АСТРОФИЗИКА

ТОМ 21 ОКТЯБРЬ, 1984 ВЫПУСК 2

УДК: 52-65:517.58

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВА В РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА

К. И. СЕЛЯКОВ

Поступила 13 ноября 1983
Принята к печати 15 апреля 1984

Решение интегрального уравнения для функций Соболева представлено в виде рядов по полиномам Лагерра. Коэффициенты этих рядов одновременно являются коэффициентами степенных рядов для H-функций Амбарцумяна—Чандрасекара. Выписаны бесконечные системы линейных алгебраических уравнений с теплицевыми матрицами для коэффициентов рядов. В случае изотропного рассеяния приведены численные результаты и приближенные формулы.

1. *Введение.* Характеристики светового поля в плоской однородной полубесконечной среде выражаются через фундаментальные резольвентные функции — функции Соболева $\Phi(\tau)$ [1], удовлетворяющие интегральному уравнению

$$\Phi(\tau) = \int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\,\Phi(\tau')\,d\tau' + K(\tau). \tag{1}$$

Ядерная функция $K(\tau)$ определяется законом однократного рассеяния. Функции $\Phi(\tau)$ подробно изучены. Явное выражение для них получено Мининым в случае изотропного рассеяния [2]. Формулы, справедливые при более общих законах рассеяния, приведены в [1]. Однако использование этих выражений при вычислениях (см., например, работу А. Б. Шнейвайса [3]) требует довольно больших затрат машинного времени. То же можно сказать и о непосредственном численном решении уравнения (1).

В настоящей статье показывается, что можно искать представление функции Соболева в виде разложения по полиномам Лагерра $L_k(\tau)$

$$\Phi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k L_k(\tau). \tag{2}$$

Для нахождения коэффициентов Φ_k используется связь $\Phi(\tau)$ с H-функцией Амбарцумяна—Чандрасекара

$$H(\eta) = 1 + \int_0^\infty e^{-\tau/\eta}\,\Phi(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

и линейное интегральное уравнение для H-функции, что приводит к системам линейных алгебраических уравнений относительно Φ_k.

2. *Вид разложений.* Интенсивность выходящего из среды излучения при изотропном рассеянии дается формулой

$$I(\eta) = \int_0^\infty B(\tau)\,e^{-\tau/\eta}\,d\tau/\eta. \tag{4}$$

Здесь τ — оптическая глубина, $B(\tau)$ — функция источников, η — косинус угла между направлением распространения и изучения и нормалью к границе среды.

Перейдем к аргументу $1-\eta$ и запишем (4) в виде

$$I(1-\eta) = \int_0^\infty e^{-\tau}\,B(\tau)\,\frac{e^{-\tau\eta/(1-\eta)}}{1-\eta}\,d\tau. \tag{5}$$

Дробь в подынтегральном выражении является производящей функцией для полиномов Лагерра $L_k(\tau)$. В общем случае (см., например, [4]) полиномы $L_k^\alpha(\tau)$ определяются разложением

$$e^{-\tau\eta/1-\eta}/(1-\eta)^{\alpha+1} = \sum_{k=0}^\infty \eta^k L_k^\alpha(\tau). \tag{6}$$

Как обычно, мы будем использовать обозначение $L_k(\tau) \equiv L_k^0(\tau)$. Поэтому если функция источников рассматриваемой задачи $B(\tau) = o(e^{\tau/2})$ при $\tau \to \infty$, то $I(1-\eta)$ раскладывается в степенной ряд,

$$I(1-\eta) = \sum_{k=0}^\infty g_k \eta^k, \tag{7}$$

где g_k являются коэффициентами разложения функции источников $B(\tau)$ по полиномам Лагерра

$$g_k = \int_0^\infty e^{-\tau} B(\tau)\,L_k(\tau)\,d\tau, \quad B(\tau) = \sum_{k=0}^\infty g_k L_k(\tau). \tag{8}$$

Ясно, что и при более сложных законах рассеяния коэффициенты рядов, аналогичных (7) и (8), будут просто связаны друг с другом.

