния) были получены простые соотношения, позволяющие определить среднее число рассеяний, испытываемых как теми фотонами, которые гибнут в среде, так и всеми фотонами независимо от их дальнейшей «судьбы». Однако указанные соотношения, в равной мере, как и физические рассуждения, лежащие в их основе, теряют свою силу, если принимать в расчет эффекты поглощения и излучения в непрерывном спектре. До сих пор не рассматривались и более сложные случаи, когда процесс рассеяния считается анизотропным или подчиняющимся общим законам перераспределения по частотам и направлениям (первая такая попытка сделана в недавней работе Г. А. Арутюняна и автора [6]). Большую важность представляет также статистическое описание процесса рассеяния в зависимости от исходных характеристик фотона, как, например, от частоты, направления движения и т. д. Перечисленные здесь вопросы являются предметом детального обсуждения в настоящей серии работ. Тем не менее не это является самым главным. В этой серии работ мы руководствовались стремлением выработать общий подход к определению различного рода величин, который был бы пригоден при широких предположениях относительно элементарного акта рассеяния, рас-

пределений первичных источников энергии и геометрии среды. Предлагаемый нами подход основан на принципе инвариантности Амбарцумяна и систематическом применении метода производящих и характеристических функций (в зависимости от того, является ли данная случайная величина дискретной, или непрерывной), который, как хорошо известно [7, 8], является мощным инструментом при изучении вероятностных процессов. При таком подходе с помощью простых и стандартных процедур для интересующих нас величин удается получить уравнения, рассмотрение которых является особенно важным в сложных случаях, когда сама задача отыскания поля излучения решается лишь численным путем.

Первые две работы данной серии посвящаются определению среднего числа рассеяний. В дальнейшем будет рассмотрена интересная в прикладном отношении величина, характеризующая среднее время пребывания фотона в среде. Вопрос о нахождении указанной величины является отдельной задачей, и только при когерентном рассеянии он по существу сводится к определению среднего числа рассеяний. Намечается также обобщить полученные результаты на случай среды конечной оптической толщины. Будут приведены результаты вычислений, позволяющие судить о влиянии различных законов перераспределения на значения статистических средних.

2. Вспомогательные уравнения. Введем в рассмотрение величины, необходимые для дальнейшего изложения. При этом мы будем ориентироваться на достаточно общий случай, когда среда предполагается трехмерной, а рассеяние — сопровождающимся перераспределением по частотам и направлениям.

Пусть на полубесконечную плоскопараллельную среду под углом $\arcs \cos \eta$ к нормали падает фотон безразмерной частоты x . Обозначим через $\eta' \rho(x', \eta'; x, \eta) dx' d\eta'$ вероятность того, что в результате многократных рассеяний из среды в направлении η' и телесном углу $2\pi d\eta'$ выйдет фотон с частотой, принадлежащей интервалу $(x', x' + dx')$. Аналогичную вероятность отражения, но для фотона, испытывающего определенное число n рассеяний, обозначим через $\eta' \rho_n dx' d\eta'$.

Применяя принцип инвариантности для функции ρ , называемой обычно функцией отражения, получаем

$$\frac{2}{\lambda} [v(x) \eta' + v(x') \eta] \rho(x', \eta'; x, \eta) = r(x', -\eta'; x, \eta) +$$

$$+ \eta \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', \eta'') \rho(x'', \eta''; x, \eta) dx'' +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', \gamma'; x'', \eta'') r(x'', \eta''; x, \eta) dx'' + \\
& + \eta \gamma' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', \gamma'; x'', \eta'') dx'' \times \\
& \times \int_0^1 d\eta''' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', \eta''; x''', -\eta''') \rho(x''', \eta'''; x, \eta) dx''', \quad (2)
\end{aligned}$$

где $v(x) = a(x) + \beta$, $a(x)$ — профиль коэффициента поглощения, β — отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии и, наконец, $r(x', \gamma'; x, \eta)$ представляет собой усредненную по азимуту функцию перераспределения по частотам и направлениям. Во всех случаях, представляющих интерес для астрофизики, функцию r можно записать в виде билинейного разложения (см. [9, 10]). Так, если эффекты перераспределения по частотам и направлениям обусловлены лишь тепловым движением атомов, то

$$\begin{aligned}
r(x', x, \gamma) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \sin \gamma} \exp[-(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma)/\sin^2 \gamma] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \gamma a_k(x) a_k(x'), \quad (3)
\end{aligned}$$

где γ — угол рассеяния, $a_k(x) = (\pi^{1/4} 2^{k/2} \sqrt{|k|})^{-1} \exp(-x^2) H_k(x)$, а $H_k(x)$ — полином Эрмита k -той степени.

