Э. Е. ХАЧИЯН, А. А. БЕННЕЯН

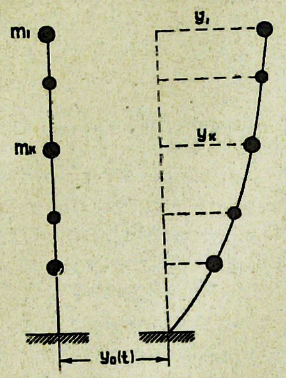
ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ НА СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ ПРИ ПОМОЩИ ЭВМ

В статье рассматриваются колебания консольного бруса с сосредоточенными массами под воздействием горизонтальных колебаний основания по заданному закону. Связь между напряжениями и деформациями подчиняется диаграмме Прандтля. Разработан алгоритм решения этой задачи на электронной вычислительной машине.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

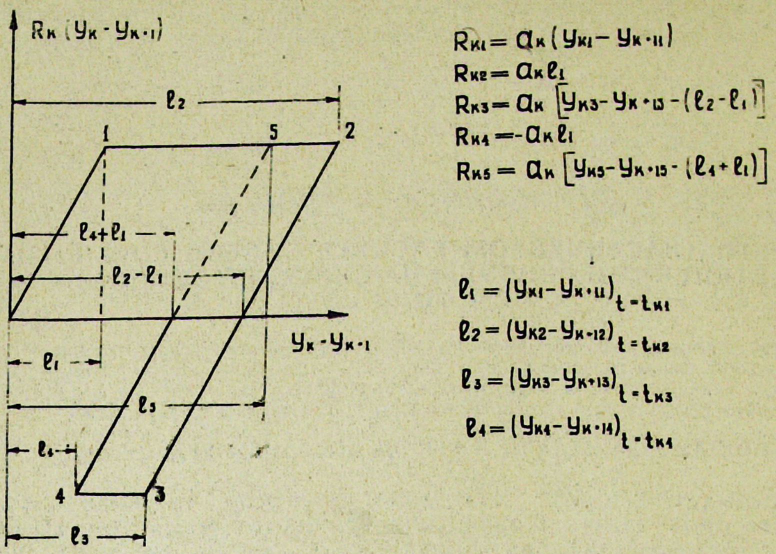
В предыдущей статье [1] была разработана методика решения некоторых задач теории сейсмостойкости по акселерограммам сильных землетрясений при помощи ЭВМ. Данная работа является продолжением и развитием этой статьи [1] и относится к проблеме упруго-пластического расчета систем со многими степенями свободы.

В качестве расчетной схемы будем принимать консольный брус с сосредоточенными массами (фиг. 1). Считаем, что основание бруса колеблется в горизонтальном направлении по закону акселерограммы землетрясения. Связь между напряжением и деформацией (между восстанавливающей силой и перемещением) принимаем в виде известной диаграммы Прандтля (фиг. 2). Дифференциальные уравнения упругих колебаний системы, показанной на фиг. 1, легко составить, пользуясь обычными методами динамики сооружений. Однако при учете упруго-пластических деформаций не все способы составления дифференциальных уравнений одинаково удобны для вычислительных работ.



Фис. 1. Расчетная схема.

В частности, при составлении дифференциальных уравнений методом единичных сил в каждое уравнение входят восстанавливающие силы всех этажей, что создает трудности вычислительного характера при упруго-пластических колебаниях, так как в каждом уравнении придется иметь дело с несколькими переменными величинами. Поэтому дифференциальные уравнения колебания системы мы составим таким образом, чтобы в каждое уравнение входила только одна восстанавливающая сила, соответствующая данному этажу. Для удобства нарушим обычный способ нумерации этажей и отсчет начнем с верхнего этажа. Итак, масса, жесткость и перемещение k-го этажа соответственно обозначим через m_{n-k+1}, a_{n-k+1}, y_{n-k+1}, где n—число этажей. При колебаниях принимается, что перекрытия здания совершают только горизонтальные колебания без поворота в вертикальной



Фиг. 2. Расчетная диаграмма Прандтля.

плоскости, поэтому восстанавливающая сила данного этажа полностью будет определяться только разностью двух перемещений данного и следующего нижнего этажа.