За последнее время в теории диффузии нейтронов получили широкое распространение численные методы, в которых интенсивности выходящего из среды излучения ищутся в виде полиномов от угловой переменной. В C_N-методе Бенуа [5] коэффициенты полиномов определяются с помощью явного выражения для резольвенты уравнения переноса, что, конечно, ограничивает возможности этого метода. В развитом Зивертом и др. [6, 7] F_N-методе используется дискретизация линейных сингулярных интегральных уравнений. Многочисленные примеры показали, что этот метод действительно «прост» с вычислительной точки зрения (название F_N — от «facil») и его применение дает хорошие результаты. Формулы (4)—(8) могут служить обоснованием этих методов. При этом описываемый в нашей работе способ нахождения коэффициентов степенных рядов значительно удобнее предложенного в [5—7]. При не очень высоких требованиях к точности определяемых функций ($\sim 10^{-3}$) он позволяет обойтись простейшими вычислительными средствами.

3. *Системы уравнений для коэффициентов рядов.* Подставим ряд (2) в формулу для H-функции (3), предварительно перейдя, в соответствии с (5)—(6), к аргументу $1-\eta$:

$$H(1-\eta) = 1 + (1-\eta)\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k\eta^k. \tag{9}$$

Таким образом, H-функция раскладывается в степенной ряд

$$H(1-\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k\eta^k \tag{10}$$

с коэффициентами

$$H_0 = 1+\Phi_0,\ H_k = \Phi_k - \Phi_{k-1},\ k \geqslant 1. \tag{11}$$

Ряд (10) сходится равномерно при $|\eta|<1$, поскольку, как известно, $\Phi(\tau)$ остается ограниченной, когда $\tau\to\infty$.

Отметим, что помимо (2) для $\Phi(\tau)$ справедливо представление в виде ряда по полиномам Лагерра с верхним индексом, равным единице:

$$\Phi(\tau) = -\sum_{k=1}^{\infty} H_k L_{k-1}^1(\tau). \tag{12}$$

Оно получается после подстановки (11) в (2) и использования соотношения $L_n^1(\tau) = \sum_{k=0}^{n} L_k(\tau)$ (см. [4]).

Линейные интегральные уравнения для H-функции имеют вид [1]

$$H(\eta)\left[1+\eta\int_{-1}^{0}\frac{\psi(\eta')}{\eta'-\eta}\,d\eta'\right]=1+\eta\int_{0}^{1}\frac{H(\eta')-H(\eta)}{\eta'-\eta}\,\psi(\eta')\,d\eta'. \tag{13}$$

Здесь $\psi(\eta)$ — характеристическая функция, определяемая законом однократного рассеяния. Если индикатриса рассеяния является линейной комбинацией первых N полиномов Лежандра, то $\psi(\eta)$ — четный полином степени $2N$. В дальнейшем это условие будем считать выполненным.

Подстановка (10) в (13) приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов H_k:

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}H_k=1,\\ \sum_{k=0}^{n}H_k a_{n-k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}H_k(1-c_{k-n})=0,\quad n=0,\,1,\,2,\ldots,\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$a_n=\int_0^1\frac{\psi(\eta)}{(1+\eta)^{n+1}}\,d\eta,\qquad c_n=\int_0^1(1-\eta)^{n-1}\psi(\eta)\,d\eta. \tag{15}$$

Вычтем из каждого из уравнений (14) последующее. В результате найдем еще одну систему

$$\begin{gathered}H_0(1-a_0)+\sum_{k=1}^{\infty}H_k c_k=1,\\ \sum_{k=0}^{n-1}H_k b_{n-k}+H_n(1-c_1-a_0)+\sum_{k=n+1}^{\infty}H_k d_{k-n}=0,\quad n=0,\,1,\,2,\ldots.\end{gathered} \tag{16}$$

