АСТРОФИЗИКА

ТОМ 20 ИЮНЬ, 1984 ВЫПУСК 3

УДК 52—530.12

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ВАКУУМА

Л. Ш. ГРИГОРЯН, Г. С. СААКЯН

Поступила 30 июня 1983

В работе развивается идея о том, что при наличии гравитации вакуум приобретает свойства реальной среды, описываемые определенным тензором энергии — импульса τ_{ik}. Утверждается, что в формировании метрики пространства — времени наряду с обычным веществом участвует и «вакуумное вещество». Проблема вакуума исследована в случае центрально-симметрического статического поля. Используя симметрию задачи, а также путем сравнения с пост-ньютоновским и ньютоновским пределами, установлен ряд важных свойств тензора τ_{ik}. Найдены внешние решения, сформулированы внутренняя задача и процедура сшивки решений на поверхности небесного тела. Утверждается, что в небесных телах вещество, гравитационный вакуум иметрика образуют единый комплекс, определяемый решением уравнений гравитационного поля.

1. *Введение.* Теория гравитации Эйнштейна помимо согласованности с нерелятивистской теорией предсказала ряд новых эффектов в пост-ньютоновском приближении, подтвержденных наблюдательными данными. Иная ситуация в случае чрезвычайно сильных полей, где некоторые из ее выводов недостаточно убедительны. К ним относятся сингулярное решение в космологии и решения, соответствующие черным дырам. Существенно, что целеустремленные поиски последних пока не привели к однозначным выводам. Укажем также на гипотезу В. А. Амбарцумяна [1] о существовании сверхплотных и сверхмассивных дозвездных тел, из распада которых образуются наблюдаемые небесные тела и межзвездное диффузное вещество. Она не укладывается в рамках современной теории гравитации. Однако трудно не считаться с этой гипотезой, поскольку она базируется на определенной совокупности фактов и некоторые ее выводы не только подтверждены наблюдательными данными, но и успели стать привычными. Упомянутые обстоятельства указывают на то, что в случае чрезвычайно сильных полей теория Эйнштейна, по-видимому, нуждается в уточнениях. Конечно, на этом пути следует проявлять известную осторожность, учитывая солидную экспериментальную базу, логическую обоснованность и стройность современной теории гравитации.

В квантовой теории полей каждое физическое поле характеризуется своим вакуумом. Естественно ожидать, что и гравитационное поле обладает особым вакуумом. В пользу этого можно привести разные доводы. В отсутствие реальных полей бесконечная энергия отрицательного дираковского фона фермионов компенсируется энергией нулевых колебаний электромагнитного поля и фона других бозонов. Я. Б. Зельдович допускает, что при наличии гравитации эта компенсация может нарушиться. В [2] подробно обсуждается роль такой поляризации в космологии. Но мыслимо и другое проявление гравитационного вакуума. Искривляя пространство (нарушая его однородность и изотропность) гравитационное поле «деформирует» вакуум, в результате этого в нем могут возникнуть упругие натяжения. В обоих случаях возмущенный вакуум характеризуется определенным тензором энергии — импульса. Можно привести два прекрасных примера в пользу такой гипотезы. Первый из них — эффект Казимира [3], подтвержденный экспериментом. В качестве второго — укажем на ситуацию с кварками, заточенными в барионе. В феноменологическом описании здесь вводится понятие постоянной $B \sim 10^{36}$ эрг/см^3, представляющей давление вакуума на стенки «барионного мешка».

В соответствии с вышесказанным ниже вакууму приписывается тензор энергии—импульса, предполагая, что он также участвует в формировании метрики пространства — времени. Это делается феноменологическим путем, не выходя за рамки традиционного формализма. При этом необходимо заботиться о согласованности с пост-ньютоновским приближением теории. Заранее можно ожидать, что роль вакуума должна быть существенной в теории сверхплотных небесных тел.

Для гравитирующих масс найдены внешние решения и сформулирована внутренняя задача.

2. *Уравнения поля.* Итак, будем исходить из уравнений поля, записанных в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} (t_{ik} + \tau_{ik}), \qquad (1)$$

где t_{ik} и τ_{ik} — тензоры энергии—импульса звездного вещества и гравитационного вакуума соответственно.