Для усредненной по азимуту функции перераспределения в данном случае, как было показано в [9], имеем

$$r(x', \gamma'; x, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(x', x, \gamma) d\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(x', x) P_i(\gamma') P_i(\eta), \quad (4)$$

где $P_i(\eta)$ — полином Лежандра i -той степени и

$$r_i(x', x) = \sum_{k=i}^{\infty} c_k^i a_k(x') a_k(x), \quad (5)$$

причем $c_k^i = 0$, если $k + i$ нечетно, и $c_k^i = (2i + 1) k! / (k - i)!! (k + i + 1)!!$, если $k + i$ четно.

Если теперь воспользоваться разложениями (4) и (5), то из (2) получим

$$[v(x)\eta' + v(x')\eta]p(x', \eta'; x, \eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{k=l}^{\infty} c_k^l \varphi_{ik}(x', \eta') \varphi_{ik}(x, \eta), \quad (6)$$

где функции $\varphi_{ik}(x, \eta)$, являющиеся аналогом хорошо известной Ф-функции Амбарцумяна в общей теории некогерентного рассеяния, определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_{ik}(x, \eta) = & P_l(\eta) \alpha_k(x) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \eta \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{l+j} \sum_{m=j}^{\infty} c_m^l \int_0^1 P_l(\eta') d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{jm}(x, \eta) \varphi_{jm}(x', \eta')}{v(x)\eta' + v(x')\eta} \alpha_k(x') dx'. \end{aligned} \quad (7)$$

Следует отметить, что как эти, так и другие соотношения, которые приводятся в настоящем разделе, хотя и относятся к конкретному случаю чисто доплеровского закона перераспределения по частотам и направлениям, однако после небольших и непринципиальных видоизменений последние остаются в силе и при других законах перераспределения. С другой стороны, указанные соотношения охватывают достаточно широкий класс задач, поскольку позволяют легко совершить переход к различным частным случаям, соответствующим более простым механизмам рассеяния. Действительно, во многих практических применениях функцию $r(x', \eta'; x, \eta)$ можно представить в виде

$$r(x', \eta'; x, \eta) = p^0(\eta', \eta) r(x', x), \quad (8)$$

понимая под $r(x', x)$ усредненную по направлениям функцию перераспределения, а под $p^0(\eta', \eta)$ — усредненную по азимуту индикатрису рассеяния. Тогда, чтобы совершить переход, например, к случаю анизотропного когерентного рассеяния, достаточно в получаемых ниже уравнениях воспользоваться соотношением (8) и положить $r(x', x) = \alpha(x) \delta(x - x')$.

Для функции $p^0(\eta', \eta)$ как известно, имеет место

$$p^0(\eta', \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i(\eta') P_i(\eta),$$

где λ_i совпадают с коэффициентами разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра. Как показывается в работах [9—11], представление в виде билинейного разложения допускает и усредненная по направлениям функция перераспределения по частотам.

В дальнейшем наиболее часто будет встречаться случай изотропного рассеяния в приближении полного перераспределения по частотам. Тогда вместо (8) имеем $r(x', \eta'; x, \eta) \equiv a_0(x') a_0(x)$, а система (7) вырождается в одно уравнение относительно функции $\varphi_0(x, \eta)$:

$$\varphi_0(x, \eta) = a_0(x) + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0(x, \eta) \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_0(x', \eta')}{\eta' v(x) + \eta v(x')} a_0(x') dx'. \quad (9)$$

Легко показать (см. [12]), что отношение $\varphi_0(x, \eta)/a_0(x)$ зависит лишь от комбинации $z = \eta/v(x)$, поэтому, вводя обозначение $H(z) \equiv \varphi_0(x, \eta)/a_0(x)$, вместо (9) будем иметь

$$H(z) = 1 + \frac{\lambda}{2} z H(z) \int_0^{1/z} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) \frac{H(z')}{z + z'} dz', \quad (10)$$

где $G(z) = 2A \int_{x(z)}^{\infty} a^2(x') dx'$, $A = \pi^{-1/2}$, причем $x(z) = 0$, если $z \leq 1$,

и определяется из условия $a(x(z)) = 1/z$, если $z > 1$.

Возвращаясь к введенной выше функции отражения ρ , заметим, что исходя из приписываемого ей вероятностного смысла величине

$$R_*(x, \eta) = \int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', \eta'; x, \eta) dx' \quad (11)$$

можно дать двоякую интерпретацию (здесь и всюду в дальнейшем звездочкой отмечаются величины, относящиеся к потокам фотонов, выходящих в результате рассеяний наружу; аналогичные величины, но для фотонов, гибнущих в среде, будут снабжаться ноликом). С одной стороны, величина $R_*(x, \eta)$ представляет собой контур линии, образуемой при освещении полубесконечной атмосферы излучением в непрерывном спектре единичной интенсивности, а с другой, — она может рассматриваться как вероятность отражения от среды фотона, обладающего при падении частотой x и двигавшегося под углом $\arcs \cos \eta$ к нормали.

