АСТРОФИЗИКА

ТОМ 20 ИЮНЬ, 1984 ВЫПУСК 3

УДК 52—64—732

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ К ЗАДАЧАМ ПЕРЕНОСА ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ В КРИСТАЛЛАХ

А. Р. МКРТЧЯН, Р. Г. ГАБРИЕЛЯН

Поступила 22 сентября 1983
Принята к печати 5 февраля 1984

Рассмотрена возможность применения принципа инвариантности для решения проблемы переноса гамма-излучения в кристаллах, содержащих мессбауэровские изотопы, в случае, когда имеет место ядерное резонансное и релеевское рассеяние. Определены интенсивности излучения после многократного резонансного рассеяния со сферической индикатрисой и с полным перераспределением по частотам в кристаллах конечных размеров. Показано, что при увеличении толщины рассеивателя ширина энергетического спектра гамма-излучения увеличивается.

Теория переноса лучистой энергии [1, 2], развитая применительно к задачам диффузного рассеяния света в газовых средах, может найти большую область применения для решения многих задач переноса в твердых телах. Иллюстрацией сказанного может служить задача переноса $\gamma$-излучения в кристаллах, содержащих мессбауэровские изотопы. В гамма-резонансной спектроскопии представляет большой интерес нахождение углового и частотного распределения выходящего из кристалла диффузно рассеянного $\gamma$-излучения, которое содержит информацию о свойстве и структуре среды.

В кристалле, в основном, конкурируют между собой два канала рассеяния — ядерный резонансный и электронный [3]. Резонансное рассеяние представляет собой безотдачное поглощение и излучение $\gamma$-квантов ядрами (эффект Мессбауэра). После поглощения кванта, энергия возбужденного ядерного спинового состояния может либо испускаться в виде кванта, либо передаваться электрону, выбивая его из атома, т. е. мы имеем дело со случаем $\lambda < 1$, где $\lambda$ — вероятность выживания кванта. Резонансное рассеяние некогерентно, причем происходит полное перераспределение по частотам. Индикатриса рассеяния в общем случае несферическая в связи со структурой и физическими свойствами кристалла, а контур линии поглощения, как правило, лоренцовский.

Второй, электронный канал рассеяния — когерентный, с сильно вытянутой вперед индикатрисой. В этом случае энергия полностью переизлучается ($\lambda_R = 1$).

Принимая во внимание эти два канала рассеяний для уравнений переноса излучения в трехмерном случае можно написать

$$\cos\vartheta \frac{d}{dz} I(z,\ x,\ \vartheta,\ \varphi) = -(\mu_M \alpha(x) + \mu_R) I(z,\ x,\ \vartheta,\ \varphi) +$$

$$+ \frac{\mu_M \lambda}{4\pi^2} \alpha(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') \, dx' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_0^{\pi} I(z,\ x',\ \vartheta',\ \varphi') \chi_M(\gamma) \sin\vartheta' d\vartheta' + \qquad (1)$$

$$+ \frac{\mu_R}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_0^{\pi} I(z,\ x,\ \vartheta',\ \varphi') \chi_R(\gamma) \sin\vartheta' d\vartheta' + B_0(z,\ x,\ \vartheta,\ \varphi),$$

где $z$ — глубина среды, $x = \dfrac{\omega - \omega_0}{\Gamma/2}$ — отклонение частоты $\gamma$-кванта $\omega$ от резонансной частоты $\omega_0$ в единицах полуширины линии $\Gamma/2$, $\mu_M = \sigma_0 n_M$ — коэффициент резонансного поглощения ($\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-18}$ см$^2$ — резонансное сечение поглощения, $n_M$ — концентрация мессбауэровских изотопов), $\mu_R$—коэффициент электронного поглощения, $\chi_M(\gamma)$, $\chi_R(\gamma)$— индикатрисы резонансного и электронного рассеяний, соответственно, $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ — контур линии резонансного поглощения. $B_0(z,\ x,\ \vartheta,\ \varphi)$— функция источника.

Следует отметить, что уже частные случаи уравнения (1) представляют самостоятельный интерес. Рассмотрим, например, задачу о зависимости ширины энергетического спектра $\gamma$-пучка от толщины кристалла, пренебрегая релеевским рассеянием (когда содержание изотопа в кристалле больше 1%, то выполняется соотношение $\mu_M \gg \mu_R$).

