

В. Ф. ШЕПЕЛЕВ

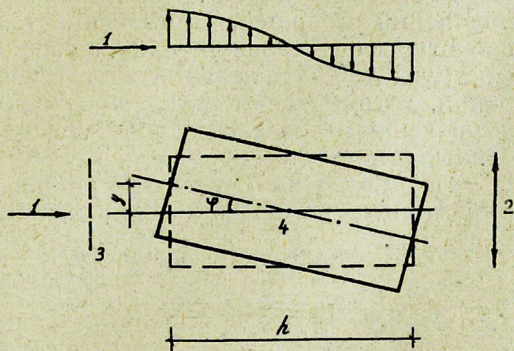
КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗДАНИЙ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В работе рассматриваются свободные крутильные колебания здания с одновременным учетом деформаций изгиба и сдвига. Показано, что при землетрясении, в ряде случаев, в зданиях могут возникнуть значительные дополнительные напряжения, вызванные крутильными колебаниями.

Как показывают сейсмограммы землетрясений, колебания грунта вызывают смещения не в одном, а во всех направлениях независимо от того, где находится источник возмущения. При этом часто оказывается, что направления максимальных смещений и ускорений не совпадают с направлением на источник возмущения и часто возможны случаи, когда они перпендикулярны к направлению движения сейсмической волны (фиг. 1). В этом случае, как отмечено в работе [1], даже в тех зданиях, которые полностью симметричны относительно обеих главных осей кроме поступательных, возможны и крутильные колебания, связанные с протяженностью сооружения в плане. Подтверждение этому можно найти в описаниях последствий ряда землетрясений, когда существенные повреждения зданий были вызваны именно крутильными колебаниями.

В работе [2] рассмотрены свободные крутильно-сдвиговые колебания зданий. Автор работы учитывает лишь сдвиг, обусловленный действием поперечной силы, пренебрегая влиянием изгиба. Очевидно, приведенными в работе [2] формулами можно пользоваться при расчете зданий лишь небольшой этажности (3—4 этажа). Для зданий же выше 5—6 этажей использование этих формул приводит к некоторому несоответствию между теоретическими и экспериментальными исследованиями, так как для зданий такого типа изгиб является основным фактором, определяющим деформативность сооружения в горизонтальном направлении.

При рассмотрении колебаний зданий, у которых центр жесткости совпадает с центром массы здания, так как эксцентриситет равен нулю, система совместных четырех дифференциальных уравнений, характери-



Фиг. 1. Схема поворота здания в плане.
1—направление движения волны; 2—направление движения ускорений и перемещений;
3—фронт волны; 4—центр жесткости и центр масс.

зующая собой продольные, поперечные в двух главных направлениях и крутильные колебания, как известно, распадается на независимые четыре дифференциальных уравнения [3]. Одно из дифференциальных уравнений относится только к продольным колебаниям здания, два других — к поперечным колебаниям в главных плоскостях, а последнее — четвертое уравнение — к вращению здания относительно продольной оси, проходящей через центр изгиба. Так как в литературе достаточно подробно изучены как продольные, так и поперечные колебания зданий, поэтому в данной статье на этих уравнениях не будем останавливаться, а более подробней рассмотрим лишь только крутильные колебания. При рассмотрении крутильных колебаний зданий, у которых отсутствует эксцентриситет, будем учитывать одновременно деформации изгиба, сдвига и момента чистого кручения.

Для проведения расчетов, связанных с кручением здания, рассмотрим свободные крутильные колебания зданий.

