

УДК 524.338.6

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ ЗВЕЗДНЫХ ВСПЫШЕК

Г. А. АРУТЮНЯН

Поступила 21 сентября 1983

Принята к печати 3 апреля 1984

Обсуждается возможность обобщения метода, предложенного Амбарцумяном [2] для определения функции распределения звезд по средним частотам вспышек в звездных агрегатах. Приводятся формулы, позволяющие использовать для этой цели информацию хронологий вспышек высоких порядков. Для оценки точности предлагаемого метода реализован численный эксперимент, в процессе которого смоделирован ансамбль вспыхивающих звезд с известным распределением по частотам вспышек. Результаты указанных экспериментов и последующей обработки согласно предлагаемой схеме приведены в виде графиков.

1. *Введение.* Определение как общего числа вспыхивающих звезд в звездных агрегатах, так и их распределения по частотам представляет несомненный интерес. Однако ясно, что метод прямого подсчета не может быть применен при решении этой задачи, так как обычно общая продолжительность наблюдений за отдельным агрегатом бывает совершенно недостаточна для обнаружения всех вспыхивающих звезд, а тем более для определения средних частот каждой из них. Повтому уже постановка самой задачи требует поиска косвенных путей решения.

В работе [1] рассмотрен простейший случай указанной проблемы, когда считается, что звезды вспыхивают по пуассоновскому закону с одинаковой средней частотой. Тогда довольно просто удастся оценить количество звезд, не показавших вспышек за время наблюдений. Но результаты наблюдений показывают, что в звездных агрегатах имеются звезды, средние частоты которых сильно отличаются друг от друга. В этом случае полученная в [1] формула дает лишь некоторый нижний предел для количества вспыхивающих звезд, не вспыхнувших за время наблюдений. Следовательно, возникает необходимость решать задачу, отказавшись от предположения об одночастотном пуассоновском распределении вспышек.

В этой более общей постановке задача, в сущности, сводится к необходимости точного определения «истинной», свободной от дисперсии слу-

чайного процесса *функции, описывающей хронологию первых вспышек* [2]. Имея вид этой функции, с помощью обратного преобразования Лапласа можно найти распределение звезд в зависимости от средней частоты вспышек.

Цель настоящей работы заключается в разработке численных моделей для анализа предложенного в работе [2] метода, а также в обобщении этого метода для использования хронологий всех повторных вспышек.

2. Не останавливаясь на всех подробностях постановки задачи, которые можно найти в работе [2], введем лишь основные понятия. Пусть N — полное количество вспыхивающих звезд в агрегате, а $f(\nu)$ — закон их распределения по средним частотам, так что величина $Nf(\nu) d\nu$ представляет собой число вспыхивающих звезд, средние частоты вспышек которых заключены в интервале $(\nu; \nu + d\nu)$. Через $P(t)$ обозначим вероятность того, что в промежутке времени $(0, t)$ произойдет хотя бы одна вспышка случайно выбранной в агрегате одной вспыхивающей звезды. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$P(t) = 1 - \int_0^{\infty} e^{-\nu t} f(\nu) d\nu. \quad (1)$$

Если называть «открытием» вспыхивающей звезды за период $(0, t)$ регистрацию хотя бы одной ее вспышки за указанный период, то произведение

$$n_1(t) = N \frac{dP(t)}{dt} \quad (2)$$

будет представлять собой математическое ожидание количества «открытий» вспыхивающих звезд за единицу времени в момент t . Тогда из (1) и (2) можно получить (см. [2])

$$f(\nu) = \frac{\bar{\nu}}{\nu} \bar{L} \left[\frac{n_1(t)}{n_1(0)} \right], \quad (3)$$

где \bar{L} оператор обратного преобразования Лапласа, а

$$\bar{\nu} = \int_0^{\infty} \nu f(\nu) d\nu$$

среднее значение средних частот вспышек.

Из (3) следует, что для решения данной задачи чрезвычайно важным является точное определение из результатов наблюдений функции

$n_1(t)/n_1(0)$. К сожалению, вместо значений $n_1(t)$, являющейся производной математического ожидания величины $NP(t)$, обычно приходится пользоваться значениями $n_1(t)$, полученными в результате численного дифференцирования количества открытых вспыхивающих звезд к моменту t . Из-за случайного характера изучаемого процесса такая замена вводит некоторую ошибку, которая иной раз может быть достаточно большой. Для того, чтобы повысить точность, в работе [2] был предложен метод «сглаживания» указанной функции с помощью хронологии вторых вспышек. Здесь мы получим аналогичные формулы для использования полной информации, которую носят все повторные вспышки.