Ее коэффициенты определяются формулами

$$\begin{gathered}b_n=a_{n-1}-a_n=\int_0^1\frac{\psi(\eta)\,\eta}{(1+\eta)^{n+1}}\,d\eta,\\ d_n=c_n-c_{n+1}=\int_0^1\eta(1-\eta)^{n-1}\psi(\eta)\,d\eta.\end{gathered} \tag{17}$$

Системы уравнений для величин Φ_k получаются подстановкой (11) в (14) или (16). Кроме того, можно просуммировать уравнения (16) по n от m до ∞. Если использовать вытекающее из (11) соотношение

$\Phi_m = -\sum_{k=m+1}^{\infty} H_k$, то окажется, что коэффициенты Φ_m удовлетворяют системе с той же матрицей, что и (16):

$$\sum_{m=0}^{n-1} \Phi_m b_{n-m} + \Phi_n (1 - c_1 - a_0) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \Phi_m d_{m-n} = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Коэффициенты a_n и c_n ведут себя при $n \to \infty$ обычно как $O(1/n)$, а b_n и d_n — как $O(1/n^2)$, что видно из выражений (15) и (17). Поэтому система (16) обладает вычислительными преимуществами перед (14). Заметим, что матрицы систем уравнений (14) и (16) являются теплицевыми, т. е. их элементы зависят лишь от разностей индексов. Можно думать, что хорошо разработанную теорию таких матриц [8] удастся применить при решении ряда задач теории переноса.

4. *Асимптотическое поведение коэффициентов рядов.* Определим сначала поведение коэффициентов H_k степенного ряда (10), представляющего H-функцию, при больших номерах k. Такие коэффициенты определяют сумму ряда (10) для η, близких к единице, т. е. значения H-функции для аргументов, близких к нулю. Поэтому для получения искомой асимптотики можно использовать соотношение

$$H(\eta) = 1 - \psi(0)\, \eta \ln \eta + O(\eta), \quad \eta \to 0, \tag{19}$$

вытекающее из нелинейного уравнения Амбарцумяна—Чандрасекара для H-функций. Разложив (19) в степенной ряд, находим, что при $k \gg 1$

$$H_k \sim -\psi(0) \frac{1}{k^2}. \tag{20}$$

Эту формулу можно вывести и непосредственно из выписанных систем уравнений. Для этого представим (16) при $n > M > 1$ в виде

$$\sum_{k=0}^{M} H_k b_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-M-1} b_k H_{n-k} + H_n (1 - c_1 - a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k H_{n+k} = 0. \tag{21}$$

Если $n \gg M \gg 1$, то

$$b_n \sum_{k=0}^{M} H_k + H_n \sum_{k=1}^{n-M} b_k + H_n \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sim -H_n (1 - c_1 - a_0). \tag{22}$$

Применив (14) и (17), имеем

$$H_n \sim -b_n, \quad n \gg 1, \tag{23}$$

что совпадает с (20), поскольку $b_n \sim \psi(0)/n^2$, $n \gg 1$.

Аналогичным образом из (18) получается асимптотика величин Φ_k:

$$\Phi_k \sim a_k, \quad k \gg 1. \tag{24}$$

Этот же результат следует из известного соотношения

$$\Phi(\tau) = \psi(0) E_1(\tau) + O(1), \quad \tau \to 0, \tag{25}$$

поскольку интегральная показательная функция $E_1(\tau)$ раскладывается в ряд по полиномам Лагерра $E_1(\tau) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} L_k(\tau)(1-2^{-k})/k$ и $L_n(0)=1$. Наконец, применение (11) к (23) также приводит к (24).