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

При рассмотрении только поступательных колебаний зданий, у которых масса и жесткости равномерно распределены по высоте, расчетную схему зданий такого типа представляют в виде консольного стержня постоянного сечения и нагруженного распределенной массой по его длине. При этом для определения частот и форм свободных поступательных колебаний зданий используются формулы, полученные при рассмотрении свободных поступательных колебаний стержней. По-видимому, аналогично этому, при рассмотрении свободных крутильных колебаний расчетную схему зданий, у которых массы и жесткости равномерно распределены по высоте, можно также представить в виде консольного стержня постоянного сечения, но нагруженного уже не распределенной массой, а распределенным крутящим моментом m по длине стержня. Для определения же частот и форм свободных крутильных колебаний зданий такого типа, аналогично тому, как это делалось при рассмотрении поступательных колебаний зданий, по-видимому, могут быть использованы формулы, полученные при рассмотрении крутильных колебаний стержней. Применение теории расчета тонкостенных стержней открытого профиля при стесненном кручении, позволяет получить формулы для определения частот и форм свободных крутильных колебаний, которые дают достаточно хорошее совпадение между частотами, вычисленными согласно теории расчета тонкостенных стержней и записанные в натуре.

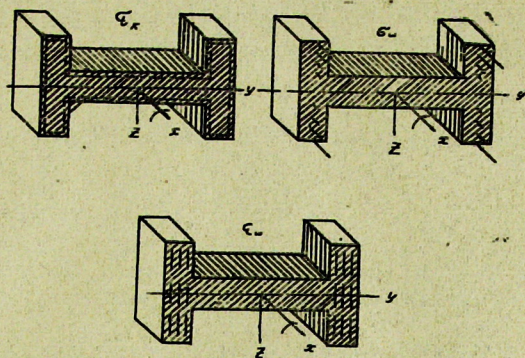
Из приведенной таблицы видно, что в том случае, когда учитываются только деформации сдвига, как это предлагает автор работы [3].

Частоты колебаний гостиницы „Юность“ (вычислены
В. С. Преображенским. 1961 г.)

Вид деформаций	Частоты, вычисленные теоретическим путем	Частота, записанная в натуре
Учет только сдвига	42,8 сек. ⁻¹	11,4 сек. ⁻¹
Учет одновременно сдвига, изгиба и чистого кручения	11,56 сек. ⁻¹	
Учет одновременно только изгиба и сдвига	11,46 сек. ⁻¹	

частота, вычисленная теоретически для этого случая существенно отличается от частоты, записанной в натуре и, следовательно, такой подход для практических целей не пригоден. Расхождение между частотой, записанной в натуре и вычисленными теоретически согласно теории расчета тонкостенных стержней при стесненном кручении как с учетом одновременно изгиба, сдвига и чистого кручения, так и только деформаций изгиба и сдвига, небольшое.

Поэтому задачу о свободных крутильных колебаниях зданий можно сравнить с задачей о свободных колебаниях стесненного кручения тонкостенного стержня открытого профиля, так как и в одном, и в другом случаях кручение сопровождается возникновением одних и тех же напряжений. А именно, возникают касательные напряжения τ_k , связанные с чистым кручением; нормальные растягивающие и сжимающие напряжения σ_ω , обусловленные изгибом продольных элементов, и касательные напряжения τ_ω , связанные с действием поперечной перерезывающей силы (фиг. 2).



Фиг. 2. Группы напряжений при кручении.

Дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний зданий с учетом одновременно изгиба, сдвига и чистого кручения можно записать в окончательном виде так:

$$\frac{d^4 \psi}{dx^4} - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \left[\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1} - \frac{k c_0 p^2}{G I_p (1 + \alpha_1)} \right] - \psi \frac{c_0 p^2}{E I_\omega (1 + \alpha_1)} = 0, \quad (1)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{k G I_k}{G I_p}; \quad \alpha_2 = \frac{G I_k}{E I_\omega};$$

ψ — угол закручивания сечения в плоскости, перпендикулярной к оси стержня x ;

$E I_\omega$ — секториальная жесткость при кручении;

$G I_k$ — жесткость при чистом кручении;

$G I_p$ — сдвиговая жесткость при кручении;

k — коэффициент, учитывающий зависимость деформаций при сдвиге от формы и размеров сечения;

I_ω — секториальный момент инерции;

I_k — момент инерции сечения при чистом кручении;

I_p — полярный момент инерции площади поперечного сечения относительно его центра тяжести

$$c_0 = \frac{I_p m}{F};$$

m — равномерно распределенная по высоте масса;

F — площадь поперечного сечения.