Из условия равновесия всех сил, действующих между массами с индексами k и $k+1$ вытекает следующее уравнение движения массы m_k:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i y_i'' + R_k(y_k - y_{k+1}) + \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_k (y_k' - y_{k+1}') = -\sum_{i=1}^{k} m_i y_0''(t),$$

где R_k — восстанавливающая сила k-го этажа;

a_k — жесткость k-го этажа;

α_k — коэффициент внутреннего трения k-го этажа;

$y_0''(t)$ — закон ускорения грунта (акселерограмма), которая задается таблично [1].

Принимая $k=1,2,\ldots n$ и $y_{n+1}=0$, можно получить дифференциальное уравнение любой массы с индексом k. Если система будет колебаться в пределах линейных упругих деформаций, то восстанавливающие силы будут пропорциональны разностям $y_k - y_{k+1}$, т. е.

$$R_k = a_k(y_k - y_{k+1}).$$

Теперь допустим, что система колеблется по упруго-пластической диаграмме Прандтля (фиг. 2). Обозначим перемещения в упругой стадии (0—1) через y_{k1}, в стадии пластического течения (1—2) — через y_{k2}, в стадии разгрузки (2—3) — через y_{k3}, в стадии второго пластического течения (3—4) — через y_{k4} и в стадии второго нагружения (4—5) — через y_{k5}.

Дифференциальное уравнение колебания k-ой массы в упругой стадии будет

$$\sum_{i=1}^{k} m_i y_{i1}'' + a_k(y_{k1} - y_{k+11}) + \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_k (y_{k1}' - y_{k+11}') =$$
$$= - \sum_{i=1}^{k} m_i y_0''(t). \qquad (1.1)$$
$$k = 1, 2, \ldots n.$$

Этим уравнением пользуемся до тех пор, пока соответствующие напряжения ниже предела текучести. Напряжения на уровне данного этажа при жестких перекрытиях определяются величиной поперечной силы. Поперечная сила на уровне данного этажа есть сумма всех сил инерции, действующих выше этажа, т. е.

$$Q = \sum_{i=1}^{k} m_i (y_{i1}'' + y_0'').$$

Как видно из уравнения (*1.1*), при упругих колебаниях для маленьких значений коэффициентов внутреннего трения α_k поперечные силы будут пропорциональны величинам относительных перемещений $y_k - y_{k+1}$. Поэтому упруго-пластическое поведение системы полностью можно характеризовать значениями величин $y_k - y_{k+1}$. Допустим, что при $t = t_{k1}$ на k-ом этаже начинается пластическое течение, тогда восстанавливающая сила на уровне данного этажа будет постоянной и равной

$$R_{k2} = a_k (y_{k1} - y_{k+11}) \big|_{t=t_{k1}}.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{k} m_i y_{i2} + a_k (y_{k1} - y_{k+11}) \big|_{t=t_{k1}} + \sqrt{m_k a_k}\, \alpha_k (y_{k2}' - y_{k+12}') =$$
$$= - \sum_{i=1}^{k} m_i y_0''(t), \quad k = 1, 2, \ldots n; \quad \text{для} \quad t > t_{k1}. \qquad (1.2)$$

Уравнением (1.2) пользуемся до тех пор, пока происходит пластическое течение, т. е. пока скорость деформации не равнялась нулю:

$$y_{k2}' - y_{k+12}' \neq 0 \quad \text{для} \quad t > t_{k1}. \qquad (a)$$

Обозначим через t_{k2} момент времени, при котором впервые нарушается условие (а). Значение $y_{k2} - y_{k+12}$ в этот момент обозначим через $(y_{k2} - y_{k+12}) \big|_{t=t_{k2}}$. После момента времени t_{k2} начинается разгрузка (*2—3*, фиг. 2); восстанавливающая сила будет иметь вид

$$R_{k3} = a_k \left[y_{k3} - y_{k+13} (y_{k2} - y_{k+12}) \Big|_{t=t_{k2}} + (y_{k1} - y_{k+11}) \Big|_{t=t_{k1}} \right].$$

Дифференциальное уравнение движения в этой стадии можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i y_{i3}'' + a_k \left[y_{k3} - y_{k+13} - (y_{k2} - y_{k+12}) \Big|_{t=t_{k2}} + (y_{k1} - y_{k+11}) \Big|_{t=t_{k1}} \right] +$$
$$+ \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_k (y_{k3}' - y_{k+13}') = - \sum_{i=1}^{k} m_i y_0''(t), \qquad (1.3)$$

$k = 1, 2, \ldots n$; для $t > t_{k2}$.