Обозначим для этого через $N_k(t)$ ожидаемое число звезд, у которых за время t наблюдались k или больше вспышек. С помощью формулы Пуассона можно написать

$$N_k(t) = N \int_0^{\infty} f(v) \left[1 - e^{-vt} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(vt)^l}{l!} \right] dv, \quad (4)$$

а также

$$N_{k+1}(t) = N_k(t) - N \int_0^{\infty} f(v) \frac{(vt)^k}{k!} e^{-vt} dv. \quad (5)$$

Пользуясь выражениями (4) и (5), находим

$$\frac{t}{k} \frac{dN_k(t)}{dt} = N_k(t) - N_{k+1}(t). \quad (6)$$

Решая дифференциальное уравнение (6) и продифференцировав найденное решение, после некоторых преобразований получаем

$$z_k(t) = z_k(0) - k \int_0^t z_{k+1}(u) du, \quad (7)$$

где введено обозначение

$$z_k(t) = \frac{n_k(t)}{t^{k-1}} = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{dN_k(t)}{dt},$$

а $n_k(t)$ — суть математическое ожидание количества звезд, показавших k -тую вспышку за единицу времени в момент t .

Таким образом, соотношение (7) дает возможность использовать для «сглаживания» величины $z_k(t)$ аналогичную функцию $z_{k+1}(t)$, которая связана с $(k+1)$ -ыми вспышками. Получается нечто, напоминающее

метод последовательных приближений, для которого примечательным является именно то, что величина $z_k(t)$ определяется с помощью интеграла от $z_{k+1}(t)$, что существенно уменьшает дисперсию значений определяемой функции.

Из (7) видно, что для обеспечения достаточной точности необходимо иметь значения функций $z_k(t)$ в начальный момент времени $t = 0$. При $k = 1$ величину $z_1(0) = n_1(0)$ легко можно определить способом, предложенным в [2]. Для $k > 1$ можно в качестве $z_k(0)$ брать статистическое среднее этой величины:

$$z_k(0) \approx \bar{z}_k(0) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[z_k(t_j) + k \int_0^{t_j} z_{k+1}(u) du \right],$$

где t_j — некоторые моменты наблюдений.

3. Вообще говоря, данную задачу можно разделить на две сравнительно независимые части. Цель первой из них — по возможности точное восстановление функции $z_1(t) = n_1(t)$. Применение же обратного преобразования Лапласа, в сущности, представляет отдельный интерес и является предметом исследования второй части рассматриваемой задачи. В настоящей работе нас пока будет интересовать лишь вопрос о восстановлении функции $n_1(t)$.

Очевидно, что точность описанного метода могла бы быть оценена прямо из наблюдений лишь путем производства нескольких серий наблюдений и их сравнения между собой. Но это потребовало бы сроков, измеряемых многими десятилетиями. Поэтому для проверки точности метода целесообразнее использовать модельный подход, а именно, с помощью случайных чисел моделировать процесс вспышечной деятельности для каждой отдельной звезды в гипотетическом агрегате. Тогда нетрудно получить все «наблюдательные» данные, которые необходимы для применения описанного выше метода.

Допустим, N звезд распределены по закону $f(v)$, и средние частоты вспышек этих звезд заключены в интервале (v_{\min}, v_{\max}) . Пусть общее время наблюдений за этими звездами будет T . Тогда математическое ожидание полного количества вспышек за время T будет определяться выражением

$$F = NT \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} v f(v) dv. \quad (8)$$

Так как приближенное число вспышек и суммарное время наблюдений можно считать известными для каждого реального звездного агрегата, то удобно для рассматриваемых моделей также брать близкие к ним исходные данные. Это значит, что, задавая функцию распределения $f(\nu)$ и интервал изменений средних частот, для известных величин F и T , мы легко можем определить число вспыхивающих звезд в агрегате из (8).

Поскольку настоящая работа имеет целью лишь первую разведку поставленной задачи, мы решили ограничиться несколькими примерами, в которых зависимость $f(\nu)$ имеет различный характер. Но следует отметить, что во всех разобранных примерах $f(\nu)$ принята невозрастающей функцией от ν , так как это соответствует приближенному решению задачи для Плеяд [2].

Далее, чтобы моделировать для каждой звезды процесс вспышечной активности, нами была реализована следующая процедура. С целью дискретизации функции $f(\nu)$ интервал частот (ν_{\min}, ν_{\max}) разделяется на некоторое количество L частей, каждая из которых характеризуется количеством звезд

$$N_i = N \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} f(\nu) d\nu$$

и количеством вспышек, показанных ими за время T ,

$$F_i = NT \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} \nu f(\nu) d\nu.$$

Очевидно также, что средняя частота вспышек в данном элементарном интервале (ν_i, ν_{i+1}) равна

$$\bar{\nu}_i = F_i / N_i T.$$

Таким образом, в каждом элементарном интервале частот мы, в сущности, имеем N_i практически одинаковых звезд со средней частотой $\bar{\nu}_i$. Теперь, с помощью точек l_k ($k = 0; 1; \dots; N_i$) разделим отрезок $[0; 1]$ на N_i равных частей, каждая из которых описывает одну звезду. После этого из таблицы (или генератора случайных чисел) возьмем F_i случайных чисел $s_{ij} \in [0; 1]$ ($j = 1; 2; \dots; F_i$) и посмотрим, как они распределяются в интервалах (l_{k-1}, l_k) . Количество попавших в k -тый интервал случайных чисел показывает число вспышек k -той звезды

со средней частотой $\bar{\nu}_i$ за время T . Момент же q -той вспышки данной звезды определяется выражением

$$t_q(k) = [s_q(k) - l_k] N_i T,$$

где $s_q(k) \in \{s_{ij}\}$ — суть q -тое случайное число, попавшее в k -тый интервал. Семейство величин $\{t_q(k)\}$ является аналогом хронологии вспышек для математической модели гипотетического агрегата.

4. Нами было рассмотрено достаточно большое количество реализаций указанной математической модели для трех различных функций распределения. Здесь же мы приводим результаты лишь для трех случайно выбранных реализаций модели с распределением «звезд» по закону $f(\nu) \sim \nu^{-1}$. Как и для большинства моделей, исходные данные выбраны следующим образом: $T = 2600$ ч, $F = 800$, $\nu_{\min} = 0.01/T$ и $\nu_{\max} = 2.6/T$.

В табл. 1 для всех трех реализаций приведены числа звезд, показавших $k = 1; 2; \dots; 8$ вспышек в течение всего промежутка T . Для сравнения в столбце d приведены также соответствующие числа, вычисленные по формуле Пуассона

$$m(k) = \sum_{i=1}^L N_i \frac{(\bar{\nu}_i T)^k}{k!} e^{-\bar{\nu}_i T}, \quad (9)$$

где L — количество частей деления интервала (ν_{\min}, ν_{\max}) при дискретизации функции $f(\nu)$. В последнем столбце дается максимальное относительное расхождение (в процентах) для данных трех реализаций. Как и следовало ожидать, с увеличением k , указанное расхождение в среднем растет, что обусловлено уменьшением числа вспышек высоких порядков.

Таблица 1

k	a	b	c	d	e
1	286	290	301	~278	~ 8.3
2	117	108	104	~113	~ 8.0
3	48	42	39	~ 50	~ 22.0
4	22	24	28	~ 21	~ 33.3
5	6	10	8	~ 8	~ 25.0
6	3	1	1	~ 3	~200.0
7	0	1	1	~ 0	
8	0	1	1	~ 0	

Более подробные результаты численных расчетов приведены с помощью графиков на рис. 1 и 2, которые показывают хронологии первых и вторых вспышек, соответственно. На оси абсцисс вместо реального времени t отложена величина $\tau = t/T$. Обращает на себя внимание существование довольно большой дисперсии у функции $n_1(t)$.

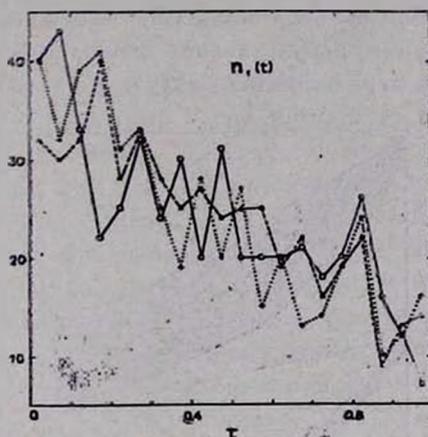


Рис. 1. Зависимость функции $n_1(t)$ от $\tau = t/T$. Приведены результаты трех различных реализаций имитированного процесса вспышечной активности группы звезд с одним и тем же распределением частот. Полное число «вспышек» в каждой модели было 800.

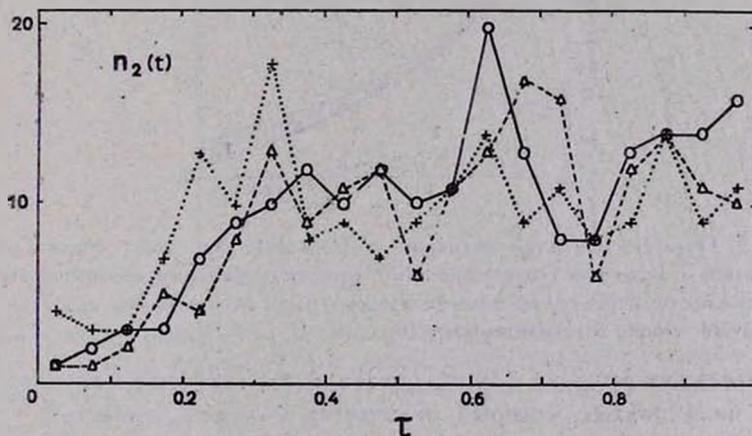


Рис. 2. Зависимость функции $n_2(t)$ от $\tau = t/T$. Графики показывают результаты тех же трех реализаций численного процесса, по которым построены кривые, приведенные на предыдущем рисунке.

К результатам выполненных модельных экспериментов был применен математический аппарат вышесказанного метода «сглаживания». На

рис. 3 показаны результаты вычислений согласно выражению (7), причем римскими цифрами обозначен высший порядок повторности вспышек, хронология которых была использована для уточнения величины $n_1(t)/n_1(0)$. Заштрихованная часть показывает область, где расположены вычисленные кривые для всех трех случаев, то есть область рассеяния значений $n_1(t)/n_1(0)$. Кружки соответствуют точной величине $n_1(t)/n_1(0)$. Как показывают графики, использование хронологий повторных вспышек позволяет, по крайней мере в среднем, получить более точные результаты.

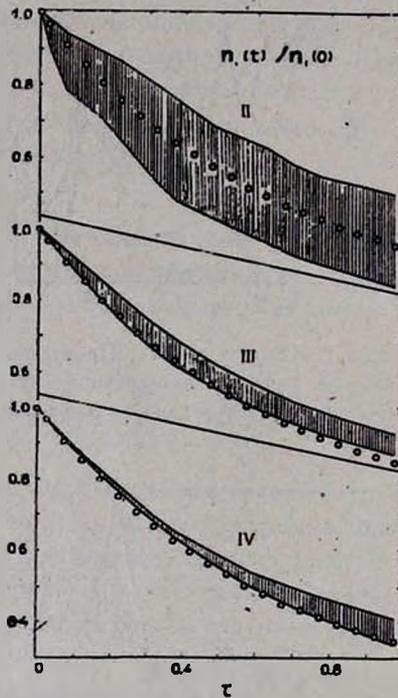


Рис. 3. Области рассеяний величины $n_1(t)/n_1(0)$ для трех реализаций после «сглаживания» с помощью соотношения (7). Римскими цифрами обозначен высший порядок повторности вспышек, хронология которых были использованы при этом. Кружки соответствуют точной величине $n_1(t)/n_1(0)$.

Однако для решения рассматриваемой задачи можно предложить несколько иной подход, который отличается большей точностью и заключается в следующем. Ввиду того, что процесс вспышечной активности в агрегатах можно считать стационарным, вид кривых, описывающих хронологию вспышек должен оставаться неизменным, если начальный момент наблюдений будет перемещен. Другими словами, хронология вспышек должна быть инвариантной по отношению к сдвигам начального момента. Очевидно, что, например, при сдвиге начального момента на величину t_1 все

вспышки, которые произошли до этого, мы уже «не успеваем» регистрировать. Если в первой хронологии с начальным моментом $t=0$ k -тая звезда данного агрегата показала i -тую вспышку в момент t_{ki} , причем $t_{k1} < t_{11}$, а $t_{k2} > t_{11}$, то после сдвига мы будем иметь $(i-1)$ -тую вспышку в момент $(t_{ki}-t_1)$. Таким образом, вторая вспышка станет первой, третья — второй и т. д.

С другой стороны, так как процесс считается пуассоновским, есть возможность и в новой хронологии использовать ту информацию, которая была получена за время $(0; t_1)$. Для этого можно, например, первую вспышку k -той звезды, которая «не была зарегистрирована» из-за сдвига начала наблюдений, использовать в качестве последней вспышки данной звезды, зарегистрированной в момент $(T-t_1+t_{k1})$ новой хронологии.

Ясно, что по указанной схеме практически можно получить сколько угодно большое число кривых. В настоящей работе для каждого рассмотренного случая были получены 20 хронологий, с помощью последовательных сдвигов начального момента наблюдений на $\Delta t = 0.05 T$. На рис. 4

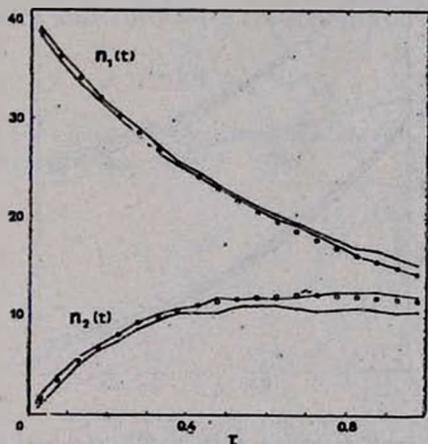


Рис. 4. Области рассеяний «усредненных» функций $n_1(t)$ и $n_2(t)$ для рассмотренных трех реализаций. Усреднение для каждой из реализаций производилось по 20-и хронологиям, которые были построены с помощью последовательных сдвигов начального момента наблюдений.

приведены результаты усреднения по двадцати кривым. Здесь заштрихованные области являются аналогами кривых, показанных на рис. 1 и 2, что позволяет сразу оценить эффект усреднения с учетом инвариантности хронологий по отношению сдвигов начального момента наблюдений.

На рис. 5 показаны результаты использования повторных вспышек высоких порядков в данном случае. Как нетрудно видеть, рассеяния величины $n_1(t)/n_1(0)$ здесь значительно уменьшились, причем это особенно заметно для больших значений t . Наибольшее отклонение полученных значений функции $n_1(t)/n_1(0)$ от ее точных значений, например, при использовании хронологий вторых, третьих и четвертых вспышек, здесь не превышает величину 0.03. Однако следует еще раз напомнить, что во всех случаях изображенные на графиках заштрихованные области показывают пределы изменений результатов трех случайно выбранных реализаций. Их не следует путать с коридорами ошибок в принятом смысле этого слова.

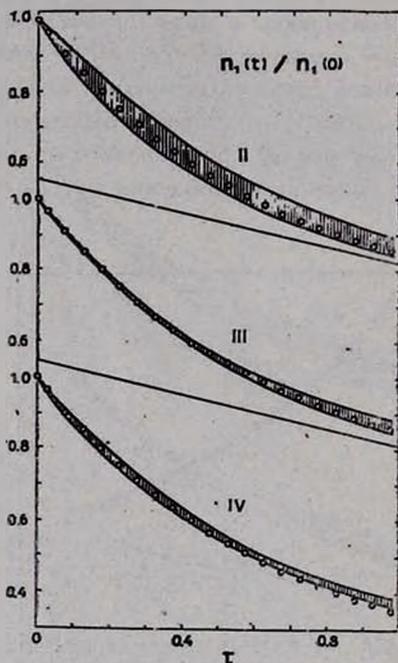


Рис. 5. Области рассеяний величины $n_1(t)/n_1(0)$ для трех реализаций после усреднения (см. подпись к рис. 4) и последующего «сглаживания» согласно соотношению (7). Римские цифры показывают высший порядок повторности вспышек, хронология которых были использованы для «сглаживания».

Определение функции распределения частот звездных вспышек в агрегатах связано с очень большими трудностями, и предложенный в работе [2] метод решения этой задачи еще нуждается в улучшении. С этой точки зрения, повышение точности указанного метода вышеизложенным способом нам кажется вполне оправданным.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность академику В. А. Амбарцумяну за постановку задачи и многократные обсуждения.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

ON THE DETERMINATION OF THE STELLAR FLARE FREQUENCY DISTRIBUTION FUNCTION

H. A. HARUTYUNIAN

A possibility of generalization of the method, suggested by Ambarsumian [2] for the determination of star distribution function depending on mean flare frequency is discussed. Formulae are given for using the information of chronology of high order flares for this purpose. To estimate the accuracy of the proposed method a numerical experiment has been realized, in the process of which an ensemble of flare stars has been modelled with known frequency distribution. The results of the mentioned experiments and following treatments are shown on diagrams.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, в сб. «Звезды, туманности, галактики», Ереван, 1969, стр. 283.
2. В. А. Амбарцумян, *Астрофизика*, 14, 367, 1978.