Общее решение дифференциального уравнения (1) будет:

$$\psi(x) = A \sin \lambda_p x + B \cos \lambda_p x + C \operatorname{sh} \lambda_n x + D \operatorname{ch} \lambda_n x. \quad (2)$$

Использование граничных условий приводит к следующей системе уравнений для получения значений произвольных постоянных A, B, C, D и величин корней λ_p и λ_n :

$$\left. \begin{aligned} A \lambda_p l + C \lambda_p l &= \alpha \lambda_p \lambda_n (1 + \alpha_2) [\lambda_n l (1 - \cos \lambda_p l) A + \\ &+ B (\lambda_n l \sin \lambda_p l - \lambda_p l \operatorname{sh} \lambda_n l - C \lambda_p l (1 - \operatorname{ch} \lambda_n l))] \\ 0 &= \lambda_n^2 l^2 (\sin \lambda_p l - \lambda_p l \cos \lambda_p l) A + B [\lambda_n^2 l^2 (\cos \lambda_p l + \lambda_p l \sin \lambda_p l + \\ &+ \lambda_p^2 l^2 (\operatorname{ch} \lambda_n l - \lambda_n l \operatorname{sh} \lambda_n l)) - C \lambda_p^2 l^2 (\operatorname{sh} \lambda_n l - \lambda_n l \operatorname{ch} \lambda_n l)] \\ &- A \lambda_p^2 l^2 \sin \lambda_p l - B (\lambda_p^2 l^2 \cos \lambda_p l + \lambda_n^2 l^2 \operatorname{ch} \lambda_n l) + C \lambda_n^2 l^2 \operatorname{sh} \lambda_n l = \\ &= -\alpha (1 + \alpha_2) \lambda_p^2 \lambda_n^2 l^2 [A \sin \lambda_p l + B (\cos \lambda_p l - \operatorname{ch} \lambda_n l)] + C \operatorname{sh} \lambda_p l, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{k E I_\omega}{G I_p}.$$

Для анализа полученного общего решения некоторый интерес представляют собой коэффициенты:

$$\alpha_2 = \frac{D I_k}{E I_\omega} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \frac{k G I_k}{G I_p}.$$

Для реальных зданий эти отношения крутильных жесткостей весьма и весьма малы, поэтому при рассмотрении крутильных колебаний зданий следует принимать $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 0$, то есть моментом чистого кручения можно пренебречь, не потеряв при этом достаточную для практики точность и вместе с тем значительно упростив формулы для определения частот и форм свободных крутильных колебаний зданий. На это также непосредственно указывает то, что расхождение между частотой, записанной в натуре и вычисленной теоретически с учетом только деформаций изгиба и сдвига (пренебрегая моментом чистого кручения), небольшое.

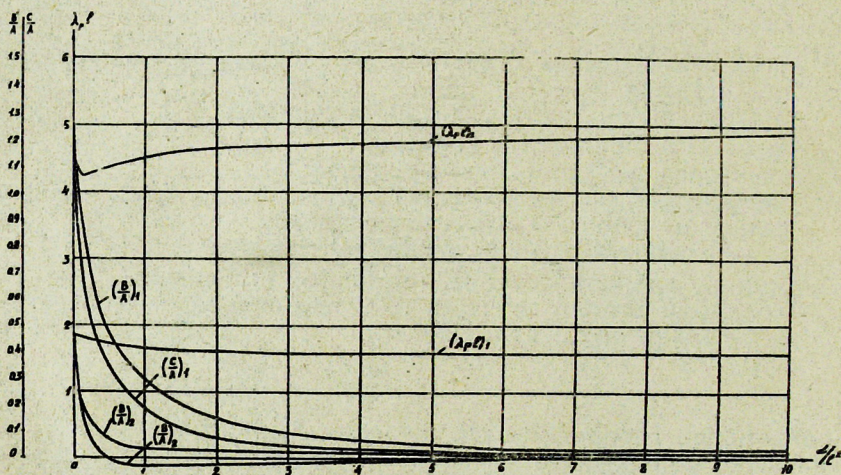


Рис. 3. График для определения частот и форм 1-го и 2-го тонов крутильных колебаний.