Наряду с функцией отражения важное место в дальнейшем изложении принадлежит функции $Y(\tau, x', \eta'; x, \eta)$, которую можно интерпретировать как величину, характеризующую вероятность выхода из глубины τ для фотона, движущегося в направлении η' и обладающего частотой x' . Для аналогичной вероятности, но рассчитанной на поглощенный фотон, мы сохраним обычно используемое в литературе обозначение $p(\tau, x', \eta'; x, \eta)$.

Здесь, как и обычно, принимается, что оптическая глубина τ , рассчитанная для центральной частоты линии, возрастает вглубь от границы среды, а углы отсчитываются от направления внешней нормали к поверхности среды.

В силу принципа обратимости оптических явлений функции Y можно приписать и несколько другой вероятностный смысл, а именно: величина $Y(\tau, x, -\eta; x', -\eta') dx' d\eta'$ может рассматриваться как вероятность того, что падающий на среду в направлении $-\eta$ фотон с частотой x в результате многократных рассеяний пересечет плоскость, параллельную границе среды и находящуюся на глубине τ , в направлении $-\eta'$ внутри телесного угла $2\pi d\eta'$, обладая при этом частотой, принадлежащей интервалу $(x', x' + dx')$. В дальнейшем изложении для удобства будем пользоваться обозначением $Y(\tau, x, -\eta; x', -\eta') \equiv \bar{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta')$ и помнить, что углы в $\bar{Y}$ отсчитываются от направления внутренней нормали к поверхности среды.

Применение принципа инвариантности приводит к следующему уравнению для функции $\bar{Y}$:

$$\eta \frac{\partial \bar{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta')}{\partial \tau} + v(x) \bar{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta') = \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} a(x'') p(0, x'', \eta''; x, \eta) \bar{Y}(\tau, x'', \eta''; x', \eta') dx'', \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} a(x') p(0, x', \eta'; x, \eta) &= r(x', \eta'; x, \eta) + \\ + \eta \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', -\eta'') p(x'', \eta''; x, \eta) dx'', \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве граничного условия имеем: $\bar{Y}(0, x, \eta; x', \eta') = \delta(x - x') \times \times \delta(\eta - \eta')$, если $\eta' > 0$ и $\bar{Y}(0, x, \eta; x', \eta') = |\eta'| \rho(x', -\eta'; x, \eta)$, если $\eta' \leq 0$. Так же, как и в случае функции отражения, если событие, вероятность которого характеризуется величиной $\bar{Y}$, наступает после определенного числа n рассеяний, то последняя снизу будет снабжаться индексом n .

3. Среднее число рассеяний фотона в среде, освещаемой извне. Изучение вопроса о нахождении одного из наиболее важных статистических характеристик поля излучения, среднего числа рассеяний, мы начнем с рассмотрения более простой задачи, в которой полагается, что среда освещается извне.

Пусть на плоскопараллельную полубесконечную атмосферу под углом ага $\cos \eta$ падает пучок фотонов, обладающих частотой χ . Ту часть этих фотонов, которая в результате многократных рассеяний подвергается процессам истинного поглощения и погибает в среде, мы рассмотрим позже, а пока займемся теми фотонами, которые в ходе диффузии выходят из среды. Точнее говоря, нас будет интересовать лишь некоторая доля их, а именно, те фотоны, которые диффузно отражаются от среды через определенное число n рассеяний. Эта доля, как мы помним, определяется функцией ρ_n . Применяя принцип инвариантности, для нахождения функций ρ_n получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\lambda} [v(x)\eta' + v(x')\eta] \rho_1(x', \eta'; x, \eta) = r(x', -\eta'; x, \eta); \\
 & \frac{2}{\lambda} [v(x)\eta' + v(x')\eta] \rho_2(x', \eta'; x, \eta) = \\
 & = \eta \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', \eta'') \rho_1(x'', \eta''; x, \eta) dx'' + \\
 & + \eta' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x', \eta'; x'', \eta'') r(x'', \eta''; x, \eta) dx''; \quad (14) \\
 & \frac{2}{\lambda} [v(x)\eta' + v(x')\eta] \rho_n(x', \eta'; x, \eta) = \\
 & = \eta \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', \eta'') \rho_{n-1}(x'', \eta''; x, \eta) dx'' + \\
 & + \eta' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{n-1}(x', \eta'; x'', \eta'') r(x'', \eta''; x, \eta) dx'' + \\
 & + \eta\eta' \sum_{k=1}^{n-2} \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} \rho_k(x', \eta'; x'', \eta'') \times
 \end{aligned}$$

$$\times dx'' \int_0^1 d\eta''' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', \eta''; x''', -\eta''') \rho_{n-k-1}(x''', \eta'''; x, \eta) dx'''. \quad (n > 2)$$