Как только $y_{k3} - y_{k+13}$ достигнет значения

$$y_{k3} - y_{k+13} = (y_{k2} - y_{k+12}) \Big|_{t=t_{k2}} - 2(y_{k1} - y_{k+11}) \Big|_{t=t_{k1}}$$

восстанавливающая сила снова достигнет предельного значения, но со знаком минус:

$$R_{k4} = -a_k (y_{k1} - y_{k+11})\big|_{t=t_{k1}},$$

а уравнение движения примет вид

$$\sum_{i=1}^{k} m_i y_{i4}'' - a_k (y_{k1} - y_{k+11})\big|_{t=t_{k1}} + \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_k (y_{k4}' - y_{k+14}') =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} m_i y_0''(t), \tag{1.4}$$

$k = 1, 2, \ldots n$; для $t > t_{k3}$.

Этим уравнением можно пользоваться до тех пор, пока происходит пластическое течение в обратном направлении, т. е. пока скорость деформации не равна нулю:

$$y_{k4}' - y_{k+14}' \neq 0 \quad \text{для} \quad t > t_{k3}. \tag{б}$$

Обозначим через t_{k4} момент времени, при котором впервые нарушается условие (б). Значение $y_{k4} - y_{k+14}$ в этот момент обозначим через $(y_{k4} - y_{k+14})\big|_{t=t_{k4}}$. После момента времени t_{k2} начнется нагрузка (4—5) и восстанавливающая сила будет иметь вид

$$R_{k5} = a_k \left[y_{k5} - y_{k+15} - (y_{k4} - y_{k+14})\big|_{t=t_{k4}} - (y_{k1} - y_{k+11})\big|_{t=t_{k1}} \right].$$

Тогда дифференциальное уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i y_{i5}'' + a_k \left[y_{k5} - y_{k+15} - (y_{k4} - y_{k+14})\big|_{t=t_{k4}} - (y_{k1} - y_{k+11})\big|_{t=t_{k1}} \right] +$$

$$+ \sqrt{m_k a_k}\, \alpha_k (y_{k5}' - y_{k+15}') = -\sum_{i=1}^{k} m_i y_0''(t), \tag{1.5}$$

$k = 1, 2, \ldots n$; для $t > t_{k4}$.

Как только $y_{k5} - y_{k+15}$ достигнет значения

$$y_{k5} - y_{k+15} = (y_{k4} - y_{k+14})\big|_{t=t_{k4}} + 2 (y_{k1} - y_{k+11})\big|_{t=t_{k1}}$$

восстанавливающая сила снова достигнет предельного значения $a_k (y_{k1} - y_{k+11})\big|_{t=t_{k1}}$ и начнется второй цикл упруго-пластических деформаций. После момента времени t_{k5}, при котором выполняется вышенаписанное условие, уравнение (1.5) переходит в уравнение (1.2). После этого уравнение (1.2) переходит в уравнение (1.3), (1.3) в (1.4), (1.4) в (1.5) и снова уравнение (1.5) в (1.2), (1.2) в (1.3) и т. д. согласно выше описанным условиям переходов. Этот процесс продолжается до полного прекращения действия функции $y_0''(t)$. Если где-нибудь окажется, что не выполняются условия переходов, то вычисление производится по уравнению данной стадии.

Таким образом, принципиальный путь решения задачи очевиден. Однако вся трудность задачи заключается в том, что не все уравнения системы одновременно переходят из одной стадии в другую. В принципе моменты времени, при котором одно уравнение переходит в другое для разных этажей могут быть совершенно разные. И поэтому мы имеем дело не с 5 системами уравнений, а с 5^n системами уравнений.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ЭВМ

Постановка задачи. Чтобы решить систему линейных дифференциальных уравнений по методу, который будет изложен ниже, сделаем обозначения:

$$y_{ki}'(t) = y_{n+ki}(t)$$

$$k = 1, 2, \dots n$$

$$i = 1, 2, \dots 5,$$

Тогда вместо систем (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) получим следующие системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$.