Частоты собственных крутильных колебаний следует определять по формуле:

$$p = \sqrt{\frac{FI_{\omega} \lambda p^4}{c_0 (1 + \alpha \lambda p^2)}} \quad (4)$$

Выражение для определения форм свободных крутильных колебаний имеет вид:

$$\psi(x) = \sin \lambda_p x - \frac{B}{A} (\cos \lambda_p x - \operatorname{ch} \lambda_n x) - \frac{C}{A} \operatorname{sh} \lambda_n x. \quad (5)$$

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Расчетную схему зданий, в которых основная масса сосредоточена в уровне перекрытий, можно представить в виде консольного стержня с сосредоточенными моментами инерции масс в уровне перекрытий каждого этажа. В этом случае частоты и формы свободных крутильных колебаний зданий могут быть найдены на основании следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (c_{01} \varphi_{11} p_i^2 - 1) \psi_{i1} + c_{02} \varphi_{12} p_i^2 \psi_{i2} + \dots + c_{0n} \varphi_{1n} p_i^2 \psi_{in} &= 0 \\ c_{01} \varphi_{21} p_i^2 \psi_{i1} + (c_{02} \varphi_{22} p_i^2 - 1) \psi_{i2} + \dots + c_{0n} \varphi_{2n} p_i^2 \psi_{in} &= 0 \\ \dots & \\ c_{01} \varphi_{n1} p_i^2 \psi_{i1} + c_{02} \varphi_{n2} p_i^2 \psi_{i2} + \dots + (c_{0n} \varphi_{nn} p_i^2 - 1) \psi_{in} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

где c_{01}, c_{02}, c_{0n} — моменты инерции весов сосредоточенных в уровне соответствующих перекрытий;

$\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{nn}$ — углы поворота от действия единичных моментов кручения в соответствующих уровнях.

Частоту p_i собственных крутильных колебаний можно определить из условия равенства нулю детерминанта системы уравнений

$$\begin{vmatrix} c_{01} \varphi_{11} p_i^2 - 1 & c_{02} \varphi_{12} p_i^2 \dots \dots c_{0n} \varphi_{1n} p_i^2 \\ c_{01} \varphi_{21} p_i^2 & c_{02} \varphi_{22} p_i^2 - 1 \dots c_{0n} \varphi_{2n} p_i^2 \\ \vdots & \vdots \\ c_{01} \varphi_{n1} p_i^2 & c_{02} \varphi_{n2} p_i^2 \dots \dots c_{0n} \varphi_{nn} p_i^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Однако частоту основного тона крутильных колебаний можно определить и не решая системы уравнений (6). Из сравнения ее с системой уравнений для определения частот и форм свободных поступательных колебаний [4], видно, что они подобны и отличаются только тем, что в системе уравнений (6) вместо значений m_{ij} записаны $c_{oi} \varphi_{ij}$. Из этого можно сделать вывод, что частоту крутильных колебаний основного тона можно также найти методом спектральных функций:

$$\frac{1}{\sqrt{B_2}} < p_1^2 < \frac{2}{B_1 \left(1 + \sqrt{2 \frac{B_2}{B_1^2} - 1}\right)}, \quad (7)$$

я которой

$$B_1 = \sum_{j=1}^n c_{0j} \varphi_{jj}$$

и

$$B_2 = \sum_{j=1}^n c_{0j}^2 \varphi_{jj}^2 + 2(c_{01} \varphi_{1n} \sum_{j=2}^n c_{0j} + c_{02} \varphi_{2n} \sum_{j=3}^n c_{0j} + \dots + c_{0n-1} \varphi_{n-1,n} c_{0n}).$$