Для простоты рассмотрим одномерную среду, на которую падает мессбауэровское излучение с интенсивностью $I$. Требуется найти интенсивности проходящего через среду $I^+(\tau_0,\ x)$ и отраженного от среды $I^-(0,\ x)$ пучков, с учетом многократного рассеяния квантов в среде, где $\tau_0$ — эффективная толщина среды ($\tau_0 = \mu_M d$, $d$ — толщина кристалла).

Воспользуемся вероятностным методом [2] для нахождения интенсивностей $I^+(\tau_0,\ x)$ и $I^-(0,\ x)$, которые определяются с помощью выражений

$$
\begin{aligned}
I^{+}(\tau_0, x) &= \int\limits_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau, x)\, d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} L(\tau, x')\, dx', \\
I^{-}(0, x) &= \int\limits_0^{\tau_0} p(\tau, x)\, d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} L(\tau, x')\, dx',
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $p(\tau, x)\,dx$ — вероятность того, что излучение, поглощенное на эффективной толщине $\tau$, выйдет из среды с частотами в интервале $(x, x+dx)$, $L(\tau, x)\,dx$ — количество поглощенной энергии в среде в точке $\tau$ в интервале частот $(x, x+dx)$ за 1 с $\left(L(\tau, x) = I\alpha(x) \times \times \exp(-\alpha(x)\tau)\right)$.

Функция $p(\tau, x)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$
p(\tau, x) = \frac{\lambda}{2\pi}\alpha(x) e^{-\alpha(x)\tau} + \lambda \int\limits_0^{\tau_0} K(\tau' - \tau)\, p(\tau', x)\, d\tau', \tag{3}
$$

где $K(\tau)$ — ядро, которое задается выражением

$$
K(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) e^{-\alpha(x)|\tau|}\, dx = \frac{1}{4}\, {}_1F_1(3/2;\, 2;\, -|\tau|). \tag{4}
$$

В (3) первый член представляет собой вероятность того, что квант, поглощенный на глубине $\tau$, выйдет из среды без рассеяния по пути, а второй член — вероятность выхода кванта из среды после ряда рассеяний. Выражение (3) получено при предположении изотропности переизлучения.

Подставив

$$
p(\tau, x) = \frac{\lambda}{2\pi}\alpha(x)\, Y(\tau, x) \tag{5}
$$

в уравнение (3), получим

$$
Y(\tau, x) = e^{-\alpha(x)\tau} + \lambda \int\limits_0^{\tau_0} K(\tau' - \tau)\, Y(\tau', x)\, d\tau'. \tag{6}
$$

Решение такого интегрального уравнения, но с бесконечным верхним пределом интегрирования ($\tau_0 \to \infty$) хорошо изучено [1, 2]. Для конечной

$\tau_0$ и произвольных $\lambda$ можно найти решение уравнения (6), используя метод [4, 5], устанавливающий линейную связь между функцией $Y(\tau, x)$ и ее аналогом $\widetilde{Y}(\tau, x)$, для $\tau_0 \to \infty$, который удовлетворяет следующему уравнению:

$$\widetilde{Y}(\tau, x) = e^{-\alpha(x)\tau} + \lambda \int_0^\infty K(\tau' - \tau)\, \widetilde{Y}(\tau', x)\, d\tau'. \tag{7}$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$\widetilde{Y}(\tau, x) = \varphi(x)\, e^{-\alpha(x)\tau} \left[1 + \int_0^\tau e^{\alpha(x)t}\, \Phi(t)\, dt\right],$$

где

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-\alpha(x)\tau} \alpha^2(x)\, dx + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\tau \Phi(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-\alpha(x)(\tau - t)} \alpha^2(x) dx,$$

$\varphi(x)$ — функция Амбарцумяна, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\, \varphi(x')}{\alpha(x) + \alpha(x')}\, \alpha^2(x')\, dx'.$$

Согласно [4, 5] неизвестную функцию $Y(\tau, x)$ можно найти с помощью $\widetilde{Y}(\tau, x)$ из соотношения

$$Y_\pm(\tau, x) = \widetilde{Y}_\pm(\tau, x) \mp \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\tau_0, x, x')\, Y_\pm(\tau, x')\, \alpha^2(x')\, dx', \tag{8}$$

где $Y_\pm(\tau, x) = Y(\tau, x) \pm Y(\tau_0 - \tau, x)$.