I система

$$\begin{cases} y_{k1}'(t) = y_{n+k1}(t), \\ y_{n+k1}'(t) = \Big\{ -a_k [y_{k1}(t) - y_{k+11}(t)] - \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_c [y_{n+k1}(t) - \\ \quad - y_{n+k+11}(t)] - y_0''(t) \sum\limits_{i=1}^{k} m_i - \sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i y_{n+i1}'(t) \Big\} \cdot \dfrac{1}{m_k} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y_{k1}(0) = 0,$$

$$y_{n+k1}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots n.$$

II система

$$\begin{cases} y_{k2}'(t) = y_{n+k2}(t), \\ y_{n+k2}'(t) = \Big\{ -a_k [y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_{k1})] - \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_k [y_{n+k2}(t) - \\ \quad - y_{n+k+12}(t)] - y_0''(t) \sum\limits_{i=1}^{k} m_i - \sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i y_{n+i2}'(t) \Big\} \cdot \dfrac{1}{m_k} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y_{k2}(t_{kl}) = y_{kl}(t_{kl}),$$

$$y_{n+k2}(t_{kl}) = y_{n+kl}(t_{kl}), \quad k = 1, 2, \dots n$$

$$l = 1,5.$$

III система

$$\begin{cases} y_{k3}'(t) = y_{n+k3}(t), \\ y_{n+k3}'(t) = \Big\{ -a_k \{ y_{k3}(t) - y_{k+13}(t) - [y_{k2}(t_{k2}) - y_{k+12}(t_{k2})] + \\ \quad + [y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_{k1})] \} - \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_k [y_{n+k3}(t) - \\ \quad - y_{n+k+13}(t)] - y_0''(t) \sum\limits_{i=1}^{k} m_i - \sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i y_{n+i3}'(t) \Big\} \cdot \dfrac{1}{m_k} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y_{k3}(t_{k2}) = y_{k2}(t_{k2}),$$

$$y_{n+k3}(t_{k2}) = y_{n+k2}(t_{k2}), \quad k = 1, 2, \dots n.$$

IV система

$$\begin{cases} y_{k4}'(t) = y_{n+k4}(t), \\ y_{n+k4}'(t) = \Big\{ a_k[y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_{k1})] - \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_k [y_{n+k4}(t) - \\ \quad - y_{n+k+14}(t)] - y_\circ''(t) \sum_{i=1}^{k} m_i - \sum_{i=1}^{k-1} m_i y_{n+i}'(t) \Big\} \cdot \frac{1}{m_k} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y_{k4}(t_{k3}) = y_{k3}(t_{k3}),$$
$$y_{n+k4}(t_{k3}) = y_{n+k3}(t_{k3}), \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

V система

$$y_{k5}'(t) = y_{n+k5}(t)$$

$$y_{n+k5}'(t) = \Big\{ -a_k \{ y_{k5}(t) - y_{k+15}(t) - [y_{k4}(t_{k4}) - y_{k+14}(t_{k4})] -$$
$$- [y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_{k1})] \} - \sqrt{a_k m_k}\, \alpha_k [y_{n+k5}(t) - y_{n+k+15}(t)] -$$
$$- y_\circ''(t) \sum_{i=1}^{k} m_i - \sum_{i=1}^{k-1} m_i y_{n+i}'(t) \Big\} \cdot \frac{1}{m_k}$$

с начальными условиями

$$y_{k5}(t_{k4}) = y_{k4}(t_{k4}),$$
$$y_{n+k5}(t_{k4}) = y_{n+k4}(t_{k4}), \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

α_k, a_k, m, $k=1, 2, \ldots n$ постоянные, а значения функции $y_\circ''(t)$ заданы таблично.

Первая часть задачи.

Найти

$$\delta_k = \max_{0<t<t_\circ} [y_{k1}(t) - y_{k+11}(t)],$$

$$\delta_n = \max_{0<t<t_\circ} y_{n1}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots n-1,$$

где $y_{k1}(t)$, $k = 1, 2 \ldots n$ является первыми n функциями решений I системы, $t_\circ$—последнее значение аргумента функции $y_\circ''(t)$.

Вторая часть задачи.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, полученных из сопряжения уравнений систем I, II, III, IV и V в интервале $(0\ t_\circ)$ по следующим условиям.

