ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 120 2020 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Академик Г. Г. Геворкян, Л. А. Акопян

Теоремы единственности кратных рядов Франклина

(Представлено 8/IV 2020)

Ключевые слова: *система Франклина, кратные ряды, теорема единственности.*

В работе рассматриваются кратные ряды Франклина. Доказываются теоремы единственности для таких рядов, частичные суммы которых либо сходятся по Прингсхейму, либо имеют последовательные пределы.

Напомним определение системы Франклина. Пусть $n = 2^\mu + \upsilon$, где $\mu = 0,1, ..., 1 \le \upsilon \le 2^\mu$. Обозначим

$$s_{n,i} = \begin{cases} \dfrac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{когда } 0 \le i \le 2\upsilon, \\ \dfrac{i-\upsilon}{2^\mu}, & \text{когда } 2\upsilon \le i \le n. \end{cases}$$

Обозначим через $\boldsymbol{S}_n$ пространство непрерывных и кусочно-линейных функций с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^{n}$, т.е. $f \in \boldsymbol{S}_n$, если $f \in C[0,1]$ и линейная на каждом отрезке $[s_{n,i-1}, s_{n,i}]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нетрудно заметить, что $\dim\boldsymbol{S}_n = n+1$ и множество $\{s_{n,i}\}_{i=0}^{n}$ получается добавлением точки $s_{n,2\upsilon-1}$ к множеству $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Следовательно, $\boldsymbol{S}_{n-1} \subset \boldsymbol{S}_n$ и его коразмерность равна 1. Поэтому существует единственная функция $f_n \in \boldsymbol{S}_n$ такая, что f_n ортогональна к $\boldsymbol{S}_{n-1}$ в $L^2[0,1]$, $\|f_n\| = 1$ и $f_n(s_{n,2\upsilon-1}) > 0$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0,1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, эквивалентным образом определенную Ф. Франклином [1].

Напомним, что множество E называется множеством единственности или -множеством (см. [2], с. 193) для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если из

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = 0, \quad \text{если } x \notin E,$$

следует, что $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Кантор [3] доказал, что пустое множество является -множеством для тригонометрической системы. С этой работы Кантора начались исследования вопросов единственности ортогональных рядов.

Скажем, что множество E является V-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если из

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = f(x), \quad \text{если } \ x \notin E,$$

где f всюду конечная интегрируемая функция, следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ является рядом Фурье функции f. Очевидно, что любое V-множество является U-множеством.

Одним из важных обобщений теоремы Кантора является теорема Валле-Пуссена [4]: любое счетное множество является V-множеством для тригонометрической системы. Отметим, что исследования вопросов единственности тригонометрических рядов продолжаются до сих пор. Исследования вопросов единственности рядов по системам Хаара, Уолша и их обобщений начались с работ [5-7] и продолжаются до сих пор. Исследования -множеств для системы Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ начаты недавно [8, 9]. В [10] доказаны теоремы о VP-множествах системы Франклина.

Теорема 1. *Пустое множество является V-множеством для системы Франклина.*

Теорема 1 следует из теоремы 2, доказанной в [10]. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{1}$$

есть ряд Франклина.

Теорема 2. *Если ряд (1) сходится по мере к интегрируемой функции f и всюду выполняется*

$$\sup\left|\sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x)\right| < \infty \ ,$$

то ряд (1) является рядом Фурье – Франклина функции f.

Из теоремы 2 с применением одной теоремы Л. Гоголадзе [11] можно получить, что если кратный ряд Франклина всюду сходится по Прингсхейму к всюду конечной интегрируемой функции f, которая интегрируема по любому набору переменных при фиксированных остальных переменных, то этот ряд является рядом Фурье – Франклина функции f.

Ниже сформулируем теоремы единственности кратных рядов Франклина, не только освободившись от требования интегрируемости функции f по любому набору переменных при фиксированных остальных переменных, но и потребовав сходимость ряда не всюду, а вне некоторого множества из определенного класса множеств.

Известно, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$, где $a_n = f_n(x_0)$ для некоторого $x_0 \in [0,1]$, всюду кроме точки x_0 сходится к нулю. Следовательно, любое одноточечное множество не является -множеством.

Как увидим ниже, для кратных рядов картина принципиально иная. Не только одноточечные множества, но и любое счетное множество является V-множеством (тем более U-множеством) для кратной системы Франклина. Более того, доказывается, что декартово произведение множеств меры нуль является V-множеством для кратной системы Франклина.

Через $\mathbb{N}_0$ обозначим множество неотрицательных целых чисел. Для натурального $k \geq 2$ обозначим через $\boldsymbol{x}$ векторы из $[0,1]^k$, а через $\boldsymbol{n}$ векторы с координатами из $\mathbb{N}_0$, т.е. $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $x_i \in [0,1]$, $i = 1, \dots, k$, и $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_k)$, $n_1 \in \mathbb{N}_0$ $i = 1, \dots, k$.

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормированная система Франклина на $[0,1]$. Обозначим через $\{\boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{x})\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^k}$ k-кратную систему Франклина, т.е.

$$\boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{x}) = f_{n_1}(x_1) \cdots f_{n_k}(x_k),\ \ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^k,\ \boldsymbol{x} \in [0,1]^k.$$

В данной работе рассматриваются кратные ряды Франклина

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^k} a_{\boldsymbol{n}} f_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in [0,1]^k, \tag{2}$$

с прямоугольными частичными суммами

$$\sum_{\boldsymbol{n}\leq \boldsymbol{N}} a_{\boldsymbol{n}} f_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

где запись $\boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{N}$ означает, что $n_i \leq N_i$, $i = 1, \dots, k$.