5. *О решении систем уравнений.* Интегральное уравнение (13) линейно и, как известно [9], его решение определяется с точностью до произвольной постоянной. Эта постоянная обычно находится из условия аналитичности H-функции в правой полуплоскости [10], которое отбрасывает все ненужные решения соответствующего однородного интегрального уравнения. Выполнение данного условия обеспечено, когда определители описанных систем линейных алгебраических уравнений не равны нулю. Если же при некоторых параметрах задачи определители оказываются нулевыми, то при решении систем надо использовать дополнительное уравнение. В качестве такового можно применить интегральное соотношение, вытекающее из нелинейного уравнения для H-функций. В наших обозначениях оно имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k c_{k+1} = 1 - \sqrt{1-2c_1}\,. \tag{26}$$

В ряде случаев может оказаться полезным равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k \int_0^1 \frac{\psi(\eta)(1-\eta)^k}{1-\eta\eta_0}\, d\eta = 1, \tag{27}$$

где η_0 — корень характеристического уравнения (см. [1, 10]). Однако с вычислительной точки зрения оно менее удобно, чем (26).

При расчетах необходимо задаться некоторой конечной размерностью M систем уравнений. Естественно считать, что для номеров k, бо́льших M, коэффициенты Φ_k и H_k определяются их асимптотическими формами (23) и (24).

Отметим, что лучше искать не сами величины Φ_k, а, как следует из асимптотической формулы (25), коэффициенты f_k разложения в ряд по полиномам Лагерра функции

$$f(\tau) = \Phi(\tau) - \psi(0) E_1(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k L_k(\tau). \tag{28}$$

Аналогичным образом полезно представить и H-функцию:

$$h(\eta) = H(1-\eta) - 1 + \psi(0)(1-\eta)\ln(1-\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \eta^k. \tag{29}$$

Коэффициенты f_k и h_k должны убывать быстрее, чем, соответственно, Φ_k и H_k.

При небольших размерностях системы, $M = 3 \div 4$, и двух-трехчленных индикатрисах рассеяния легко произвести аналитические выкладки для определения величин Φ_k, H_k. Получаемые таким образом простые по структуре формулы могут найти применение при решении обратных задач теории переноса.

6. *Изотропное рассеяние.* Проиллюстрируем вышеизложенное на простейшем примере изотропного рассеяния. Поле излучения в среде выражается в этом случае через единственную функцию Соболева, соответствующую характеристической функции $\psi(\eta) = \lambda/2$. Здесь λ — вероятность выживания фотона при однократном рассеянии. Коэффициенты описанных систем линейных алгебраических уравнений принимают следующие значения:

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{\lambda}{2}\ln 2; \quad a_n = \frac{\lambda}{2}\frac{1-2^{-n}}{n}, \quad n \geqslant 1; \quad c_n = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{n}; \\ b_1 = \frac{\lambda}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right); \quad b_n = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{(n-1)n}[1-(n+1)2^{-n}], \quad n \geqslant 2. \end{gathered} \tag{30}$$

Будем искать коэффициенты разложения $\Phi(\tau)$ по полиномам Лагерра $L_n^1(\tau)$, которые, как видно из (12), одновременно являются коэффициентами степенного ряда для H-функции.

Систему для расчетов составим из дополнительного условия (26) и необходимого, при выбранной размерности M, количества первых соотношений из (16). С помощью первого уравнения (14) исключим H_0. Величины H_k представим в виде

$$H_k = h_k - \frac{\lambda}{2}\Delta_k, \tag{31}$$

где $\Delta_k = 1/(k-1)k$ — коэффициенты разложения в степенной ряд функции $(1-\eta)\ln(1-\eta)$, в соответствии с формулой (29).

Следующий интересующий нас член асимптотики $H(1-\eta)$ имеет порядок $O((1-\eta)^2\ln^2(1-\eta))$, $\eta \to 1$. Поэтому положим при $k > M$

$$h_k = h_M \delta_k / \delta_M, \qquad \delta_k = 4 \sum_{n=3}^{k-3} \frac{1}{n} \frac{1}{k(k-1)(k-2)}. \tag{32}$$

Здесь δ_k — коэффициенты степенного ряда для $(1-\eta)^2 \ln^2 (1-\eta)$.