Для $n+k$-го уравнения I системы интервал интегрирования брать равным

$$(0\ t_{k1}),$$

где t_{k1}—значение аргумента, при котором

$$|\, y_{k1}(t) - y_{k+11}(t) \,| = \gamma_k \,|\, \delta_k \,| \tag{2.1}$$
$$|\, y_{n1}(t) \,| = \gamma_n \,|\, \delta_n \,| . \qquad k = 1, 2, \ldots n-1.$$

(γ_k—постоянное число меньше 1).

Для $n+k$-го уравнения II системы интервал интегрирования брать равным

$$(t_{kl}\ t_{k2}) \qquad l = 1{,}5,$$

где t_{k2}—значение аргумента, при котором

$$y_{n+k2}(t) - y_{n+k+12}(t) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n. \tag{2.2}$$

Для $n+k$-го уравнения III системы интервал интегрирования брать равным

$$(t_{k2}\ t_{k3}),$$

где t_{k3}—значение аргумента, при котором

$$y_{k3}(t) - y_{k+13}(t) = y_{k2}(t_{k2}) - y_{k+12}(t_{k2}) - 2[y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_{k1})]$$

$$y_{n3}(t) = y_{n2}(t_{n2}) - 2\, y_{n1}(t_{n1}), \qquad k = 1, 2, \ldots n-1. \tag{2.3}$$

Для $n+k$-го уравнения IV системы интервал интегрирования брать равным

$$(t_{k3}\ t_{k4}),$$

где t_{k4}—значение аргумента, при котором выполняется условие

$$y_{mk4}(t) - y_{n+k+14}(t) = 0. \tag{2.4}$$

Для $n+k$-го уравнения V системы интервал интегрирования брать равным

$$(t_{k4}\ t_{k5}),$$

где t_{k5}—значение аргумента, при котором

$$y_{k5}(t) - y_{k+15}(t) = y_{k4}(t_{k4}) - y_{k+14}(t_{k4}) + 2[y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_1)]$$

$$y_{n5}(t) = y_{n4}(t_{n4}) + 2\, y_{n1}(t_{n1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.5}$$

Если в интегрируемой системе $n+k$-ое уравнение является уравнением l-ой системы дифференциальных уравнений, то при выполнении условия (l) $n+k$-ое уравнение заменяется $n+k$-ым уравнением $(l+1)$-ой системы, причем если $n+k$-ое уравнение интегрируемой системы является уравнением V системы и выполняется условие (2.5), то с исключением вышесказанного $n+k$-ое уравнение интегрируемой системы заменяется с $n+k$-ым уравнением II системы.
Интегрирование прекращается при значении аргумента

$$t = t_0.$$

М е т о д р е ш е н и я з а д а ч и. Приближенные значения искомых функций системы дифференциальных уравнений находятся методом Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага и с данной точностью ε.

Формулы метода Рунге—Кутта имеют вид

$$y_i(t+h) = y_i(t) + K^{(i)}, \tag{2.6}$$

где

$$K^{(i)} = \frac{1}{6} K_1^{(i)} + \frac{1}{3} K_2^{(i)} + \frac{1}{4} K_3^{(i)} + \frac{1}{6} K_4^{(i)},$$

$$K_1^{(i)} = h \cdot f_i\,[t\ y_1(t)\ y_2(t), \ldots, y_n(t)],$$

$$K_2^{(i)} = h \cdot f_i\left[t + \frac{h}{2}\ y_1(t) + \frac{K_1^{(1)}}{2} \cdot y_2(t) + \frac{K_1^{(2)}}{2}, \ldots, y_n(t) + \frac{K_1^{(n)}}{2}\right], \tag{2.7}$$

$$K_3^{(i)} = h \cdot f_i\left[t + \frac{h}{2}\ y_1(t) + \frac{K_2^{(1)}}{2}\ y_2(t) + \frac{K_2^{(2)}}{2}, \ldots, y_n(t) + \frac{K_2^{(n)}}{2}\right],$$

$$K_4^{(i)} = h \cdot f_i\,[t + h\ y_1(t) + K_3^{(1)},\ y_2(t) + K_3^{(2)}, \ldots, y_n(t) + K_3^{(n)}],$$

h—значение шага вычислений,
$f_i[\ldots]$—правая часть системы дифференциальных уравнений.