Говорят, что кратная числовая последовательность $S_{\boldsymbol{N}}$, $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}_0^k$, сходится по Прингсхейму (или по прямоугольникам) к числу A, если существует предел $\lim_{\boldsymbol{N}\to\infty} S_{\boldsymbol{N}} = A$, т.е.

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists M_0 \in \mathbb{N}_0$, такое, что $|S_{\boldsymbol{N}} - A| < \varepsilon$, если $\min_{1\leq i\leq k} N_i \geq M_0$.

В [10] доказано, что любое конечное множество является V-множеством для двойных рядов Франклина, сходящихся по Прингсхейму.

Определение. *Скажем, что множество* $E \subset [0,1]^k$ *является разреженным в* $[0,1]^k$, *если*

$$E \subset E_0,\ \text{где}\ E_0 = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k,\ \text{с}\ \mu(E_i) = 0,\ i = 1, \dots, k.$$

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть E – разреженное множество, ряд (2) с частичными суммами (3) удовлетворяет условиям*

$$\limsup_{\boldsymbol{N}} \left|\sum_{\boldsymbol{n}\leq\boldsymbol{N}} a_{\boldsymbol{n}} f_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\right| < \infty,\ \boldsymbol{x} \notin E$$

и существует последовательный предел

$$\lim_{N_1\to\infty} \cdots \lim_{N_k} \sum_{n_1=0}^{N_1} f_{n_1}(x_1) \cdots \sum_{n_k=0}^{N_k} f_{n_k}(x_k) = f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in [0,1]^k,$$

где f– всюду конечная интегрируемая функция. Тогда ряд (2) является рядом Фурье – Франклина функции f.

Теорема 4. *Пусть E – разреженное множество в $[0,1]^k$ и для ряда (2) с частичными суммами (3) выполняется*

$$\lim_{\boldsymbol{N}\to\infty} \sum_{\boldsymbol{n}\leq\boldsymbol{N}} a_{\boldsymbol{n}} f_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),\ x \notin E,$$

где f – всюду конечная интегрируемая функция. Тогда ряд (2) является рядом Фурье – Франклина функции f.

Очевидно, что любое счетное множество является разреженным в $[0,1]^k$. Поэтому из теоремы 4 получается следующая теорема.

Теорема 5. *Любое счетное множество является V-множеством для кратных рядов Франклина, сходящихся по Прингсхейму.*

При доказательстве теорем 4 и 5, наряду с некоторыми вспомогательными леммами, важную роль играют теорема 2 и следующая теорема, доказанная в работе [12].

Теорема 6. *Ряд (1) сходится почти всюду на множестве E тогда и только тогда, когда* $\sup_N \left|\sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)\right| < \infty$ *почти всюду на E.*

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОНКС РА в рамках проекта 18T-1A074.

Ереванский государственный университет
e-mails: ggg@ysu.am, levon.hakobyan5@ysumail.am

Академик Г. Г. Геворкян, Л. А. Акопян

Теоремы единственности кратных рядов Франклина

Доказано, что если кратный ряд по системе Франклина всюду кроме, быть может, некоторого множества, являющегося декартовым произведением множеств меры нуль, сходится к всюду конечной интегрируемой функции, то он является рядом Фурье – Франклина этой функции. Доказана также теорема единственности для кратных рядов Франклина, прямоугольные частичные суммы которых в каждой точке имеют последовательный предел.

Ակադեմիկոս Գ. Գ. Գևորգյան, Լ. Ա. Հակոբյան

Ֆրանկլինի բազմապատիկ շարքերի միակության թեորեմներ

Ապացուցված է, որ եթե Ֆրանկլինի համակարգով բազմապատիկ շարքն ամենուրեք, բացի գուցե ինչ-որ բազմությունից, որը զրո չափի բազմությունների դեկարտյան արտադրյալ է, զուգամիտում է ամենուրեք վերջավոր ինտեգրելի ֆունկցիայի, ապա այդ ֆունկցիայի Ֆուրիե-Ֆրանկլինի շարքն է: Ապացուցված է նաև միակության թեորեմ Ֆրանկլինի բազմապատիկ շարքերի համար, որոնց ուղղանկյուն մասնակի գումարներն ունեն հաջորդական սահման:

Academician G. G. Gevorkyan, L. A. Hakobyan

Uniqueness Theorems on Multiple Franklin Series

In this paper it is proved that if a multiple Franklin series converges everywhere except possibly on a set which a Cartesian product of measure zero sets, to a finite and integrable function, then it is the Fourier – Franklin series of that function. A uniqueness theorem for multiple Franklin series is also proved for series whose rectangular partial sums have a finite iterated limit at every point.

Литература

1. *Franklin Ph.* – Math. Anallen. 1928. V. 100. P. 522-529.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. Физматгиз. 1961. 936 с.
3. *Cantor G.* – Mathematisce Annalen. 1872. V. 5. P. 123-132.

4. *Valle-Poussin Ch. L.* – Bull. Acad. Roy. de Belg. 1912. P. 702-718.
5. *Арутюнян Ф. Г.* – ДАН АрмССР. 1964. Т. 38. С. 129-134.
6. *Петровская М. Б.* – Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 773-798.
7. *Скворцов В. А.* – Вестник МГУ. Сер. матем. 1964. Т. 5. С. 3-6.
8. *Геворкян Г. Г.* – Мат. заметки, 2015. Т. 98. С. 786-789.
9. *Геворкян Г. Г.* – Мат. сборник. 2016. Т. 207. С. 30-53.
10. *Геворкян Г. Г.* – Мат. сборник. 2018. Т. 209. С. 25-46.
11. *Гоголадзе Л. Д.* – Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72. С. 83-90.
12. *Геворкян Г. Г.* – Analysis Math. 1990. V. 16. P. 87-114.