Введем в рассмотрение производящую функцию

$$W(x', \eta'; x, \eta; s) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x', \eta'; x, \eta) s^n,$$

где s — некоторый параметр. Поскольку $\rho_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \rho$, то функция W определена, по крайней мере, для s , таких, что $|s| \leq 1$. При $|s| < 1$ производящая функция является бесконечно дифференцируемой по s . Очевидно также, что $W(x', \eta'; x, \eta; 1) = \rho(x', \eta'; x, \eta)$. Пользуясь уравнениями (14), несложно получить уравнение для производящей функции

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda s} [v(x) \eta' + v(x') \eta] W(x', \eta'; x, \eta; s) &= r(x', -\eta'; x, \eta) + \\ &+ \eta \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', \eta'') W(x'', \eta''; x, \eta; s) dx'' + \\ &+ \eta' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} W(x', \eta'; x'', \eta''; s) r(x'', \eta''; x, \eta) dx'' + \\ &+ \eta \eta' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} W(x', \eta'; x'', \eta''; s) dx'' \times \\ &\times \int_0^1 d\eta''' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', \eta''; x''', -\eta''') W(x''', \eta'''; x, \eta; s) dx'''. \quad (15) \end{aligned}$$

Для определения среднего числа рассеяний представляет интерес функция $\nu(x', \eta'; x, \eta) = \partial W(x', \eta'; x, \eta; s) / \partial s|_{s=1}$. Действительно, из физического смысла введенных выше величин вытекает, что отношение ν/ρ дает искомое среднее число рассеяний для фотонов, отраженных от среды в направлении η' внутри телесного угла $2\pi d\eta'$ и в интервале частот $(x', x' + dx')$, при условии, что первоначальный фотон двигался под углом $\arcs \cos \eta$ и обладал частотой, равной x . Диффе-

ренцируя (15) по s и полагая $s = 1$, приходим к следующему линейному уравнению для функции $v(x', \eta'; x, \eta)$:

$$v(x', \eta'; x, \eta) = \rho(x', \eta'; x, \eta) + [v(x) \eta' + v(x') \eta]^{-1} \times \\ \times \left[\eta \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} a(x'') p(0, x'', \eta''; x', \eta') v(x'', \eta''; x, \eta) dx'' + \right. \\ \left. + \eta' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} a(x'') p(0, x'', \eta''; x, \eta) v(x'', \eta''; x', \eta') dx'' \right]. \quad (16)$$

Поскольку в уравнение (15) явным образом входит произведение параметров s и λ , то нетрудно заключить, что уравнение (16) может быть также получено почленным дифференцированием (15) по λ с последующим умножением обеих сторон уравнения на λ . Поэтому в данном случае, когда речь идет о диффузно отраженных фотонах (и только в этом случае), указанные две процедуры, связанные с дифференцированием по s или по λ , являются идентичными. Далее можно заключить, что для нахождения среднего числа рассеяний нет нужды в предварительном определении интенсивности отраженного излучения, как это обычно делается; формальное дифференцирование по λ позволяет получить для искомой величины отдельное уравнение. Сказанное приобретает особую важность при рассмотрении сложных задач, когда замкнутого выражения для интенсивности выходящего излучения невозможно получить. Так, в общем случае некогерентного рассеяния, когда функция перераспределения представлена в виде билинейного разложения, с учетом (4) и (5) из (16) получаем

$$[v(x) \eta' + v(x') \eta] v(x', \eta', x, \eta) = \\ = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \sum_{k=i}^{\infty} c_k^i \varphi_{ik}(x, \eta) \varphi_{ik}(x', \eta') [1 + f_{ik}(x, \eta) + f_{ik}(x', \eta')], \quad (17)$$

где $f_{ik}(x, \eta) = \lambda \partial \ln \varphi_{ik}(x, \eta) / \partial \lambda$. Вопрос об определении функции $v(x', \eta'; x, \eta)$ сводится к решению системы линейных уравнений для $\psi_{ik}(x, \eta) = f_{ik}(x, \eta) \varphi_{ik}(x, \eta)$

$$\psi_{ik}(x, \eta) = \varphi_{ik}(x, \eta) - P_i(\eta) a_k(x) + \\ + \frac{\lambda}{2} \eta \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+n} \sum_{m=i}^{\infty} c_m^n \int_0^1 P_i(\eta') d\eta' \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{nm}(x, \eta) \psi_{nm}(x', \eta') + \varphi_{nm}(x', \eta') \psi_{nm}(x, \eta)}{v(x) \eta' + v(x') \eta} a_k(x') dx'. \quad (18)$$

В общем случае уравнение (18) решается методом итераций, причем в качестве нулевого приближения естественно выбрать $\psi_{ik}(x, \eta) = \varphi_{ik}(x, \eta) - P_i(\eta) a_k(x)$. Особенно удобно произвести построение функции $\nu(x', \eta'; x, \eta)$ параллельно с решением системы функциональных уравнений (7).