Условие (32) позволяет замкнуть нашу систему уравнений. Входящие в некоторые из ее членов бесконечные суммы вычисляются без затруднений.

После нахождения величин h_k, $k = 0, 1, \ldots, M$, функция Соболева $\Phi(\tau)$ может быть рассчитана по формуле, которая получается после подстановки (31) и (32) в (12):

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2}(-\ln\tau - C) + \frac{h_M}{\delta_M}\left\{\tau \ln\tau[\ln\tau - 2 + 2C] + \right.$$
$$\left. + \tau\left[(1-C)^2 + 1 - \frac{\pi^2}{6}\right]\right\} - \sum_{n=1}^{M-1} \tilde{h}_n L_{n-1}^1(\tau). \tag{33}$$

Здесь $\tilde{h}_n = h_n - h_M \delta_n / \delta_M$, $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера. Первое слагаемое в (33) есть $\frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n L_{n-1}^1(\tau)$, а выражение в фигурных скобках равно $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n L_{n-1}^1(\tau)$. В этом можно убедиться, выполнив преобразование Лапласа по τ и свернув полученные суммы.

Для H-функции в приближении порядка M справедлива формула

$$H(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2} \eta \ln\eta + \frac{h_M}{\delta_M} \eta^2 \ln^2 \eta + \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{h}_k (1-\eta)^k. \tag{34}$$

Представляют интерес также ее моменты

$$\alpha_n = \int_0^1 \eta^n H(\eta)\, d\eta. \tag{35}$$

При $n = 0, 1, 2$ их можно записать в виде

$$\alpha_0 = 1 + \frac{\lambda}{8} + \frac{2}{27} \frac{h_M}{\delta_M} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\tilde{h}_k}{k+1},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{18} + \frac{1}{32} \frac{h_M}{\delta_M} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\tilde{h}_k}{(k+1)(k+2)}, \tag{36}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{32} + \frac{2}{125} \frac{h_M}{\delta_M} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\tilde{h}_k}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Отметим, что дополнительное условие (26), использованное в нашей системе уравнений, является выражением для нулевого момента H-функции. Поэтому первое из соотношений (36) точное.

Функция

$$N(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau')\, d\tau', \tag{37}$$

через которую определяется среднее число рассеяний фотона в среде, а также функция Хопфа

$$q(\tau) = (N_0(\tau)/\sqrt{3}) - \tau \tag{38}$$

получаются интегрированием (33). В последней формуле $N_0(\tau)$ — функция $N(\tau)$ при $\lambda = 1$. Значение $q(\infty)$, «экстраполированная длина», равно

$$q(\infty) = a_2/a_1. \tag{39}$$

Таким образом, через коэффициенты h_k (или f_k) можно выразить все основные функции теории переноса излучения.

7. *Численные результаты для изотропного рассеяния.* В табл. 1 представлены коэффициенты разложения резольвентной функции Соболева в ряд по полиномам Лагерра $L_k^1(\tau)$ для случая $\lambda = 1$. Одновременно они являются коэффициентами степенного ряда для H-функции. Величины h_k найдены из решения описанной выше системы уравнений размерности $M = 30$. Таблица 1 в комбинации с формулами (33) и (34) позволяет легко определять значения функций $\Phi(\tau)$ и $H(\tau)$ при изотропном рассеянии с $\lambda = 1$.

Погрешности в расчетах $\Phi(\tau)$ по формуле (33) для нескольких значений λ собраны в таблице 2. Результаты относятся к приближениям порядков $M = 15, 30, 50$, т. е. h_k определялись из систем уравнений соответствующих размерностей. В таблице даны величины $(\Phi - \Phi_T)/\Phi_T$. Численно точные значения Φ_T брались из работы [3], либо из наших расчетов с $M = 100$.

