А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 21 АВГУСТ, 1984 ВЫПУСК 1

УДК 524.834

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Г. Г. АРУТЮНЯН, В. В. ПАПОЯН

Поступила 13 октября 1983
Принята к печати 20 марта 1984

Найдено решение задачи о гравитационном поле сосредоточенной массы в обобщенной теории тяготения. Решение получено в гармонических координатах, что позволяет достаточно просто переписать его в изотропных, шварцшильдовских и любых других координатах.

1. Введение. Основанная на глубоком и всестороннем анализе наблюдательных данных космогоническая концепция Амбарцумяна [1] приводит к заключению о существовании равновесных сверхплотных объектов с массами порядка галактической. Теория тяготения Эйнштейна ограничивает массы равновесных сверхплотных тел значениями порядка массы Солнца. Такое несоответствие в некотором смысле может служить основанием для разработки отличных от эйнштейновского варианта теорий тяготения. Наиболее жизнеспособной из существующих неэйнштейновских теорий является, на наш взгляд, обобщенная теория тяготения (ОТТ), предложенная Йорданом [2], модифицированная Брансом и Дикке (см., например [3]) и независимо Саакяном с сотрудниками [4].

В ОТТ гравитационное поле определяется десятью компонентами метрического тензора и скалярным полем, которое создается веществом и негравитационными полями, участвует в формировании метрики посредством полевых уравнений и косвенно, через метрику воздействует на вещество. При определенных значениях параметров ОТТ совпадает с общей теорией относительности (ОТО). Показано, что ОТТ, в отличие от ОТО, допускает существование сверхплотных сверхмассивных конфигураций [4]. Изложенное позволяет считать каждый новый результат обобщенной теории тяготения заслуживающим внимания, как в смысле астрофизических приложений, так и для дальнейших оценок жизнеспособности ОТТ и сравнения ее выводов с экспериментальными данными.

В настоящей работе найдено решение задачи о гравитационном поле изолированной сосредоточенной массы в обобщенной теории тяготения. В отличие от известных, решение получено в гармонических координатах [5], что позволяет достаточно просто переписать его в изотропных и шварцшильдовских координатах (а при желании в любых других) и, сравнивая результаты, оценить тем самым физическую значимость каждой из координатных систем.

2. *Гравитационное поле точечной массы* в сферических координатах r, θ, φ можно описать, выбрав выражение для интервала в виде

$$ds^2 = e^{2\nu} c^2 dt^2 - e^{2\lambda} [dr^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \tag{1}$$

Такой выбор позволяет, наложив соответствующие условия, конкретизировать систему кординат, в частности, перейти при необходимости к гармоническим, изотропным или шварцшильдовским координатам.

Введем скалярное поле с потенциалом

$$z(r) = \frac{1}{\varkappa} = \frac{c^2}{8\pi k(r)}.$$

Тогда уравнения поля в рассматриваемом случае сводятся к

$$\Delta z = 0, \tag{2}$$

$$\Delta \nu + e^{-2\lambda} \nu_1 z_1/z = 0, \tag{3}$$

$$\Delta (\ln Re^{\lambda}) + e^{-2\lambda} (\ln Re^{\lambda})_1 \frac{z_1}{z} - \frac{e^{-2\lambda}}{R^2} = 0, \tag{4}$$

$$[\nu_1 + 2 (\ln Re^{\lambda})_1 + z_1/z]_1 + \nu_1 (\nu_1 - \lambda_1) +$$

$$+ \frac{2R_1}{R} (\ln Re^{\lambda})_1 + \left[(1 - \zeta) \frac{z_1}{z} - \lambda_1\right] z_1/z = 0, \tag{5}$$

индекс 1 обозначает дифференцирование по r; ζ — безразмерный параметр ОТТ, оператор $\Delta \equiv \frac{e^{-\nu-3\lambda}}{R^2} \frac{d}{dr} \left(R^2 e^{\nu+\lambda} \frac{d}{dr} \right)$.

Первые интегралы (2) и (3) приводят к соотношению

$$\nu_1 = -\frac{1}{a} \frac{z_1}{z}, \tag{6}$$

где a — постоянная интегрирования.