При полном перераспределении по частотам соотношение (17) существенно упрощается и принимает вид

$$\nu(x', \eta'; x, \eta) / \rho(x', \eta'; x, \eta) = 1 + f(z) + f(z'), \quad (19)$$

где $f(z) = \lambda \partial \ln \varphi_0(x, \eta) / \partial \lambda = \lambda \partial \ln H(z) / \partial \lambda$, а $H(z)$ есть решение уравнения (10). Соотношение, аналогичное (19), но для когерентного рассеяния и $\beta = 0$, было впервые получено В. В. Соболевым в [3]. Мы видим, что в рассматриваемом случае отношение ν/ρ является симметричной функцией относительно пар аргументов x, η и x', η' . В то же время указанное отношение целиком выражается через функцию одной переменной $f(z)$, которая, как следует из (19), удовлетворяет следующему уравнению:

$$f(z) = H(z) - 1 + z \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) \rho(z, z') f(z'') dz', \quad (20)$$

где $\rho(z, z') = (\lambda/2) H(z) H(z') / (z + z')$. Для функции $f(z) H(z) = \lambda \partial H(z) / \partial \lambda$ можно написать и сингулярное уравнение, получающееся из соответствующего уравнения для $H(z)$. Однако здесь мы приведем явное выражение для $f(z)$

$$f(z) = \frac{\bar{\lambda}}{2(1 - \bar{\lambda})} - \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} F(z', \lambda, \beta) G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) \frac{z' dz'}{z + z'}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F(z, \lambda, \beta) &= \left\{ [1 + \lambda U(z, \beta)]^2 + \left[\lambda \frac{\pi}{2} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) \right]^2 \right\}^{-1}; \quad U(z, \beta) = \\ &= z^2 \int_0^{1/2} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) \frac{dz'}{z^2 - z'^2}; \quad \bar{\lambda} = \lambda A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2(x)}{v(x)} dx. \end{aligned}$$

Функция $\nu(x', \eta'; x, \eta)$ содержит в себе всю информацию относительно числа рассеяний фотонов, покидающих среду. Однако на практике часто может оказаться достаточным знание величин

$$N_*(x, \eta) = \frac{\int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} v(x', \eta'; x, \eta) dx'}{\int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', \eta'; x, \eta) dx'}$$

$$\tilde{N}_*(x', \eta) = \frac{\int_0^1 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} v(x', \eta'; x, \eta) dx}{\int_0^1 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', \eta'; x, \eta) dx}$$

Как нетрудно убедиться, функция $N_*(x, \eta)$ дает среднее число рассеяний, испытываемых падающими на среду в направлении η фотонами частоты x , которые впоследствии выходят из среды. С другой стороны, можно задаться целью определить среднее число рассеяний, в результате которых из среды в направлении η' выходят фотоны частоты x' . Эта величина характеризуется функцией $\tilde{N}_*(x, \eta)$. Для краткости в дальнейшем приводятся лишь некоторые частные результаты, касающиеся $\tilde{N}_*(x, \eta)$; основное же внимание будет уделяться вопросу о вычислении $N_*(x, \eta)$.

Вводя обозначение

$$v_*(x, \eta) = \lambda \frac{\partial R_*(x, \eta)}{\partial \lambda} = \int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} v(x', \eta'; x, \eta) dx',$$

на основе уравнения (16) получаем

$$v(x) v_*(x, \eta) = \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} a(x') p(0, x', \eta'; x, \eta) v_*(x', \eta') dx' + l_*(x, \eta),$$
(22)

где

$$l_*(x, \eta) = v(x) R_*(x, \eta) + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} v(x') \rho(x', \eta'; x, \eta) dx' -$$

$$\begin{aligned}
 & -\eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \alpha(x') + \beta \right] \nu(x', \eta'; x, \eta) dx' + \\
 & \quad + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \nu(x, \eta; x', \eta') \times \\
 & \quad \times dx' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', -\eta'; x'', \eta'') \bar{R}_*(x'', \eta'') dx''.
 \end{aligned}$$

К соотношению (22) мы вернемся ниже, а пока приведем значения величин N_* и $\bar{N}_*$ для некоторых частных случаев.

В приближении полностью некогерентного рассеяния, как известно (см., например, [12]), имеем

$$\begin{aligned}
 R_*(x, \eta) = \frac{z(x)}{v(x)} \left\{ 1 - H(z) \left[\sqrt{1 - \bar{\lambda}} + \frac{\lambda}{2} \beta \omega(z, \lambda, \beta) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{\lambda}{2} \beta \gamma_{00}(\lambda, \beta) \right] \right\}. \tag{23}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_{00}(\lambda, \beta) &= \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) H(z) dz; \\
 \omega(z, \lambda, \beta) &= z \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) \frac{H(z')}{z + z'} dz' \quad G_0(z) = 2A \int_{x(z)}^{\infty} \alpha(x) dx.
 \end{aligned}$$

Величины $\gamma_{00}(\lambda, \beta)$ и $\omega(z, \lambda, \beta)$ для различных значений аргументов табулированы Д. И. Нагирнером [13]. Очевидно, что функции

N_* и $\bar{N}_*$ в данном случае также будут зависеть лишь от комбинации $z = \eta/v(x)$. Так, из (19) и определения величины $N_*(x, \eta)$ получаем

$$N_*(z) = 1 + f(z) -$$

$$\frac{1 + f(z) - \frac{2 - \bar{\lambda}}{2\sqrt{1 - \bar{\lambda}}} H(z) + \frac{\lambda}{2} \beta [\bar{\omega}(z, \lambda, \beta) - \bar{\gamma}_{00}(\lambda, \beta)]}{1 - H(z) \left\{ \sqrt{1 - \bar{\lambda}} + \frac{\lambda}{2} \beta [\omega(z, \lambda, \beta) - \gamma_{00}(\lambda, \beta)] \right\}}, \tag{24}$$

где

$$\bar{\gamma}_{00}(\lambda, \beta) = \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) H(z) f(z) dz;$$

$$\bar{\omega}(z, \lambda, \beta) = z \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{H(z') f(z')}{z+z'} dz'.$$

Аналогичным образом

$$\bar{N}_*(z) = 1 + f(z) + \bar{\omega}(z, \lambda, \beta)/\omega(z, \lambda, \beta). \quad (25)$$

При $\beta = 0$ формула (24) упрощается и принимает вид

$$N_*(z) = \frac{f(\infty) - f(z)}{H(\infty) - H(z)} H(z) = \frac{\int_0^{\infty} G(z') F(z', \lambda, \beta) \frac{z' dz'}{z+z'}}{\int_0^{\infty} G(z') H(z') \frac{z' dz'}{z+z'}}, \quad (26)$$

где мы воспользовались уравнением для H -функции (10), формулой (23), а также приняли во внимание, что $H(\infty) = 1/\sqrt{1-\lambda}$ и $f(\infty) = \lambda/2(1-\lambda)$.

Перейдем теперь к статистике числа рассеяний тех фотонов, которые в ходе диффузии погибают в среде. Если вновь речь идет о фотонах частоты x , падающих на полубесконечную среду под углом $\arcs \cos \eta$, то вероятность их гибели в результате определенного числа n рассеяний (акт поглощения также принимается за рассеяние), очевидно, будет задаваться формулой

$$q_n(x, \eta) = \int_0^1 \frac{d\eta'}{|\eta'|} \int_{-\infty}^{\infty} u(x') dx' \int_0^{\infty} \bar{\gamma}_{n-1}(\tau, x, \eta; x', \eta') d\tau, \quad (27)$$

где $u(x) = (1-\lambda)a(x) + \beta$.

Применение принципа инвариантности позволяет написать уравнения, аналогичные (12), для функций Y_n , которые, в свою очередь, приводят к следующему уравнению для производящей функции величин $q_n(x, \eta)$:

$$v(x) Q(x, \eta; s) = \frac{\lambda}{2} s \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') Q(x', \eta'; s) dx' +$$

$$\begin{aligned}
 & + s \int_0^1 d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} u(x') W(x', \tau'; x, \tau; s) dx' + su(x) + \\
 & + \frac{\lambda}{2} s \int_0^1 d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} Q(x', \tau'; s) \times \\
 & \times dx' \int_0^1 d\tau'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', \tau'; x'', -\tau'') W(x'', \tau''; x, \tau; s) dx''. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Исходя из вероятностного смысла величины $R_0(x, \tau) \equiv Q(x, \tau; 1)$, легко заключить, что $R_0(x, \tau) + R_*(x, \tau) = 1$, ибо падающий извне фотон должен либо отразиться от среды, либо поглотиться в ней. Заметим, что вследствие двойственной интерпретации функции Y , величину $R_0(x, \tau)$ можно рассматривать также как контур линии поглощения, образованной в изотермической атмосфере, если мощность первичных источников равна $u(x)$. Из (28), в частности, вытекает уравнение для функции $R_0(x, \tau)$ см., также [14]):

$$\begin{aligned}
 v(x) R_0(x, \tau) = & \int_0^1 d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} a(x') p(0, x', \tau'; x, \tau) R_0(x', \tau') dx' + \\
 & + u(x) + \tau \int_0^1 d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} u(x') \rho(x', \tau'; x, \tau) dx'. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что среднее число рассеяний поглощенных фотонов $N_0(x, \tau)$ можно представить в виде $N_0(x, \tau) = \nu_0(x, \tau)/R_0(x, \tau)$, где $\nu_0(x, \tau) = \partial Q(x, \tau; s)/\partial s|_{s=1}$. Используя уравнение (28), для функции $\nu_0(x, \tau)$ получаем

$$v(x) \nu_0(x, \tau) = \int_0^1 d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} a(x') p(0, x', \tau'; x, \tau) \nu_0(x', \tau') dx' + l_0(x, \tau), \quad (30)$$

где

$$l_0(x, \tau) = v(x) R_0(x, \tau) + \tau \int_0^1 d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} u(x') \nu(x', \tau'; x, \tau) dx' +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} v(x, \eta; x', \eta') \times \\
 & \times dx' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', -\eta'; x'', \eta'') R_0(x'', \eta'') dx''.
 \end{aligned}$$

Наряду с функциями $N_*(x, \eta)$ и $N_0(x, \eta)$ введем в рассмотрение величину

$$\langle N(x, \eta) \rangle = N_*(x, \eta) R_*(x, \eta) + N_0(x, \eta) R_0(x, \eta), \quad (31)$$

которая, как нетрудно понять, характеризует среднее число рассеяний для фотона, обладающего частотой x и падающего на среду под углом $\arcs \cos \eta$, независимо от того, поглотиться ли он впоследствии в среде, или покинет ее. Вместо того, чтобы заняться вопросом о нахождении $v_0(x, \eta)$, мы выпишем уравнение для функции $\langle N(x, \eta) \rangle$, свободный член которого по сравнению с $l_0(x, \eta)$ имеет более простой вид. Действительно, складывая уравнения (22) и (30), получаем

$$\begin{aligned}
 v(x) \langle N(x, \eta) \rangle &= \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') p(0, x', \eta'; x, \eta) \langle N(x', \eta') \rangle dx' + \\
 &+ v(x) + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} v(x') p(x', \eta'; x, \eta) dx'. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Если функция $p(x', \eta'; x, \eta)$ известна, то полученное нами соотношение (32) может рассматриваться как интегральное уравнение с ядром $\alpha(x') p(0, x', \eta'; x, \eta)$ относительно функции $\langle N(x, \eta) \rangle$. Выше мы убедились, что уравнению указанного типа удовлетворяет также функция $R_0(x, \eta)$. Как было показано в работе [14], к решению уравнения с ядром $\alpha(x') p(0, x', \eta'; x, \eta)$ сводится также задача о нахождении интенсивности выходящего излучения при различных распределениях первичных источников энергии. Отсылая за подробностями решения уравнений типа (32) при различных механизмах рассеяния к упомянутой работе [14], здесь заметим лишь, что предложенный в ней путь решения основан на использовании следующего представления ядра:

$$\alpha(x') p(0, x', \eta'; x, \eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\eta') \sum_{k=l}^{\infty} c_k^l \alpha_k(x') \varphi_{lk}(x, \eta), \quad (33)$$

вытекающего из билинейного разложения функции перераспределения (4) и соотношений (6) и (13). Вообще говоря, использование разложения (33) позволяет свести вопрос о решении интегрального уравнения вида (32) к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. В некоторых простейших случаях решение, выражающееся через φ -функции, удается записать в замкнутом виде.

Остановимся более подробно на вопросе об определении функции $\langle N(x, \eta) \rangle$. После ее нахождения в случае необходимости из (31) может быть определена и функция $N_0(x, \eta)$ (величины $R_*(x, \eta)$ и $R_0(x, \eta)$ мы считаем известными). Однако сначала сделаем одно важное заключение, вытекающее из сравнения уравнений (29) и (32). Мы видим, что при $\beta = 0$ (и только в этом случае) имеем

$$\langle N(x, \eta) \rangle = R_0(x, \eta)/(1 - \lambda), \tag{34}$$

результат, который в простейшем случае изотропного полностью некогерентного рассеяния на основе физических рассуждений был получен В. В. Соболевым [2].

Пусть теперь $\beta \neq 0$. Тогда простым вычитанием (29) из (32) легко заключить, что разность функций $\langle N(x, \eta) \rangle$ и $R_0(x, \eta)$ удовлетворяет интегральному уравнению, отличающемуся от исходных уравнений лишь свободным членом, который в данном случае равен $\lambda \pi^{1/4} \varphi_{00}(x, \eta)$. Пользуясь разложением (33), для определения величины $\langle N(x, \eta) \rangle$ будем иметь формулу

$$\begin{aligned} \langle N(x, \eta) \rangle = & R_0(x, \eta) + \frac{\lambda}{v(x)} \left[\pi^{1/4} \varphi_{00}(x, \eta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} c_k^n j_{nk} \varphi_{nk}(x, \eta) \right]. \end{aligned} \tag{35}$$

Входящие в (35) постоянные j_{nk} определяются из системы алгебраических уравнений

$$j_{im} = \frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} c_k^n g_{im}^{nk} j_{nk} + \lambda \pi^{1/4} g_{im}^{00}, \tag{36}$$

где

$$g_{im}^{nk} = \int_0^1 P_i(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{nk}(x, \eta) \frac{\alpha_m(x)}{v(x)} dx.$$

В частности, при полном перераспределении по частотам вместо (35) будем иметь

$$\langle N(x, \eta) \rangle = R_0(x, \eta) + \frac{\beta}{\sqrt{1-\lambda}} \frac{\alpha(x)}{v(x)} H(z), \quad (37)$$

или с учетом (23) окончательно

$$\langle N(x, \eta) \rangle = \frac{\beta}{v(x)} + \frac{\alpha(x)}{v(x)} H(z) \left\{ \frac{1 + \lambda\beta(\beta)}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{\lambda}{2} \beta [\omega(z, \lambda; \beta) - \gamma_{\infty}(\lambda, \beta)] \right\}. \quad (38)$$

Фигурирующая в (38) функция $\delta(\beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{v(x)} dx$ хорошо известна

в теории переноса излучения в линии с поглощением в непрерывном спектре. Для различных профилей коэффициента поглощения имеются таблицы этой функции.

Из (38), в частности, вытекает, что при $x \rightarrow \infty$, $\langle N(x, \eta) \rangle \rightarrow 1$. При $\beta = 0$, как и следовало ожидать и что нетрудно проверить, формула (38) переходит в полученную выше формулу (34).

Формулы, полученные в настоящей работе, позволяют вычислить среднее число рассеяний для фотонов, падающих на среду и обладающих определенной частотой и направлением движения. Разумеется, если внешние источники излучения обладают некоторым угловым и спектральным распределением, то полученные формулы следует усреднить по этому распределению.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

THE STATISTICAL DESCRIPTION OF RADIATION FIELD ON THE BASIS OF INVARIANCE PRINCIPLE. I. THE MEAN NUMBER OF SCATTERINGS IN THE MEDIUM ILLUMINATED FROM OUTSIDE

A. G. NIKOGHOSSIAN

A new approach to determine the mean number of scatterings, based on Ambartsumian's invariance principle and on the systematical application of generating function method is suggested. The mean quantities evaluated in the paper concern the case when the medium is illuminated from outside. The photons destroyed as a result of dif-

fusion in the medium and the photons escaping the medium are considered separately. It is shown that the suggested approach enables one to reveal the dependence of the mean number of scatterings on the characteristics of the incident photon and can be used under general assumptions concerning the elementary act of scattering. For illustration, the case of complete frequency redistribution with nonzero absorptions in a continuum is examined in more detail. The main ideas developed in the paper may be applied in principle when determining any discrete stochastic quantity giving the statistical description of the radiation field.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 1, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1960, стр. 283.
2. В. В. Соболев, *Астрофизика*, 135, 2, 1966.
3. В. В. Соболев, *Астрофизика*, 239, 2, 1966.
4. В. В. Соболев, *Астрофизика*, 5, 3, 1967.
5. В. В. Соболев, *Астрофизика*, 137, 3, 1967.
6. Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян, *ДАН СССР*, 268, 1342, 1983.
7. С. Карлин, *Основы теории случайных процессов*, Мир, М., 1971.
8. Дж. Л. Дуб, *Вероятностные процессы*, ИЛ, М., 1956.
9. А. Г. Никогосян, *ДАН СССР*, 786, 235, 1977.
10. А. Г. Никогосян, *ДАН Арм.ССР*, 176, 68, 1979.
11. D. G. Hummer, *M. N. RAS*, 21, 125, 1962.
12. В. В. Иванов, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, М., 1969.
13. Д. И. Назирнер, *Уч. зап. ЛГУ*, № 381, 1975.
14. A. G. Nikoghosian, H. A. Harathyunian, *Astrophys. Space Sci.*, 64, 269, 1979.