Ниже мы будем рассматривать только центрально-симметрическое гравитационное поле, создаваемое невращающимся небесным телом с статическим распределением масс. В изотропных кординатах квадрат интервала

$$ds^2 = e^f c^2 dt^2 - e^{\psi} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2); \qquad (2)$$

где f и ψ — функции только от r. Из симметрии метрики очевидно, что

$$\tau_i^k = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_\perp \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь ε — вакуумная плотность энергии, p — давление в радиальном, а $p_\perp$ — в поперечном направлениях. Закон Паскаля для вакуума не имеет места. Например, в аксиально-симметрическом поле компоненты τ_2^2 и τ_3^3 также отличались бы друг от друга.

Выпишем теперь уравнения поля в явном виде:

$$-e^{-\psi}\left(\psi'' + \frac{1}{4}\psi'^2 + \frac{2}{r}\psi'\right) = \rho^* c^2 + \varepsilon^*,$$

$$e^{-\psi}\left(\frac{1}{4}\psi'^2 + \frac{1}{2}\psi' f' + \frac{\psi' + f'}{r}\right) = P^* + p^*, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\psi}\left(\psi'' + f'' + \frac{1}{2}f'^2 + \frac{\psi' + f'}{r}\right) = P^* + p_\perp^*$$

и уравнение гидродинамики, которое следует из них:

$$P' + p' + (p - p_\perp)\left(\psi' + \frac{2}{r}\right) + \frac{1}{2}(\rho c^2 + P + \varepsilon + p) f' = 0. \tag{5}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r, P — давление, ρ — плотность массы звездного вещества и введено оозначение $8\pi kF/c^4 = F^*$.

Ниже путем разумных допущений установлен вид уравнений состояния вакуумного вещества: $p = p(\varepsilon)$, $p_\perp = p_\perp(\varepsilon)$; приведено выражение для τ_{ik} в одном частном случае и найдены внешние решения уравнений (4).

3. *Уравнения состояния вакуумного вещества.* На больших расстояниях от небесного тела можно записать следующие известные разложения, справедливые для любого варианта теории гравитации.

$$e^{f} = 1 - \alpha\frac{r_g}{r} + \frac{1}{2}\beta\frac{r_g^2}{r^2} + \ldots$$

$$e^{\psi} = 1 + \gamma\frac{r_g}{r} + \frac{3}{8}\sigma\frac{r_g^2}{r^2} + \ldots,\quad r \gg r_g, \tag{6}$$

где r_g — гравитационный радиус, r — расстояние от центра гравитирующих масс, α, β, γ, σ — пост-ньютоновские параметры разложения. Без учета вакуумных эффектов, когда имеет место решение Шварцшильда,

$\alpha=\beta=\gamma=\sigma=1$. Не теряя общности можно положить $\alpha=1$, что равносильно включению α в определение r_g. С точностью современных наблюдательных данных $\beta=\gamma=1$. Об остальных параметрах пока данных нет. Однако следует иметь в виду, что эти данные относятся к Солнцу, являющемуся нерелятивистским объектом, и поэтому к ним следует относиться с осторожностью. Дело в том, что для релятивистских объектов, каковыми, например, являются нейтронные звезды, не исключена ситуация, когда пост-ньютоновские параметры зависят от скалярного параметра $q_0=P_0/\rho_0c^2$ (ρ_0, P_0 — соответственно плотность массы и давление в центре небесного тела), которым определяются распределение масс, интегральные характеристики конфигураций и гравитационное поле. Такая зависимость не противоречит наблюдательным данным, если при $q_0\to 0$ величины $\beta(q_0)$ и $\gamma(q_0)$ стремятся к единице.

Подставив разложение (6) в уравнения (4), найдем

$$\varepsilon^*=\frac{3}{4}(\gamma^2-\sigma)\frac{r_g^2}{r^4}+\ldots$$

$$p^*=(1-\gamma)\frac{r_g}{r^3}+\left(1+\frac{9}{4}\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma-\beta-\frac{3}{4}\sigma\right)\frac{r_g^2}{r^4}+\ldots \qquad (7)$$

$$p_\perp^*=\frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{r_g}{r^3}+\left(\frac{3}{4}\sigma+\beta+\frac{1}{2}\gamma-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2\right)\frac{r_g^2}{r^4}+\ldots$$

Предполагая, что при $r\to\infty$ отношения p/ε и $p_\perp/\varepsilon$ должны быть конечными, получаем $\gamma=1$. Таким образом, приходим к следующему важному результату

$$\varepsilon^*=\frac{3}{4}(1-\sigma)\frac{r_g^2}{r^4}+\ldots$$

$$p^*=-p_\perp^*=\frac{1}{4}(7-3\sigma-4\beta)\frac{r_g^2}{r^4}+\ldots \qquad (8)$$