Исключая вторые производные из системы уравнений (2)—(5), имеем уравнение

$$\left(\frac{R_1}{R}+\lambda_1\right)^2+2\left(\nu_1+\frac{z_1}{z}\right)\left(\frac{R_1}{R}+\lambda_1\right)+\nu_1\frac{z_1}{z}+\frac{\zeta}{2}\left(\frac{z_1}{z}\right)^2-\frac{1}{R^2}=0, \quad (7)$$

разрешая которое относительно $\left(\frac{R_1}{R}+\lambda_1\right)$, с учетом (6), получим

$$\frac{R_1}{R}+\lambda_1=\frac{(1-a)}{a}\frac{z_1}{z}\pm\sqrt{\frac{\eta^2}{a^2}\left(\frac{z_1}{z}\right)^2+1/R^2}. \quad (8)$$

Здесь $\eta^2=(a-1)^2+a-\frac{1}{2}\zeta a^2$, а выбор знака перед корнем не отражается на конечных результатах и поэтому произволен.

Введем

$$\mu=\frac{\eta}{a}\cdot\frac{z_1}{z}R, \quad (9)$$

тогда (8) и его комбинация с (2) дают

$$(\ln\mu)_1=\frac{1}{R}\sqrt{\mu^2+1}, \quad (10)$$

$$(\ln Re^{\lambda})_1=\frac{1}{R}\left[\mu\frac{(1-a)}{\eta}-\sqrt{\mu^2+1}\right]. \quad (11)$$

Интегрируя (10), найдем

$$\varkappa/\varkappa_0=\left(\mu+\sqrt{\mu^2+1}\right)^{-a/\eta}. \quad (12)$$

Используя последнее, из (6) и (11) получим соответственно

$$e^{\nu}=e^{\nu_0}(\varkappa/\varkappa_0)^{1/a}, \quad (13)$$

$$Re^{\lambda}=\frac{\eta B}{a\mu}(\varkappa/\varkappa_0)^{\frac{a-1}{a}}. \quad (14)$$

Таким образом, следующие из уравнений поля соотношения (12)—(14) позволяют выразить все искомые величины через μ. Постоянные интегрирования B, ν_0, $\varkappa_0$ определяются из требования асимптотической евклидовости.

3. *Неоднозначность в выборе координатных условий*, присущая общековариантным теориям тяготения, устраняется, согласно Фоку [5], если перейти к гармоническим координатам. Координаты $x^1=r\sin\theta\cos\varphi$, $x^2=r\sin\theta\sin\varphi$, $x^3=r\cos\theta$ будут гармоническими, если удовлетворено условие

$$\nu_1 + \lambda_1 + \frac{2R_1}{R} = \frac{2r}{R^2}, \tag{15}$$

которое служит дополнительным (помимо полевых уравнений), условием для определения искомых величин.

Это соотношение вместе с (2) и (10) приводит к уравнению

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_1} + \frac{a}{\eta}\frac{\mu_1}{\sqrt{\mu^2+1}} - \frac{\mu\mu_1}{\mu^2+1} + 2r\,\frac{(\mu_1/\mu)^2}{\mu^2+1} = 0, \tag{16}$$

которое определяет $\mu = \mu(r)$ и тем самым дает полное решение задачи. Если перейти к переменной ξ так, что $\mu^2 = 1/(\xi^2 - 1)$, вместо (16) получим эквивалентное уравнение

$$(\xi^2 - 1)\,r'' + \left(2\xi + \frac{a}{\eta}\right) r' - 2r = 0, \tag{16a}$$

штрих обозначает дифференцирование по ξ. Очевидно $|\xi| \lessgtr 1$, более того, структура (16а) позволяет ограничиться областью $\xi \geqslant 1$. Уравнение (16а) сводится к гипергеометрическому, нерасходящееся в конечной области решение которого имеет вид

$$r = \frac{D}{2}\left(\xi + \frac{a}{2\eta}\right). \tag{17}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}
\varkappa = \varkappa_0 \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)^{a/2\eta}, \\
e^{2\nu} = e^{2\nu_0}\left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)^{1/\eta}, \\
e^{2\lambda} = e^{2\lambda_0}\left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right)^{(1-a)/\eta}, \quad e^{2\lambda_0} = \frac{4B^2\eta^2}{a^2D^2}, \\
R^2 = \frac{D^2}{4}(\xi^2 - 1).
\end{gathered} \tag{18}$$

При $\zeta \to \infty$ $(a \to 0,\ \eta \to 1)$ эти и последующие результаты совпадают с соответствующими результатами ОТО.