Значение функций $y_0''(t)$ в нужных точках табулируется с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\dots(t-t_{p-1})(t-t_p)}{(t_i-t_1)(t_i-t_2)\dots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\dots(t_i-t_{p-1})(t_i-t_p)}\, y_0''(t_i). \tag{2.8}$$

Описание алгоритма. Процесс численного интегрирования состоит из последовательных этапов, каждый из которых заключается в том, что по известным значениям $y_i(t)$ $(i=1, 2, \dots n)$ и исходной величине шага h_0 с помощью формул вычисляются значения $y_i(t+h)$, причем шаг $h\,(h \leqslant h_0)$ выбирается так, чтобы он обеспечивал заданную точность вычислений; наряду с этим определяется исходная величина шага h_0 для следующего этапа.

Каждый этап реализуется по следующему алгоритму. Берется $h=h_0$

a) по значениям y_i в точке t по формуле (2.6) находится значение решения $\bar{y}_{i1}$ $i=1, 2, \dots n$ в точке $t+h$,

b) по значениям y_i $i=1, 2, \dots n$ в точке t по формуле (2.6) находится значение решения $\tilde{y}_{i1}$ в точке $t+\frac{h}{2}$,

c) по значениям $\tilde{y}_{i1}$ в точке $t+\frac{h}{2}$ по той же формуле (2.6) вычисляется значение решения $\bar{\bar{y}}_{i1}$ в точке $t+h$.

Вычисляется разность

$$\mu_1 = \max_i |\bar{y}_{i1} - \bar{\bar{y}}_{i1}|.$$

Значение μ_1 сравнивается с заданной погрешностью ε. Если $\mu_1 \geqslant \varepsilon$, то шаг h не обеспечивает требуемой точности в данной точке отрезка интегрирования. В этом случае шаг h делится пополам.

В качестве $\bar{y}_{i2}$ $(i=1, 2, \dots n)$ берется вычисленное ранее значение $\tilde{y}_{i1}$ в точке $t+\frac{h}{2}$.

По значениям y_i $i=1, 2, \dots n$ в точке t по формуле (2.6) находится значение решения $\tilde{y}_{i2}$ в точке $t+\frac{h}{4}$.

По значениям $\tilde{y}_{i2}$ в точке $t+\frac{h}{4}$ по той же формуле (2.6) вычисляется значение решения $\bar{\bar{y}}_{i2}$ в точке $t+\frac{h}{2}$ $i=1, 2, \dots n$.

Составляется

$$\mu_2 = \max_1 |\bar{y}_{i2} - \bar{\bar{y}}_{i2}|,$$

Если

$$\mu_2 \geqslant \varepsilon,$$

то процесс деления повторяется до выполнения условия

$$\mu_l < \varepsilon.$$

В качестве $y_i\left(t+\frac{h}{2^{l-1}}\right)$ $i=1, 2, \dots n$ для следующего этапа берется значение $\bar{\bar{y}}_{il}$, а за исходную величину шага принимается

$$\frac{h}{2^{l-1}} \cdot 2.$$

Условия (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) назовём условиями перехода, а значение аргумента, при котором выполняется условие перехода, назовем точкой перехода.

Опишем осуществление в ЭВМ проверку выполнения условий переходов.

Вводим функции:

$$\sigma_{k1}(t) = | y_{k1}(t) - y_{k+11}(t) | - \gamma_k | \delta_k |, \quad k = 1, 2, \ldots n-1$$

$$\sigma_{n1}(t) = | y_{n1}(t) | - \gamma_n | \delta_n |,$$

$$\sigma_{k2}(t) = [y_{n+k2}(t) - y_{n+k+12}(t)] [y_{n+k1}(t_{k1}) - y_{n+1+11}(t_{k1})],$$
$$k = 1, 2, \ldots n.$$

$$\sigma_{k3}(t) = \{y_{k3}(t) - y_{k+13}(t) - y_{k2}(t_{k2}) - y_{k+12}(t_{k2}) - 2[y_{k1}(t_{k1}) -$$
$$- y_{k+11}(t_{k1})]\}\} \cdot [y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_{k1})], \quad k=1, 2, \ldots n-1.$$

$$\sigma_{n3}(t) = \{y_{n3}(t) - [y_{n2}[y'_{n2}(t_{n2}) - 2y_{n1}(t_{n1})]\} y_{n1}(t_{n1}),$$

$$\sigma_{k4}(t) = \{y_{n+k4}(t) - y_{n+k+14}(t)\} [y_{n+k3}(t_{k3}) - y_{n+k+13}(t_{k3})],$$
$$k = 1, 2, \ldots n$$