Эти выражения представляют собой первые члены в разложении плотности энергии и давления вакуума по степеням r_g/r. В этом приближении $p\sim p_\perp\sim\varepsilon\sim r_g^2/r^4$. В принципе, можно допустить и более тесное согласие новых уравнений поля с уравнениями Эйнштейна, считая $\beta=\sigma=1$. Тогда ε, p и $p_\perp$ будут величинами более высокого порядка малости при $r\gg r_g$. Однако в непосредственной окрестности небесного тела с радиусом $\sim r_g$ они могут оказаться не только не малыми, но и настолько существенными, что приведут к радикальным изменениям в наших представлениях о сверхплотных небесных телах. В общем случае, предполагая

$$\varepsilon = c_1 \frac{r_g^n}{r^{2+n}} + \ldots; \quad p = a\varepsilon + \ldots, \quad p_\perp = b\varepsilon + \ldots, \tag{9}$$

где $n \geqslant 2$, из уравнения гидродинамики (5) вне звездного вещества:

$$p' + \frac{1}{2}(\varepsilon + p) f' + (p - p_\perp)\left(\psi' + \frac{2}{r}\right) = 0 \tag{10}$$

получаем

$$\varepsilon' + \frac{2}{r}\left(1 - \frac{b}{a}\right)\varepsilon \approx 0, \quad r \gg r_g.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \frac{c_2}{r^{2(1-b/a)}} + \ldots, \; r \gg r_g.$$

Сравнивая эту асимптотику с (9), находим $n = -2b/a$, и следовательно

$$\frac{p_\perp}{p} = -\frac{n}{2}, \quad n \geqslant 2. \tag{11}$$

При $n = 2$ получается результат (8). В настоящей работе мы рассматриваем только этот случай.

4. *Об одном возможном выражении для* τ_{ik}. Попытаемся найти аналитическое выражение для тензора τ_{ik}. При этом существенным является введение нами понятий скорости и ускорения вакуумного вещества: $u^i = dx^i/ds$, $w^i = Du^i/ds$. Для статического поля в изотропных координатах имеем

$$\begin{gathered} u^0 = e^{-f/2}, \quad u^1 = u^2 = u^3 = 0 \\ w^1 = \frac{1}{2} f' e^{-\psi}, \quad w^0 = w^2 = w^3 = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

В принципе, τ_{ik} должен как-то выражаться через тензоры, характеризующие гравитационное поле, а именно: метрический тензор g_{ik}, тензор Римана R_{iklm}, его свертки R_{ik}, R; скорость u^i и ускорение w^i вакуумного вещества. Первая простая комбинация, которая напрашивается, — это $\tau_{ik} = c_1 g_{ik} + c_2 u_i u_k$, сходная с космологическим членом в уравнениях Эйнштейна. Но она фактически относится к невозмущенному состоянию вакуума (космологический фон) и поэтому является лишь началом отсчета для τ_{ik}. К тому же она не удовлетворяет асимптотикам (8). Можно рассмотреть также комбинацию типа

$$c_1 R u_i u_k + c_2 u^m u^n R_{mn} g_{ik} + c_3 u^m u^n R_{imkn} + c_4 u^m (u_i R_{km} + u_k R_{im}),$$

но и она не согласуется с (8). Нетрудно убедиться, что нелинейные комбинации R, R_{ik}, R_{iklm} или их сочетания с u^i и w^i также не удовлетворяют требованиям (8).

Остается обсудить выражение

$$\tau_{ik} = a_1 w_i w_k + a_2 w_n w^n g_{ik} + a_3 w_n w^n u_i u_k.$$

Учитывая (12), находим

$$\varepsilon = -\frac{a_2 + a_3}{4} f'^2 e^{-\psi}; \quad p = \frac{a_1 + a_2}{4} f'^2 e^{-\psi}; \quad p_\perp = \frac{a_2}{4} f'^2 e^{-\psi}. \tag{13}$$