4. *Задача сформулирована так*, что можно без труда получить решения в случаях, когда используются другие координаты. Рассмотрим два наиболее распространенных случая:

а) *Изотропная метрика*. В изотропных координатах ρ, θ, φ выражение для интервала записывается в виде

$$ds^2 = e^{2\alpha}c^2dt^2 - e^{2\beta}[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \qquad (1a)$$

Сравнение с (1) показывает, что для перехода к изотропным координатам нужно использовать условие $dr/R = d\rho/\rho$, откуда следует

$$r = \rho(1 + \rho_0^2/\rho^2) + \frac{a}{\eta}\rho_0. \qquad (19)$$

Тогда из (10) получим

$$\mu = \frac{2\rho_0/\rho}{1 - (\rho_0/\rho)^2}, \quad \xi = \frac{1 + (\rho_0/\rho)^2}{2\rho_0/\rho},$$

где ρ_0 — постоянная интегрирования.

Для компонентов метрического тензора и скалярного потенциала из (12)—(14) имеем

$$\varkappa = \varkappa_0\left(\frac{1 - \rho_0/\rho}{1 + \rho_0/\rho}\right)^{a/\eta},$$

$$e^{2\alpha} = e^{2\alpha_0}\left(\frac{1 - \rho_0/\rho}{1 + \rho_0/\rho}\right)^{2/\eta}, \qquad (20)$$

$$e^{2\beta} = e^{2\beta_0}(1 + \rho_0/\rho)^4\left(\frac{1 - \rho_0/\rho}{1 + \rho_0/\rho}\right)^{\frac{2(a+\eta-1)}{\eta}}.$$

Найденное решение так же, как и (18), на больших расстояниях должно совпадать с известным постньютоновским разложением изотропной метрики [3], что автоматически обеспечивает евклидовость на бесконечности и позволяет определить постоянные интегрирования.

$$e^{2\nu_0} = e^{2\lambda_0} = e^{2\alpha_0} = e^{2\beta_0} = 1, \quad \varkappa_0 = \frac{8\pi G}{c^2},$$

$$\rho_0 = \frac{\eta Gm}{2c^2} = \frac{\eta r_g}{4}, \quad D = 4\rho_0 = \eta r_g. \qquad (21)$$

Здесь $G = \lim\limits_{r\to\infty} k(r)$ — гравитационная постоянная.

Перепишем решение в гармонических координатах (18) в более удобном виде

$$\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)^{2\eta/a} = (e^{2\nu})^{\eta} = (e^{2\lambda})^{\eta/(a-1)} = \frac{1 - \frac{\eta r_g}{2r}(1 + a/2\eta)}{1 + \frac{\eta r_g}{2r}(1 - a/2\eta)}, \qquad (18a)$$

$$R^2 = r^2[(1 - ar_g/4r)^2 - \eta^2 r_g^2/4r^2].$$

б) *Шварцшильдовская метрика.*

В шварцшильдовских координатах $\tilde{r}$, θ, φ

$$ds^2 = e^{2\tilde{\nu}} c^2 dt^2 - e^{2\tilde{\lambda}} d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2). \tag{1б}$$

Сравнивая с (1), найдем условия перехода

$$e^{\lambda} dr = e^{\tilde{\lambda}} d\tilde{r}, \quad Re^{\lambda} = \tilde{r},$$

используя которые, из (10) и (11) получим

$$\tilde{r}/\tilde{r}_0 = \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2+1})^{(1-a)/\eta}}{\mu} = \sqrt{\xi^2-1}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{\frac{1-a}{2\eta}}. \tag{22}$$