$$\sigma_{k5}(t) = \{y_{k5}(t) - y_{k+15}(t) - \{y_{k4}(t_{k4}) - y_{k+14}(t_{k4}) +$$
$$+ 2[y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_{k1})]\}\} [y_{k1}(t_{k1}) - y_{k+11}(t_{k1})],$$
$$k = 1, 2, \ldots n = 1$$

$$\sigma_{n5}(t) = \{y_{n5}(t) - [y_{n4}(t_{n4}) + 2y_{n1}(t_{n1})]\} y_{n1}(t_{n1}).$$

Проверка выполнения условий (2.1). Так как

$$\sigma_{k1}(0) < 0,$$
$$\sigma_{n1}(0) < 0,$$

то t_{k1} берется равным значению аргумента t ($t>0$), при котором первый раз выполняется условие

$$\sigma_{k1}(0) \geqslant 0,$$
$$\sigma_{n1}(0) \geqslant 0.$$

Проверка выполнения условий (2.2).

$$\sigma_{k2}(t_{k1}) > 0,$$

t_{k2} берется равным значению аргумента $t(t>t_{kl}\ l = 1,5)$, при котором первый раз выполняется условие

$$\sigma_{k2}(t) \leqslant 0.$$

Проверка выполнения условий (2.3).

$$\sigma_{k3}(t_{k2}) > 0,$$
$$\sigma_{n3}(t_{n2}) > 0.$$

t_{k3} берется равным значению аргумента t ($t>t_{k2}$), при котором первый раз выполняется условие

$$\sigma_{k3}(t) \leqslant 0.$$
$$\sigma_{n3}(t) \leqslant 0.$$

Проверка выполнения условий (2.4)

$$\sigma_{k4}(t_{k3}) > 0,$$

t_{k4} берется равным значению аргумента $t\,(t > t_{k3})$, при котором первый раз выполняется условие

$$\sigma_{k4}(t) \leqslant 0.$$

Проверка выполнения условий (2.5).

$$\sigma_{k5}(t) < 0,$$

$$\sigma_{n5}(t) < 0,$$

t_{k5} берется равным значению аргумента $t\,(t > t_{k4})$, при котором первый раз выполняется условие

$$\sigma_{k5}(t) \geqslant 0,$$

$$\sigma_{n5}(t) \geqslant 0,$$

Каждому $n+k$-ому ($k=1, 2, \ldots n$) уравнению интегрируемой системы сопоставлен счетчик i_k, принимающий значения 1, 2, 3, 4, 1, которые показывают какое условие перехода выполнено, кроме того случая, когда выполняется условие (2.5), при котором счетчик i_k принимает значение 1. Это дает возможность узнать, какой системе принадлежит $n+k$-ое уравнение интегрируемой системы.

Если содержимое счетчика равно l, то в интегрируемой системе $n+k$-ое уравнение принадлежит $l+1$-ой системе дифференциальных уравнений.

При выполнении данного условия перехода вычисляются и сохраняются величины, зависимые от значений искомых функций в точке перехода, которые нужны для вычисления $\sigma_{ks}(t)$ и тех правых частей дифференциальных уравнений, которые заменяют уравнениям интегрируемой системы при выполнении условий перехода.

Схемы программ решения задачи. Схема программы решения систем дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутта с автоматическим выбором шага:

$$\Phi\,(0 \to s)\,(2h \to h)\,A\,Q\,P_2,$$

где

$$P_2 \equiv \downarrow^{6}(0 \to j)(A_1^{(1)} \to A_i^{(l)}) \downarrow^{2,5}\left(\frac{h}{2} \to h\right) f(j)\,E_1\,D\,(0 \to i) \downarrow^{1} A_i^{(l)} \times$$

$$\times\, F(i)\,f(i)\,P\,(i = n) \uparrow^{1} (A_1^{(2)} \to A_i^{(l)})\,P\,(2 \leqslant j) \uparrow^{2} D \times$$

$$\times\,(0 \to k)\,(B_1 \to B_k) \downarrow^{3} B_k\,P\,(\omega_1 > \varepsilon) \uparrow^{4} C \uparrow^{5} \downarrow^{4} F(k) \times$$

$$\times\, f(k)\,P\,(k = n) \uparrow^{3} (2h \to h)\,E_2\,(s + h \to S)\,P\,(h_n - s < \varepsilon) \uparrow^{6} Q.$$

Описание операторов

Φ—формирует вид команд, зависящих от n (n—число уравнений в данной системе).