Согласно (6), на больших расстояниях от источника поля $f' = r_g/r^2$, и поэтому выражения (13), в принципе, можно согласовать с (8). Сравнив (13) и (8), получаем связь между постоянными: $a_1 + 2a_2 = 0$. Выпишем уравнения поля для области вне распределения масс, подставив в (4), (5) выражения для ε, p, $p_\perp$ из (13):

$$\psi'' + \frac{1}{4}\psi'^2 + \frac{2}{r}\psi' = \frac{a_2^* + a_3^*}{4} f'^2, \tag{14}$$

$$\frac{1}{4}\psi'^2 + \frac{1}{2}\psi' f' + \frac{\psi' + f'}{r} = \frac{a_1^* + a_2^*}{4} f'^2, \tag{15}$$

$$\psi'' + f'' + \frac{1}{2} f'^2 + \frac{\psi' + f'}{r} = \frac{a_2^*}{2} f'^2, \tag{16}$$

$$(a_1 + a_2) f'' - \frac{1}{2} a_2 \psi' f' + \frac{a_1}{r} f' + \frac{a_1 - a_3}{4} f'^2 = 0. \tag{17}$$

Здесь $a_i^* = 8\pi k a_i / c^4$. Умножая первое уравнение на -1 и складывая его с (15) и (16), приходим к результату

$$f'' + \frac{1}{4}(2 + a_3^*) f'^2 + \frac{1}{2}\psi' f' + \frac{2}{r} f' = 0,$$

который должен совпадать с (17). Из этого требования находим

$$a_1^* + 2a_2^* = 0, \quad (1 - a_2^*)\, a_3^* = 0.$$

Таким образом, получаем два решения: $a_1^* = -2$, $a_2^* = 1$ и $a_3^* = 0$,

$a_1^* = -2a_2^*$. Чтобы сделать выбор между ними, рассмотрим уравнение (5). В первом случае вне вещества a_1^* и a_2^* — постоянные числа, не зависящие от q_0. Поэтому внутри звезды по крайней мере вблизи ее поверхности они также будут постоянными. Имея ввиду эту область, убедимся, что рассматриваемая альтернатива приводит к противоречию. В самом деле, подставив в (5) выражение (13) и предполагая $a_3 \neq 0$, $a_1^* = -2$, $a_2^* = 1$, приходим к результату

$$\overset{\prime}{P}{}^* + \frac{1}{2}(\rho^* c^2 + P^*)\overset{\prime}{f} - \frac{1}{4}\overset{\prime}{f} e^{-\psi}\left[2\overset{\prime\prime}{f} + \overset{\prime}{\psi}\overset{\prime}{f} + \left(1 + \frac{1}{2}a_3^*\right)\overset{\prime}{f}{}^2 + \frac{4}{r}\overset{\prime}{f}\right] = 0.$$

Далее, умножив третье из уравнений (4) на 2 и сложив его с двумя первыми, получим

$$\frac{1}{2}e^{-\psi}\left[2\overset{\prime\prime}{f} + \overset{\prime}{\psi}\overset{\prime}{f} + \left(1 + \frac{1}{2}a_3^*\right)\overset{\prime}{f}{}^2 + \frac{4}{r}\overset{\prime}{f}\right] = \rho^* c^2 + 3P^*.$$

Из этого и предыдущего уравнений находим $\overset{\prime}{P} - P\overset{\prime}{f} = 0$, что не согласуется с нерелятивистским предельным случаем. Поэтому остается только решение $a_3 = 0$, $a_1 = -2a_2$. Следовательно,

$$\tau_{ik} = a_2(w_n w^n g_{ik} - 2w_i w_k) \tag{18}$$

и поэтому

$$p = -p_{\perp} = \varepsilon = -\frac{a_2}{4}\overset{\prime}{f}{}^2 e^{-\psi},$$

$$\tau_i^k = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Сравнение с (8) дает

$$a_2^* = 3(\sigma - 1), \quad \beta = 1. \tag{20}$$

Относительно скалярного параметра a_2 необходимо заметить, что вне распределения масс он должен зависеть от q_0, а внутри звезды возможно и от координат. В противном случае, полагая a_2 постоянным числом, не зависящим от q_0, и повторяя вышеприведенные операции с уравнениями (4), (5), мы пришли бы к результату

$$\overset{\prime}{P} + \frac{1}{2}[(1 - a_2^*)\rho c^2 + (1 - 3a_2^*)P]\overset{\prime}{f} = 0,$$

Который в ньютоновском пределе сводится к

$$\dot{P} \approx -(1-a_2^*)\frac{km(r)\varphi(r)}{r^2}.$$

Отсюда следует $a_2 = 0$, что возвращает нас к теории гравитации без учета роли вакуума.