Здесь по-прежнему $\mu^2 = 1/(\xi^2-1)$, однако как μ, так и ξ являются функциями шварцшильдовской координаты $\tilde{r}$ (изотропной координаты ρ в предыдущем случае). Тогда

$$e^{2\tilde{\lambda}} = (\xi^2-1)\Big/\left(\xi - \frac{1-a}{\eta}\right)^2,$$

а $\varkappa$ и $e^{2\tilde{\nu}}$ выражаются через $\xi(\tilde{r})$ так же, как в (18). Если ввести параметр $\tau = [(\xi-1)/(\xi+1)]^{(1-a)/\eta}$, то для этих величин получим выражения, совпадающие с найденными Гекманом [2].

$$\tilde{r} = \frac{\eta r_g}{\sqrt{\tau}\,(\tau^{-h} - \tau^{h})}, \qquad \varkappa = \varkappa_0 \tau^{-a/2(1-a)},$$

$$e^{2\tilde{\lambda}} = \frac{16h^2}{[(1+2h)\tau^{h} - (1-2h)\tau^{-h}]^2}, \tag{23}$$

$$e^{2\tilde{\nu}} = \tau^{1/(1-a)}, \quad h = \frac{\eta}{2(1-a)}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Оценить смысл полученных результатов можно, рассматривая различные значения показателя $(1-a)/2\eta$ в выражении (22).

В случае $\eta = (1-a)$ для $a = 0$ получается шварцшильдовское решение ОТО, а для $a = 2$ решение принимает вид

$$\varkappa/\varkappa_0 = \left(1 - \frac{(1-a)\, r_g}{\tilde{r}}\right)^{a/2(1-a)},$$

$$e^{2\tilde{\nu}} = \left(1 - \frac{(1-a)\, r_g}{\bar{r}}\right)^{1/(1-a)}, \tag{24}$$

$$e^{2\tilde{\lambda}} = 1/\left(1 - \frac{(1-a)\, r_g}{\bar{r}}\right).$$

Как видно из (24), при разумных значениях a (постньютоновский параметр $\gamma=1-a$ согласно экспериментальным данным близок к единице) решение похоже на шварцшильдовское с медленно меняющимся $\varkappa$, убывающим или возрастающим в зависимости от знака a. При $a>1$ решение не имеет особенностей во всей области изменения $0\leqslant r<\infty$, а $a<-1$ соответствуют решения с особенностями типа шварцшильдовской, но с убывающим $\varkappa(\tilde{r})$.

В случае $\eta<(1-a)$ области изменения $0\leqslant\tilde{r}<\infty$ соответствует $\xi\leqslant-1$ и, как видно из (22), $\eta<0$. Возрастающая ветвь $\varkappa(\tilde{r})$ получается для положительных значений a, что в свою очередь приводит к ограничениям на безразмерный параметр: $\zeta>\frac{2}{a}$. Решение не имеет особенностей.

Наконец, для $\eta>(1-a)$ в области $0\leqslant\tilde{r}<\infty$ с положительным η выбираем положительное a и получаем решение с возрастающей ветвью $\varkappa(\bar{r})$, не имеющее никаких особенностей. В этом случае ζ удовлетворяет неравенству $\zeta<2/a$, что соответствует имеющимся на сегодняшний день оценочным значениям этого параметра.

Авторы выражают благодарность Г. С. Саакяну и Р. М. Авакяну, а также всем участникам семинара кафедры теоретической физики Ереванского государственного университета за полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE CONCENTRATED MASS IN THE GENERALIZED THEORY OF GRAVITY

G. H. HARUTYUNIAN, V. V. PAPOYAN

The solution of the problem of the gravitational field of the concentrated mass in the generalized theory of gravity is found. The solution is obtained in the harmonic coordinate frame which enables to

transform it into isotropic, Schwartzschield or any other set of coordinates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Нестационарные явления в галактике, Ереван, 1968.
2. *P. Jordan*, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1955.
3. *Р. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер*, Гравитация, М., 1977.
4. *Г. С. Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
5. *В. А. Фок*. Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961.