A—передает начальное значение аргумента и начальные значения искомых функций в рабочие ячейки.

E_1—передает значения аргумента и значения искомых функций из одной группы рабочих ячеек в другие рабочие ячейки.

D—вычисляет те значения аргумента и искомых функций, для которых нужно вычислить правые части; организует переход с возвратом к программе вычисления правых частей и получает значения $K^{(i)}$ (формула (2.7)).

$A_i^{(1)}$ и $A_i^{(2)}$—вычисляют значения $y_i(t+h)$ по формуле (2.6).

B_k—вычисляет значение $y'_k(t+h)$ по формуле (2.6) и значение μ_k.

E_2 и C—передают значения искомых функций из одной группы рабочих ячеек в другую группу ячеек.

Q—переводит аргумент и значение искомых функций в десятичную систему исчисления и отпечатывает их.

Схема программы вычисления правых частей систем дифференциальных уравнений:

$$(0 \to j)\ (N_1 \to N_j)\downarrow^7 N_j\, F(j)\, f(j)\, P(j=n)\uparrow^7 У_t\,(0 \to k)$$

$$(M_{11} \to M_{lk})\downarrow^8 (0 \to l)\, P(i_k = l)\uparrow^9 S\, M_{lk}\uparrow^{10}\downarrow^9 f(l)\uparrow^{11}\downarrow^{10} F(k)$$

$$f(k)\ P(k=n)\uparrow^8.$$

Описание операторов

N_l—получает значение $f_j\ (j=1, 2,\dots n)$.

M_{lk}—вычисляет значение правой части $n+k$-ого уравнения $l+1$-ой системы дифференциальных уравнений.

S—формирует вид оператора M_{lk}, зависящей от значения индекса l.

$У_t$—вычисляет значение $y_0''(t)$ по методу интерполяционного полинома Лагранжа в данной точке t.

Схема программы вычисления $\delta_k\ (k=1, 2,\dots n)$.

$$(0 \to r)\ (R_1 \to R_r)\ ^{12} R_r\, F(r)\, f(r)\, P(r=n)\uparrow^{12} \Phi\, (0 \to s)\ (2h \to h)\ A$$

$$Q\downarrow^{14} P_2(0 \to q)\ (T_1 \to T_q)\downarrow^{13} T_q\, F(q)\, f(q)\, P(q=n)\uparrow^{13} P(t \geqslant t_0)\uparrow^{14} \text{ стоп.}$$

Описание операторов

R_r—очищает ячейку счетчика i_r и ячейку b_r, где получается значение δ_r.

T_q—получает значение δ_q в ячейке b_q в интервале $(t\ t+h)$.

Схема программы II части задачи

$$(0 \to j)\ (I_1 \to I_j)\downarrow^{15} I_j\, F(j)\, f(j)\, P(j=n)\uparrow^{15} \Phi\ (0 \to s)\ (2h \to h)\ A\ Q$$

$$\downarrow^{20} P_2(0 \to k)\ (H_{11} \to H_{ok})\downarrow^{16} (0 \to l)\downarrow^{17} P(i_k = l)G\, H_{lk}\uparrow^{19}\downarrow^{18}$$

$$f(l)\ ^{17}\ ^{19} F(k)\, f(k)\, P(k=n)\ ^{16} P(t \geqslant t_0)\uparrow^{20} \text{ стоп.}$$

Описание операторов

I_j—очищает счетчик i_j и получает значение $\gamma_j\ |\delta_j|$.

H_{lk}—проверяет выполнение условия перехода l и при выполнении этого условия меняет значение счетчика i_k.

При вычислении отпечатались значения ископаемых функций в точках акселерограммы, а в точках переходов, кроме функций также значения счетчиков, указывающие, в какой стадии находится данная масса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Е. Хачиян, Л. Б. Бабаян. Решение некоторых задач теории сейсмостойкости при помощи современных электронных вычислительных машин. Инженерная сейсмология, № 3—4, АН Тадж. ССР, 1965.

Армянский институт стройматериалов и сооружений
Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета