ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 120 2020 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

В. Г. Микаелян

Об одном “мартингальном свойстве” ряда по общей системе Франклина

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 17/V 2020)

Ключевые слова: *общая система Франклина, критерий сходимости, сходимость к* $+\infty$*-и.*

Приведем определение общей системы Франклина. Последовательность разных точек $T=\{t_n : n\ge 0\}$ назовем допустимой, если $t_0=0, t_1=1, t_n\in(0,1)$ для любого $n\ge 2$ и T всюду плотно в $[0,1]$. Пусть $T=\{t_n : n\ge 0\}$ – допустимая последовательность. Для $n\ge 1$ обозначим $T_n=\{t_i : 0\le i\le n+1\}$. Пусть π_n получается из T_n неубывающей перестановкой: $\pi_n=\{s_{n,i} : s_{n,i}<s_{n,i+1}, 0\le i\le n\}, \pi_n=T_n$. Тогда через S_n обозначим пространство функций, определенных на $[0,1]$, которые непрерывны, линейны на $[s_{n.i}, s_{n,i+1}]$ для любого $i=0,1,\ldots,n$-1. Ясно, что $\dim S_n=n+1$ и $S_{n-1}\subset S_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f_n\in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\| f_n\|_2=1$. Эту функцию назовем n-й функцией Франклина, соответствующей разбиению T, а $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – общей системой Франклина, соответствующей разбиению T.

Известно, что общая система Франклина является базисом в $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$ при $1\le p<\infty$ (см. [1]) и безусловным базисом при $1<p<\infty$ (см. [2]).

Допустимая последовательность T называется квазидвоичным разбиением отрезка $[0,1]$, если $s_{j+1,2k}=s_{j,k}$ для всех $j,k, 0\le k\le 2^j$, т.е. $\pi_{2^{j+1}}$ получается из π_{2^j} прибавлением по одной точке в каждом интервале $(s_{j,k}, s_{j,k+1})$ для всех $0\le k<2^j$.

Допустимая последовательность T называется сильно регулярной с параметром γ, если $\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_{n,i+1}}{\lambda_{n,i}} \le \gamma$ для всех $n \ge 2, i = 1, \ldots, n$, здесь и далее $\lambda_{n,i} = s_{n,i} - s_{n,i-1}$.

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – общая система Франклина, соответствующая квазидвоичному и сильно регулярному с параметром γ разбиению T. Обозначим $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x), x \in [0,1]$.

Сформулируем основной результат настоящей статьи:

Теорема 1. *Если* $\inf_n \sigma_n(x) > -\infty, x \in E$, *то* $\sup_n \sigma_n(x) < +\infty$ *почти всюду на* E.

Теорему 1 можно сформулировать в следующей равносильной форме.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : -\infty < \liminf_n \sigma_n(x) \le \limsup_n \sigma_n(x) = +\infty\right\}\right) = 0,$$

где μ *– мера Лебега.*

Заметим, что теорема 2 является аналогом теоремы Геворкяна для классической системы Франклина (см. [3]). Такую же теорему, которая дает ответ известной задаче Лузина о сходимости тригонометрических рядов к $+\infty$-и, доказал Конягин для тригонометрических рядов (см. [4], теорема 2). В [5] доказана

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty$ *почти всюду на* E;
2. $\sup_n |\sigma_n(x)| < +\infty$ *почти всюду на* E;
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ *сходится почти всюду на* E;
4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ *сходится по мере безусловно на* E.

Подобная теорема для рядов Хаара доказана Ф. Арутюняном [6], а для мартингалов – Р. Ганди [7]. Последовательность частичных сумм ряда Хаара является регулярным мартингалом. В то же время последовательность частичных сумм ряда по общей системе Франклина не является мартингалом. Но как показывает теорема 3, ряды по общей системе Франклина имеют свойства, схожие со свойствами мартингалов.

Из теорем 1 и 3 вытекают следующие теоремы.

Теорема 4. *Если* $\inf_n \sigma_n(x) > -\infty, x \in E$, *то* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ *ряд сходится почти всюду на* E.

Теорема 5. *Если* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) = +\infty$ *на* E, *то* $\liminf_n \sigma_n(x) = -\infty$ *и* $\limsup_n \sigma_n(x) = +\infty$ *почти всюду на* E.

Подобные теоремы доказаны Ф. Арутюняном [6] для рядов Хаара и Чоу для мартингалов [8].

При доказательстве теоремы 1 важную роль играют следующие понятия и леммы.

Пусть δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Для $n \geq 2$ введем определение:

$$N_{n,i}(x) = \begin{cases} \delta_{ij}, \textit{при } x = s_{n,j}, \\ \textit{линейна на } \left[s_{n,j-1}, s_{n,j}\right], j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Заметим, что функции $N_{n,i}(t), i = 0, \ldots, n$ нормализованы в пространстве $C[0,1]$, а из соотношений $N_{n,i}(s_{n,j}) = \delta_{ij}$ следует, что система $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^{n}$ составляет базис в S_n. Обозначив $M_{n,i}(t) = \frac{2}{s_{n,i+1} - s_{n,i-1}} N_{n,i}(t)$, где $s_{n,-1} = s_{n,0} = 0, s_{n,n+1} = s_{n,n} = 1$, мы получаем другой базис в S_n, который нормализован в $L^1[0,1]$.

Поскольку система $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^{n}$ является базисом в S_n, то условие $f_n \perp S_{n-1}$ равносильно соотношениям

$$\int_0^1 f_n(t) N_{n-1,i}(t)\,dt = 0, \textit{ при } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

По определению общей системы Франклина мы имеем $f_m \perp S_{m-1}$ и $S_n \subset S_{m-1}$ при $m > n$. Следовательно,

$$\int_0^1 f_m(t)\varphi(t)\,dt = 0, \textit{ при } \varphi \in S_n \textit{ и } m > n.$$

Далее, для каждого ряда $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ и функции $\varphi \in S_n$ определяем скалярное произведение следующим образом:

$$(S, \varphi) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_0^1 f_m(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{m=0}^{n} a_m \int_0^1 f_m(t)\varphi(t)\,dt = (\sigma_n, \varphi).$$

Понятие скалярного произведения для рядов S и функции $\varphi \in S_n$ введено в [9] и было успешно применено в вопросах единственности рядов Франклина (см. [2, 10, 11).

Обозначим $\Delta_{n,i} = \left[s_{n,i-1}, s_{n,i+1} \right]$.

Лемма 1. *Для любого* n и i, $0 \le i \le n$ *имеем* $M_{n,i} = \sum_j \alpha_j M_{n+1,j}$, *где* $\sum_j \alpha_j = 1, \alpha_j \ge 0$ *и* $\alpha_j = 0$, *если* $\Delta_{n+1,j} \not\subset \Delta_{n,i}$.

Лемма 2. *Если* φ *линейна в промежутках* $\left[s_{n,i-1}, s_{n,i} \right]$ *и* $\left[s_{n,i}, s_{n,i+1} \right]$, *то*

$$\left(\varphi, M_{n,i} \right) = \frac{\lambda_{n,i}}{3\left(\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1} \right)} \varphi\left(s_{n,i-1} \right) + \frac{2}{3} \varphi\left(s_{n,i} \right) + \frac{\lambda_{n,i+1}}{3\left(\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1} \right)} \varphi\left(s_{n,i+1} \right).$$

Лемма 3. *Если* $\left(S, M_{n,i} \right) =: A < 0$, *то*

$$\mu\left(\left\{ x \in \Delta_{n,i} : \sigma_n\left(x \right) < \frac{A}{2} \right\} \right) > \frac{\mu\left(\Delta_{n,i} \right)}{3\left(\gamma + 1 \right)}.$$

Ереванский государственный университет
e-mail: mik.vazgen@gmail.com

В. Г. Микаелян

Об одном «мартингальном свойстве» ряда по общей системе Франклина

Доказан критерий почти всюду сходимости рядов по общей системе Франклина на множестве. Критерий аналогичен критерию, полученному Чоу для мартингалов, Ф. Арутюняном для рядов Хаара и Г. Геворкяном для рядов Франклина.

Վ. Գ. Միքայելյան

Ըստ Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի շարքերի՝ մեկ «մարտինգալային հատկության» մասին

Ապացուցված է, ըստ Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի շարքերի, համարյա ամենուրեք զուգամիտության հայտանիշ բազմության վրա։ Համանման հայտանիշ ապացուցել է Չոուն մարտինգալների համար, Ֆ. Հարությունյանը՝ Հաարի շարքերի համար, և Գ. Գևորգյանը՝ Ֆրանկլինի շարքերի համար։

V. G. Mikayelyan

On a «Martingale Property» of Series with Respect to General Franklin System

A criterion for almost everywhere convergence of general Franklin series on a set is proved. The criterion is similar to the ones obtained by Y.S. Chow for martingales, F. Arutyunyan for Haar series and G. Gevorkyan for Franklin series.

Литература

1. *Ciesielski Z.* – Studia Math. 1963. V. 23. P. 141-157.
2. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – Analysis Math. 2004. V. 164. P. 161-204.
3. *Gevorkyan G. G.* – Studia Math. 2019. V. 45. № 4. P. 803-815.
4. *Конягин С. В.* – Матем. заметки. 1988. т. 44. № 6. С. 770-784.
5. *Погосян М. П.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2000. Т. 35. № 2. С. 64-77.
6. *Арутюнян Ф. Г.* – Доклады АН АрмССР. 1966. Т. 42. № 3. С. 134-140.
7. *Gundy-Trans R.* – Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. P. 228-248.
8. *Chow Y. S.* – Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1963. V. 1. P. 340-346.
9. *Геворкян Г. Г.* – Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 5, С. 786–789.
10. *Геворкян Г. Г.* – Матем. сб. 2016. Т. 207. № 12 С. 30–53.
11. *Геворкян Г. Г.* – Матем. сб. 2018. Т. 209. № 6. С. 25–46.