Итак, вне распределения масс a_2 зависит от q_0 и, по-видимому, является важной характеристикой небесного тела. Вышеприведенные рассуждения, конечно, не дают достаточно оснований утверждать, что найдено истинное выражение для τ_{ik}, адекватно описывающее состояние гравитационного вакуума. Скорее его следует считать одним из логически возможных аппроксимаций для тензора τ_{ik}. Заметим также, что в (18) не учтено непосредственное влияние вещества и негравитационных полей на вакуум. По существу предполагается, что это воздействие осуществляется только косвенным образом через гравитационное поле.

5. *Внешние решения*. Для нахождения внешних решений удобно исходить из интервала, записанного в виде

$$ds^2 = e^{2\nu}c^2dt^2 - e^{-2\nu}[d\lambda^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{21}$$

где $\nu = \nu(\lambda)$, $R = R(\lambda)$. Связь между (2) и (21) такая:

$$2\nu = f, \quad e^{-\nu}d\lambda = e^{\psi/2}dr, \quad Re^{-\nu} = r. \tag{22}$$

При преобразовании $r \to \lambda$ вид тензора энергии — импульса не изменяется.

Для решения уравнений поля необходимо задать конкретный вид уравнений состояния вакуумного вещества: $p = p(\varepsilon)$, $p_\perp = p_\perp(\varepsilon)$. В эффекте Казимира зависимость давлений от плотности энергии вакуума линейная. Такая зависимость согласуется с асимптотиками (8) и с выражением (19) для тензора τ_{ik}. Поэтому в качестве простейшей модели за основу примем уравнения

$$p = -p_\perp = a\cdot\varepsilon, \tag{23}$$

где

$$a(q_0) = \frac{7-3\sigma-4\beta}{3(1-\sigma)}. \tag{24}$$

Несмотря на приведенные доводы зависимости, $p(\varepsilon)$ и $p_\perp(\varepsilon)$ могут оказаться более сложными. Поэтому (23) следует рассматривать как удобную модель для получения количественных оценок вакуумных эффектов. В частном случае $a = 1$ для τ_{ik} получается выражение (19).

В новых координатах уравнения поля имеют вид

$$e^{2\nu}\left(2\nu'' - \nu'^2 + 4\frac{\nu' R'}{R} - \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} - 2\frac{R''}{R}\right) = \rho^* c^2 + \varepsilon^*,$$

$$e^{2\nu}\left(-\nu'^2 + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{1}{R^2}\right) = P^* + a\varepsilon^*, \tag{25}$$

$$e^{2\nu}\left(\nu'^2 + \frac{R''}{R}\right) = P^* - a\varepsilon^*.$$

Приведем также уравнение гидродинамики

$$P' + (\rho c^2 + P)\nu' + a\varepsilon' + (1 - 3a)\varepsilon\nu' + 4a\frac{R'}{R}\varepsilon = 0, \tag{26}$$

которое содержится в них.

Вне распределения масс

$$e^{2\nu}\left(-\nu'^2 + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{1}{R^2}\right) = a\varepsilon^*, \tag{27}$$

$$e^{2\nu}\left(\nu'^2 + \frac{R''}{R}\right) = -a\varepsilon^*, \tag{28}$$

$$\varepsilon' + 4\varepsilon\frac{R'}{R} - \left(3 - \frac{1}{a}\right)\varepsilon\nu' = 0. \tag{29}$$

Сложив уравнения (27) и (28), получим

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{1}{R^2} = 0.$$

Его решением является

$$R^2 = (\lambda + c_1 r_g)^2 + c_2 r_g^2,$$

где c_1, c_2 — безразмерные постоянные интегрирования. Теперь проинтегрируем уравнение (29). Учитывая асимптотику (8), находим

$$\varepsilon^* = \frac{\gamma - 1}{4a}\frac{r_g^2}{R^4}e^{(3-1/a)\nu}. \tag{30}$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma = 1 + 3a(1 - \sigma) \tag{31}$$

и учтено, что на бесконечности радиальные координаты r, χ и функция $R(\chi)$ асимптотически совпадают (см. (6) и (22)). Имея в виду найденные выражения для R^2 и ε, из (27) находим

$$\dot{\nu}^2 = -\frac{r_g^2}{R^4}\left[c_2 + \frac{\delta-1}{4}e^{(1-1/a)\nu}\right].$$

При $\chi \to \infty$ нужно потребовать, чтобы $2\nu \approx r_g/\chi^2 \approx r_g/R^2$, и поэтому $c_2 = -\delta/4$. Таким образом

$$\dot{\nu} = \frac{r_g}{2R^2}\sqrt{\delta + (1-\delta)e^{(1-1/a)\nu}}, \tag{32}$$

$$R = \sqrt{(\chi + c_1 r_g)^2 - \frac{\delta}{4}r_g^2}. \tag{33}$$

Плотность вакуумной энергии можно записать в виде

$$\varepsilon^* = \frac{\delta-1}{a}\left[\delta + (1-\delta)\,e^{(1-1/a)\nu}\right]^{-1}\left(\frac{d\nu}{dl}\right)^2 e^{(1-1/a)\nu}, \tag{34}$$

где $dl = l^{-\nu}d\chi$ — элемент собственной длины в радиальном направлении. Только при $a = 1$ плотность энергии $\varepsilon^* \sim (d\nu/dl)^2 \sim w_n w^n$, и мы приходим к (18).

Интегрируя (32) и учитывая граничное условие на бесконечности, находим

$$e^{\frac{a-1}{a}\nu} = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta-1}\dfrac{4z}{(1+z)^2}, \quad z = \dfrac{\sqrt{\delta}-1}{\sqrt{\delta}+1}\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{\frac{a-1}{2a}}, & \text{при } \delta > 0 \\ \left(1 + \dfrac{a-1}{4a}\dfrac{r_g}{\chi + c_1 r_g}\right)^{-2}, \quad \text{при } \delta = 0 & \\ \dfrac{\delta}{\delta-1}\sin^{-2}z, \quad z = \operatorname{arctg}\sqrt{-\delta} + \dfrac{a-1}{2a}\operatorname{arctg}\lambda, & \text{при } \delta < 0, \end{cases} \tag{35}$$

где $\lambda = \sqrt{|\delta|}\,r_g/2(\chi + c_1 r_g)$ и $a \neq 1$. В случае $a = 1$

$$\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\delta}}\ln\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}, & \text{при } \delta > 0 \\ -\dfrac{r_g}{2(\chi + c_1 r_g)}, & \text{при } \delta = 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-\delta}}\operatorname{arctg}\lambda, & \text{при } \delta < 0, \end{cases} \tag{36}$$

где $\delta = 4 - 3\sigma$. В теории Эйнштейна $\delta = 1$ и

$$\nu = \frac{1}{2}\ln\frac{\chi + (c_1 - 0.5)\,r_g}{\chi + (c_1 + 0.5)\,r_g}, \qquad R = \sqrt{(\chi + c_1 r_g)^2 - \frac{1}{4}r_g^2}.$$

Приведенные решения помимо постоянных c_1 и r_g содержат два свободных параметра δ и a, которые следует как-то задать. Что же касается c_1 и r_g, то они определяются условиями сшивки внешних и внутренних решений на поверхности звезды. Только после осуществления этой программы можно говорить о научной ценности полученных решений. В следующем разделе мы сформулируем внутреннюю задачу и процедуру сшивки.

6. *Внутренняя задача.* Будем предполагать, что уравнения состояния вакуума (23) справедливы и внутри распределения масс. В некотором смысле такое допущение оправдано тем, что в рассматриваемом приближении вид тензора τ_{ik} определяется только гравитационным полем. Уравнения поля для внутренней области небесного тела приведены в (25). Мы имеем три независимых уравнения для четырех неизвестных функций: $\nu(\chi)$, $R(\chi)$, $P(\chi)$, $\varepsilon(\chi)$. Здесь подразумевается вырожденное звездное вещество, плотность массы которого определяется только его давлением. Необходимо найти еще одно уравнение.

Внутри небесного тела

$$(t_i^k + \tau_i^k)_{;\,k} = 0. \tag{37}$$

Всякое изменение давления звездного вещества должно как-то сказаться на состоянии вакуума через гравитационное поле. Это влияние формально можно учесть, введя понятие некоторой «эффективной силы трения» между звездным и вакуумным веществами:

$$-t^k_{i;\,k} = \tau^k_{i;\,k} = F_i. \tag{38}$$

Она, очевидно, должна определяться величинами, характеризующими вещество, вакуум и гравитационное поле. В линейном приближении по тензору Римана, его сверток, t_{ik} и τ_{ik}, имеем

$$F_i = \alpha_1 t_{ik} w^k + \alpha_2 t w_i + \alpha_3 \tau_{ik} w^k + \alpha_4 \tau w_i + \alpha_5 R_{ik} w^k + \alpha_6 R w_i + \alpha_7 t_{ik} u^k +$$
$$+ \alpha_8 t u_i + \alpha_9 \tau_{ik} u^k + \alpha_{10} \tau u_i + \alpha_{11} R_{ik} u^k + \alpha_{12} R u_i,$$