Функция $\Phi(\tau)$ остается ограниченной при $\tau \to \infty$. Поэтому понятно, что ее представление формулой (33), т. е. линейной комбинацией полиномов и логарифмов, может быть удовлетворительным лишь на конечном промежутке изменения аргумента. С возрастанием степени полинома M этот промежуток расширяется и точность вычислений $\Phi(\tau)$ по (33) растет. Из табл. 2 также видно, что погрешности возрастают с уменьшением λ, что обусловлено увеличением скорости убывания функции $\Phi(\tau)$.

Таблица 1

КОЭФФИЦИЕНТЫ h_k ДЛЯ $\lambda=1$ И $M=30$

k	h_k	k	h_k	k	h_k	k	h_k
0	1907811+1	8	3616991−2	16	4966139−3	24	1590813−3
1	−2269406+1	9	2567241−2	17	4185448−3	25	1419356−3
2	2238077+0	10	1832952−2	18	3564597−3	26	1272453−3
3	6445422−1	11	1439326−2	19	3062143−3	27	1146241−3
4	2768917−1	12	1122311−2	20	2651450−3	28	1038581−3
5	1438509−1	13	8936326−3	21	2312284−3	29	9630053−4
6	8412897−2	14	7242163−3	22	2029586−3	30	7974470−4
7	5347311−2	15	5958259−3	23	1791991−3		

Таблица 2

ПОГРЕШНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $\Phi(\tau)$

M	λ \ τ	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0	7.0	10.0
	0.5	−2−5	3−5	−8−5	2−4	−1−3	1−2	−2−1	—
15	0.9	5−4	−3−4	3−4	−4−4	8−4	−4−3	2−2	−2−1
	1.0	6−4	−2−4	2−4	−2−4	2−4	−3−4	6−4	−2−3
	0.5	−9−6	1−6	1−6	−3−5	2−4	1−3	−2−2	—
30	0.9	3−5	5−5	−4−5	2−5	4−5	4−4	−2−3	2−2
	1.0	4−5	4−5	−3−5	−2−6	1−5	−1−5	−6−5	−3−5
	0.5	−5−6	−4−6	−2−6	1−5	1−4	9−4	2−2	—
50	0.9	−3−5	3−6	3−5	4−5	−9−5	3−4	−3−3	−2−2
	1.0	−4−5	−1−5	7−6	7−6	−2−7	5−6	3−6	5−5

Примечание. Запись вида $-4-4$ означает $-4\cdot 10^{-4}$; прочерки — погрешность $>20\%$.

В табл. 3 приведены погрешности при расчете функции $N(\tau)$ по формуле, получающейся интегрированием (33). И здесь ошибки минимальны при λ, близких к единице. Дело в том, что $N_0(\tau)\sim\tau$ при $\tau\to\infty$, и представление $N(\tau)$ полиномом в этом случае может быть хорошим на широком интервале (для $\lambda<1$ имеем $N(\infty)=(1-\lambda)^{-1/2}<\infty$). Как и следовало ожидать, точность определения $N(\tau)$ существенно выше, чем $\Phi(\tau)$.

Ошибки $(H-H_T)/H_T$ в вычислении H-функции по формуле (34), а также ее моментов α_1, α_2 по (36) представлены в табл. 4. Значения H_T взяты из расчетов с $M=100$. Как видно, отрезки степенных рядов хорошо описывают $H(\eta)$ для $0\leqslant\eta\leqslant1$. Погрешности имеют максимум вблизи малых η, что вызвано недостаточно полным описанием асимптотики $H(\eta)$ при $\eta\to0$, а также возрастанием ошибок определения h_k для k, близких к M. При этом, однако, равенство $H(0)=1$ соблюдается. Точность формулы (34) растет с уменьшением λ.