Форма свободных крутильных колебаний системы, определяемая отношением амплитуд $\frac{\psi_{ij}}{\psi_{ik}}$, вычисляется путем совместного решения уравнений (6) при подстановке в них значений p_i , соответствующего рассматриваемому тону колебаний i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Аналогично тому, как это делалось при рассмотрении вынужденных поступательных колебаний зданий, когда использовалась методика расчета, основанная на разложении колебаний по главным формам, при рассмотрении вынужденных крутильных колебаний зданий по-видимому, также можно использовать данную методику и соответственно получить формулу для определения величин крутящих моментов, действующих в каждом уровне. Приведем лишь окончательную формулу для определения величины крутящего момента, которая, как показано в работе [2], имеет вид:

$$M_k = \mu k_c \beta_{kpl} \eta_{kplik} \theta_k, \quad (8)$$

где

$$\mu = \frac{6}{l} \left(\frac{\sin \frac{\pi l}{vT}}{\left(\frac{\pi l}{vT}\right)^2} - \frac{\cos \frac{\pi l}{vT}}{\frac{\pi l}{vT}} \right), \quad (9)$$

θ_k — физический момент инерции масс, расположенных в уровне k , $\theta_k = g c_{0k}$;

g — ускорение силы тяжести в $м/сек^2$;

k_c — коэффициент сейсмичности;

β_{kpl} — коэффициент динамичности, определяемый в зависимости от периода крутильных колебаний здания;

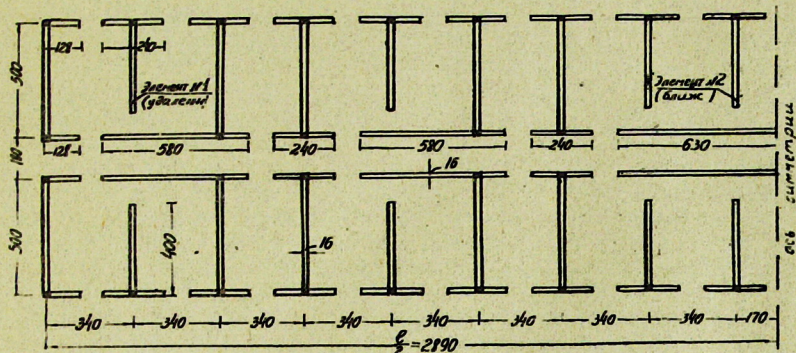
η_{kplik} — коэффициент формы, зависящий от формы деформаций (углов закручивания) системы при свободных крутильных колебаниях и от расположения физических моментов инерции весов масс,

$$\eta_{kplik} = \frac{\psi_{ik} \sum_{j=1}^n \theta_j \psi_{ij}}{\sum_{j=1}^n \theta_j \psi_{ij}^2}. \quad (10)$$

В целях оценки усилий, возникающих при крутильных колебаниях зданий, ниже приведем пример расчета 15-этажного здания на сейсмические воздействия.

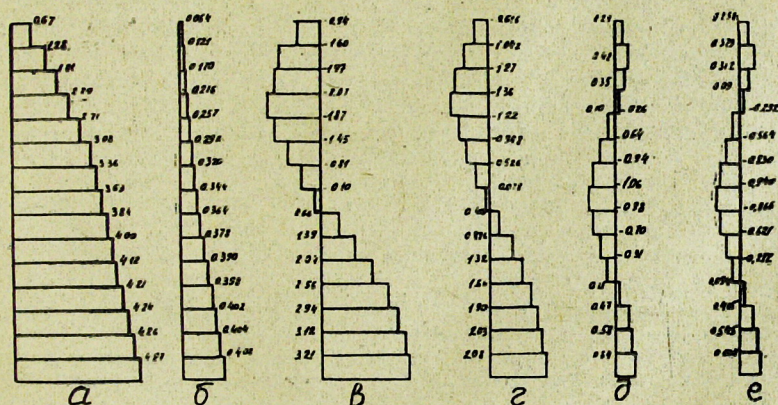
ПРИМЕР РАСЧЕТА

Здание высотой в 15 этажей ($l=42$ м) предназначено для строительства в районе с расчетной сейсмичностью 8 баллов на глинистых грунтах. Принятая скорость распространения сейсмических волн в глинистом грунте равна $v=1000$ м/сек. Основной несущей конструкцией здания являются железобетонные панели толщиной 16 см (бетон марки 300). Высота каждого этажа — 2,8 м (по осям перекрытия). План здания изображен на фиг. 4.