где α_i — постоянные. Используя уравнения Эйнштейна (1), это выражение можно записать в виде

$$F_i = c_1 t_{ik} w^k + c_2 t w_i + c_3 \tau_{ik} w^k + c_4 \tau w_i + c_5 t_{ik} u^k + c_6 t u_i + c_7 \tau_{ik} u^k + c_8 \tau u_i,$$

где c_i — известные линейные комбинации постоянных α_i, выписывать которые нет необходимости. В центрально-симметрическом поле вектор

$$\Phi_i = c_3\tau_{ik}w^k + c_4\tau w_i + c_7\tau_{ik}u^k + c_8\tau u_i$$

имеет только компоненты Φ_0 и Φ_1, которые с учетом уравнений состояния (23) записываются в виде

$$\Phi_0 = [c_7 + (1 + a)c_8]\,u_0\varepsilon,$$

$$\Phi_1 = [-ac_3 + (1 + a)c_4]\,w_1\varepsilon.$$

Вне распределения масс $\Phi_i = F_i = 0$, и поскольку u_0 и w_1 не равны нулю, то $c_7 + (1 + a)c_8 = -ac_3 + (1 + a)c_4 = 0$. Поэтому

$$F_i = c_1 t_{ik}w^k + c_2 t w_i + c_5 t_{ik}u^k + c_6 t u_i.$$

Рассмотрим теперь вектор $v_i = c_5 t_{ik}u^k + c_6 t u_i$. Согласно (12), он имеет лишь одну отличную от нуля компоненту

$$v_0 = [c_5\rho c^2 + c_6(\rho c^2 - 3P)]\,u_0.$$

В статическом поле $v_0 = F_0 = \tau^k_{0;\,k} = 0$, и поэтому $c_5 = c_6 = 0$. Следовательно,

$$F_i = c_1 t_{ik}w^k + c_2 t w_i.$$

Подставляя это выражение в уравнение (38), находим

$$P' = -[(1 + c_2)\rho c^2 + (1 - c_1 - 3c_2)\,P]\,\nu'.$$

Сравнение с ньютоновским пределом приводит к выводу, что $c_2 = 0$, если c_2 не зависит от q_0. Ограничиваясь этим простым случаем и переобозначая c_1 через ω, получаем

$$\tau^k_{i;\,k} = -t^k_{i;\,k} = \omega t_{ik}w^k. \qquad (39)$$

Следовательно,

$$P' = -[\rho c^2 + (1 - \omega)\,P]\,\nu'. \qquad (40)$$

В соответствии с приведенными аргументами ω — безразмерное постоянное число. Однако они не являются достаточно строгими, и поэтому ω м о жет оказаться функцией от параметра q_0 или даже от радиальной координаты.

Теперь выпишем полную систему уравнений (см. (25), (26), (40)), определяющую поле и распределение масс внутри небесного тела:

$$e^{2\tilde\nu}\left(-\tilde\nu'^2+\frac{\tilde R'^2-1}{\tilde R^2}\right)=P^*+a\varepsilon^*,$$

$$e^{2\tilde\nu}\left(\tilde\nu'^2+\frac{\tilde R''}{\tilde R}\right)=P^*-a\varepsilon^*,$$

$$a\varepsilon'+[(1-3a)\varepsilon+\omega P]\tilde\nu'+4a\frac{\varepsilon\tilde R'}{\tilde R}=0 \tag{41}$$

$$P'+[\rho c^2+(1-\omega)P]\tilde\nu'=0.$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde\nu=\nu-\nu_0,\quad \tilde R=Re^{-\nu_0},\quad \tilde\chi=\chi e^{-\nu_0},$$

где $\nu_0=\nu(0)$, а штрих теперь означает дифференцирование по $\tilde\chi$. Вблизи центра звезды имеем следующие разложения:

$$\tilde\nu=\frac{1}{12}(\rho_0^*c^2+3P_0^*)\tilde\chi^2+\dots$$

$$\tilde R=\tilde\chi\left(1+\frac{1}{6}P_0^*\tilde\chi^2+\dots\right)$$

$$P=P_0-[\rho_0c^2+(1-\omega)P_0]\tilde\nu+\dots \tag{42}$$

$$\varepsilon=-\frac{\omega}{3a}P_0\tilde\nu+\dots,$$

где индексом нуль обозначены значения величин при $\chi=0$.

Разложения (42) позволяют найти ограничение на величину ω. В самом деле, в реальных конфигурациях $P'<0$ и поэтому $\omega\leqslant 1+\rho_0c^2/P_0$. Поскольку ω считается универсальной постоянной, то $\omega\leqslant 1+\lim\limits_{P\to\infty}\rho c^2/P$. Например, для ультрарелятивистского идеального газа частиц (кварковая плазма в пределе больших давлений) $\omega\leqslant 4$. «Упругие силы вакуума», очевидно, должны препятствовать изменению его состояния. Поэтому из (40) можно ожидать, что $\omega\geqslant 0$. Таким образом,

$$0<\omega\leqslant 1+\lim_{P\to\infty}\frac{\rho c^2}{P}. \tag{43}$$

Теории Эйнштейна соответствует случай $\omega=0$.

Численное интегрирование удобнее начинать с центра конфигураций. При этом кроме $q_0 = P_0/\rho_0 c^2$ необходимо задать параметры a и ω. В принципе последние можно определить из анализа наблюдательных данных о массах и радиусах сверхплотных небесных тел. При этом разумно ожидать, что $|a| \sim 1$. На поверхности конфигурации внутренние решения должны плавно переходить во внешние. Эта поверхность определяется уравнением

$P(\tilde{\chi}) = 0$. Из условий непрерывности функций $\bar{\nu}$, $\bar{R}$, $\tilde{R}$ и ε определяются величины r_g, ν_0, c_1 и δ, входящие во внешние решения (35), (36).

Третье уравнение системы (41) можно записать в следующем интегральном виде:

$$\varepsilon = -\frac{\omega}{a\bar{R}^4}\int_0^{\bar{\nu}} P(y)\,\bar{R}^4(y)\,e^{(3-1/a)(\tilde{\nu}-y)}\,dy. \qquad (44)$$

Поэтому на больших расстояниях от небесного тела

$$\varepsilon^* \sim -q_0\frac{\omega r_g^2}{a\bar{R}^4} \approx -q_0\frac{\omega r_g^2}{a r^4}, \qquad r \gg r_g.$$

Здесь r — радиальная координата в изотропной метрике (2). Из сравнения с (8) находим

$$\sigma - 1 \sim q_0\frac{\omega}{a},$$

а из (24)

$$\beta = \frac{7 - 3[\sigma + a(1-\sigma)]}{4}.$$

Следовательно, для звезд типа Солнца ($q_0 \ll 1$) пост-ньютоновские параметры β и σ (см. разложения (6)) с большой точностью равны 1. Поэтому предполагаемая в работе идея о гравитационном вакууме не противоречит наблюдательным данным. Однако мы ожидаем, что в случае сильных полей ее учет приведет к заметным отклонениям от теории Эйнштейна.

Итак, в настоящей работе утверждается, что в небесных телах вещество, метрика и гравитационный вакуум образуют единый комплекс, определяемый уравнениями гравитационного поля, при условии, что на бесконечности пространство — время асимптотически плоское.

Выражаем благодарность академику В. А. Амбарцумяну за ценные, стимулирующие обсуждения и критические замечания. Мы благодарны также участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за обсуждения.

Ереванский государственный
университет
Отдел прикладных проблем
физики АН Арм.ССР

PHENOMENOLOGICAL APPROACH TO THE THEORY OF GRAVITATIONAL VACUUM

L. SH. GRIGORIAN, G. S. SAHAKIAN

In the present paper the following idea is developed: in the presence of gravitation the vacuum acquires properties of a real medium, described by the definite energy-momentum tensor τ_{ik}. It is stated that besides usual matter the vacuum also takes part in the formation of the space-time metric. The problem of the vacuum in the case of the central-symmetric static field is examined. Essential properties of the tensor τ_{ik} are established using the symmetry of the problem, and also the post-Newtonian and Newtonian limits. Outer solutions are found and the inner problem is formulated as well as the procedure of joining the solutions on the surface of a celestial body. It is stated that in celestial bodies the matter, the gravitational vacuum and the metric form a physical unity, defined by the solution of equations of the gravitational field.

ЛИТЕРАТУРА

1. *V. A. Ambartsumian*, Rev. Mod. Phys., 30, 944, 1958.
2. *Я. Б. Зельдович*, УФН, 133, 479, 1981.
3. *H. B. G. Casimir*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap., 51, 793, 1948.