Таблица 3

ПОГРЕШНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $N(\tau)$

M	λ \ τ	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	16.0
15	0.5	1—6	—9—7	2—6	1—5	1—4	4—3
	0.9	—1—5	—2—6	—4—7	—1—5	—3—4	—1—3
	1.0	—1—5	—2—6	—6—7	—7—6	—1—4	—7—4
30	0.5	2—7	—2—7	—2—8	—4—7	—2—6	—9—5
	0.9	—1—6	1—7	2—6	—4—6	6—5	1—4
	1.0	—6—7	—2—7	3—6	—2—6	2—5	—1—4
50	0.5	7—8	7—8	1—7	1—7	2—6	5—6
	0.9	2—6	—1—6	—1—6	—4—6	—5—5	—4—5
	1.0	9—7	3—7	2—8	—5—7	—1—6	—2—5

Таблица 4

ПОГРЕШНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $H(\eta)$

M	λ \ η	0.05	0.1	0.2	0.4	0.7	1.0	z_1	z_2
15	0.5	1—7	—4—8	—5—8	8—10	7—10	5—10	—2—9	—1—10
	0.9	—3—5	—9—6	9—7	1—6	2—6	2—6	1—6	—2—6
	1.0	—4—5	—1—5	2—6	3—6	2—6	2—6	2—6	2—6
30	0.5	2—8	9—9	2—10	—1—10	—	—1—10	1—10	—
	0.9	—2—6	—1—7	2—7	1—7	2—7	2—7	2—7	1—7
	1.0	—4—6	—2—7	3—7	2—7	2—7	2—7	2—7	1—7
50	0.5	7—9	9—10	—	—	—	—	—	—
	0.9	—4—7	3—8	4—8	5—8	6—8	8—8	6—8	5—8
	1.0	—3—7	5—8	4—8	4—8	4—8	4—8	4—8	3—8

Примечание. Прочерки — погрешность меньше $1\cdot 10^{-10}$.

Экстраполированная длина $q(\infty)$ определяется по (38) и (36) с высокой точностью. Относительные погрешности составляют $2\cdot 10^{-7}$, $1\cdot 10^{-8}$, $1\cdot 10^{-9}$ при $M=15$, 30, 50 соответственно. Для $M=100$ абсолютная погрешность не превосходит одной-двух единиц десятой значащей цифры.

8. *Приближенные формулы для коэффициентов h_k.* Асимптотика коэффициентов h_k, даваемая (32) и использованная нами для замыкания системы уравнений, начинает удовлетворительно выполняться лишь при довольно больших номерах k. При расчетах с малыми размерностями системы M имеет смысл попытаться найти аналитические представление для δ_k, ко

торое описывает коэффициенты h_k с небольшими номерами лучше, чем (32), и не очень сильно отличается от точной асимптотической формулы. Например, можно положить

$$\delta_k = \frac{1}{(k-1)(k+1)k}. \tag{40}$$

Тогда $H(\eta)$ надо будет вычислять по формуле

$$H(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2}\eta \ln \eta + \frac{h_M}{\delta_M}\left[\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\eta - \frac{\eta^2 \ln \eta}{2(1-\eta)}\right] + \sum_{k=0}^{M-1} h_k (1-\eta)^k, \tag{41}$$

а функцию Соболева — по формуле

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2}(-\ln\tau - C) + \frac{1}{2}\frac{h_M}{\delta_M}\left[e^{\tau}E_1(\tau) + \ln\tau + C - \frac{3}{2}\right] - $$
$$- \sum_{n=1}^{M-1} h_n L_{n-1}^1(\tau). \tag{42}$$

Неплохие результаты получаются уже при $M=3$. Наибольшие погрешности в определении $H(\eta)$ по (41) составляют $8\cdot 10^{-5}$, $7\cdot 10^{-4}$, $9\cdot 10^{-4}$ для $\lambda = 0.5$, 0.9, 1.0 соответственно. Формула (42) представляет $\Phi(\tau)$ с ошибками $\leqslant 5\%$ для τ, меньших 2.5, 3, 9 при этих же λ.

В целом точность (40)—(42) выше, чем (32)—(34) при размерностях системы $M \lesssim 12 \div 14$.

Выкладки в приближении третьего порядка $M = 3$, с δ_k в форме (40), приводят к следующим выражениям для коэффициентов h_k:

$$\begin{aligned}
D\cdot h_0 &= \lambda(0.16480 - 0.23943\lambda - 0.00048\lambda^2) + \\
&+ (1-\sqrt{1-\lambda})(-0.23921 + 0.36011\lambda), \\
D\cdot h_1 &= \lambda(0.11780 + 0.13686\lambda - 0.11464\lambda^2) + \\
&+ (1-\sqrt{1-\lambda})(-0.39119 + 0.19667\lambda), \\
D\cdot h_2 &= -1 + 1.15394\lambda - 0.26772\lambda^2 + 0.04669\lambda^3 + \\
&+ \frac{2}{\lambda}(1-\sqrt{1-\lambda})(1 - 1.37795\lambda + 0.41415\lambda^2), \\
D &= 0.13040 - 0.33311\lambda + 0.22673\lambda^2, \\
h_3 &= -\frac{1}{2}(h_0 + h_1 + h_2).
\end{aligned} \tag{43}$$

В работе [11] представлено разложение H-функции для изотропного рассеяния при $\lambda = 1$ по первым восьми полиномам Чебышева от аргумента $\eta \ln \eta$. Точность этого разложения $(4 \cdot 10^{-6})$ заметно выше, чем соответствующего нашего (41) при $M = 7$. Однако, во-первых, выражение (41) справедливо для всех λ, а во-вторых, наверняка возможно снизить его погрешности, например, подобрав лучшую форму для δ_k или же использовав при построении формул невысокого порядка значения коэффициентов h_k, определенных при больших M.

В заключение статьи отметим, что можно искать разложения функций Соболева в ряды по функциям $l_n(\tau) = e^{-\tau/2} L_n(\tau)$ и, соответственно, H-функций в степенные ряды от аргумента $(2 - \eta)/(2 + \eta)$. Кроме того, допустимы обобщения описанных здесь результатов на случай атмосферы конечной оптической толщины и на задачи переноса излучения в спектральной линии при полном перераспределении по частотам. Работу в этих направлениях предполагается выполнить в дальнейшем.

Автор глубоко признателен В. В. Иванову и Д. И. Нагирнеру за высказанные ими замечания.

Ленинградский государственный
университет

LAGERR POLYNOMIAL SERIES FOR SOBOLEV FUNCTIONS

K. I. SELYAKOV

The solution of the integral equation for Sobolev's functions is represented by Lagerr polynomial series. The coefficients of these series are at the same time the coefficients of the power series for the Ambartsumian-Chandrasekhar H-functions. Infinite systems of linear algebraic equations with Toeplitz matrices are derived for the coefficients of these series. Numerical results and approximate formulae are presented for the isotropic scattering.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
2. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
3. *А. Б. Шнейвайс*, Вестн. ЛГУ, № 7, 144, 1973.
4. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
5. *P. Benoist, A. Kavenoky*, Nucl. Sci. Eng., 32, 225, 1968.
6. *C. E. Siewert, P. Benoist*, Nucl. Sci. Eng., 69, 156, 1979.

7. *N. G. McCormick, R. Sanchez*, J. Math. Phys., 22, 199, 1981.
8. *И. С. Иохвидов*, Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы, Наука, М., 1974.
9. *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
10. *T. W. Mullikin*, Ap. J., 139, 379, 1964.
11. *А. Б. Шнейвайс*, Астрофизика, 19, 175, 1983.