Фиг. 4. Схематический план здания.

Для расчета выбрано поперечное направление здания, для которого вычислены усилия в элементе № 1 (наиболее удаленном от центра здания), вызываемые как поступательными, так и крутильными колебаниями. Приведем окончательные эпюры усилий, найденные для каждой из трех низших форм поступательных колебаний в соответствии с действующими нормами (фиг 5; а, в, д).



Фиг. 5. Эпюры усилий в элементах зданий.

Более подробно остановимся на определении усилий, возникающих в несущих элементах здания при крутильных колебаниях здания.

Периоды свободных крутильных колебаний здания, вычисленные по формуле $T = \frac{2\pi}{p}$ (где p определяется по формуле (4)) для первых трех тонов колебаний соответственно равны $T_1 = 1,074 \text{ сек.}$, $T_2 = 0,183 \text{ сек.}$, $T_3 = 0,0701 \text{ сек.}$ Коэффициенты форм вычисляются по формуле (10), а коэффициенты μ , учитывающие протяженность здания, вычислены по формуле (9) и соответственно для трех низших форм крутильных колебаний равны:

$$\mu_1 = 0,416 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}; \quad \mu_2 = 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}; \quad \mu_3 = 4,21 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}.$$

Далее по формуле (8) найдены крутящие моменты в каждом уровне перекрытия, которые затем распределяются между отдельными несущими элементами здания пропорционально их угловой жесткости. На фиг. 5, б, г, е представлены эпюры усилий, вызываемые крутящими колебаниями в наиболее удаленном элементе от центра здания.

Сопоставление эпюр усилий, возникающих при крутильных колебаниях в наиболее удаленном элементе (см. фиг. 5, б, г, е) от центра здания с усилиями, отвечающими консольной схеме (фиг. 5, а, в, д) для элемента той же жесткости, показывает, что если усилия при первой форме колебаний, вызываемые кручением здания (фиг. 5, б) составляют лишь 10% от усилий, найденных для консольной схемы (фиг. 5, а), то при второй же форме колебаний эти усилия (фиг. 5, г) достигают уже $\approx 65\%$ от усилий, отвечающих консольной схеме (фиг. 5, в), а при третьей форме (фиг. 5, е) $\approx 90\%$ от усилий консольного стержня (фиг. 5, д).

На основании всего вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

В зданиях и сооружениях, полностью симметричных относительно главных осей, кроме поступательных колебаний могут возникать и крутильные колебания. При этом дополнительные усилия, вызываемые крутильными колебаниями здания, в элементах, наиболее удаленных от его центра, при второй и третьей формах составляют величины примерно того же порядка, что и усилия, вызываемые поступательными колебаниями. Поэтому элементы, наиболее удаленные от центра здания, могут испытывать значительные перегрузки при сейсмических воздействиях. Следовательно, при расчете зданий на сейсмические воздействия необходима дополнительная проверка их на кручение. Для определения величины крутящего момента может быть использована формула (8), а частоты и формы собственных крутильных колебаний, в зависимости от выбранной расчетной схемы, могут определяться по формулам (4), (5) или (6), (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Корчинский. Влияние протяженности (в плане) здания на величину действующей на него сейсмической нагрузки. Сейсмостойкость промышленных зданий и инженерных сооружений, Госстройиздат, 1962.
2. В. С. Преображенский. Свободные крутильно-сдвиговые колебания зданий. Сейсмостойкость промышленных зданий и инженерных сооружений, Госстройиздат, 1962.
3. В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни. Физматгиз, 1959.
4. Инструкция по определению расчетной сейсмической нагрузки для зданий и сооружений, Госстройиздат, 1962.

ЦНИИСК

им. Кучеренко