Ядро $Z(\tau_0, x, x')$ определяется с помощью принципа инвариантности [4]

$$Z(\tau_0, x, x') = \frac{\widetilde{Y}(\tau_0, x) + \varphi(x)\, A(x')}{\alpha(x) + \alpha(x')},$$

где

$$A(x) = e^{\alpha(x)\tau_0} \left[\varphi(x) - 1 - \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x)\tau}\, \Phi(\tau)\, d\tau\right].$$

Посчитанные таким образом функции $Y(\tau, x)$ и $Y(\tau_0 - \tau, x)$ подставляются в (5) и (2) и вычисляются интенсивности проходящего через вещество $I^+(\tau_0, x)$ излучения и отраженного от вещества $I^-(0, x)$ излучения. На рис. 1, 2 приведены численно вычисленные функции $I^+(\tau_0, x)$ и $I^-(0, x)$, при некоторых значениях толщины $\tau_0$. Как видно из этих рисунков, с увеличением эффективной толщины ширина энергетического спектра диффузного рассеяния увеличивается, при этом интенсивность также увеличивается. Это объясняется тем, что с увеличением толщины еще больше квантов принимают участие в процессе рассеяния, тем самым увеличивается число диффузно рассеянных квантов.

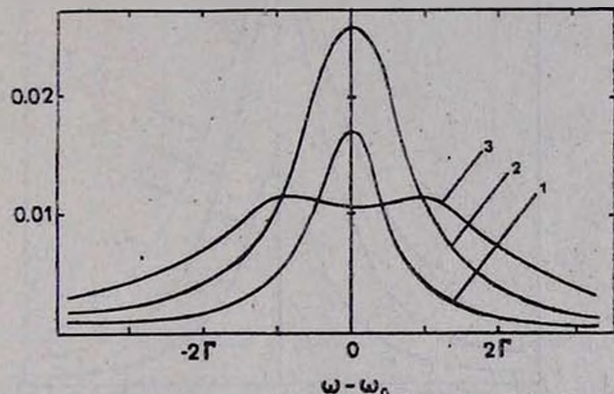


Рис. 1. Интенсивность проходящих через среду диффузно рассеянных $\gamma$-квантов в относительных единицах: 1. $\tau_0 = 0.5$, $\Gamma_{экс} = 1.1$ Г, 2. $\tau_0 = 2$, $\Gamma_{экс} = 1.6$ Г. 3. $\tau_0 = 10$

Вычисления были проведены при значении $\lambda = 0.1$, что соответствует вероятности переизлучения мессбауэровского изотопа $Fe^{57}$. В мессбауэровской спектроскопии значение $\lambda$ определяется по выражению $\lambda = \dfrac{1}{\alpha + 1}$, где $\alpha$ — коэффициент внутренней конверсии (он представляет отношение вероятности испускания электрона к вероятности испускания $\gamma$-кванта; для $Fe^{57}$, $\alpha = 9$).

В этом частном случае из-за малости $\lambda$ уравнение (3) можно решить методом последовательных приближений. Пренебрегая высшими по $\lambda$ (выше $\lambda^2$) членами, для вероятности выхода кванта из среды находим выражение

$$p(\tau, x) = \frac{\lambda}{2\pi} \alpha(x) e^{-\alpha(x)\tau} + \frac{\lambda^2}{2\pi} \alpha(x) \int_0^{\tau_0} K(\tau' - \tau) e^{-\alpha(x)\tau'} d\tau', \qquad (9)$$

при этом допускаемая ошибка определяется согласно выражению

$$\varepsilon = \frac{N (M \tau_0 \lambda)^2}{1 - M \tau_0}, \tag{10}$$

где $N = \max \exp(-\alpha(x)\tau) = 1$, $M = \max K(\tau) = \frac{1}{4}$.

Фактически приближение (9) означает, что мы ограничились только рассеянием первого и второго порядка, что тем точнее, чем меньше $\lambda$ и $\tau_0$ (см. (10)).

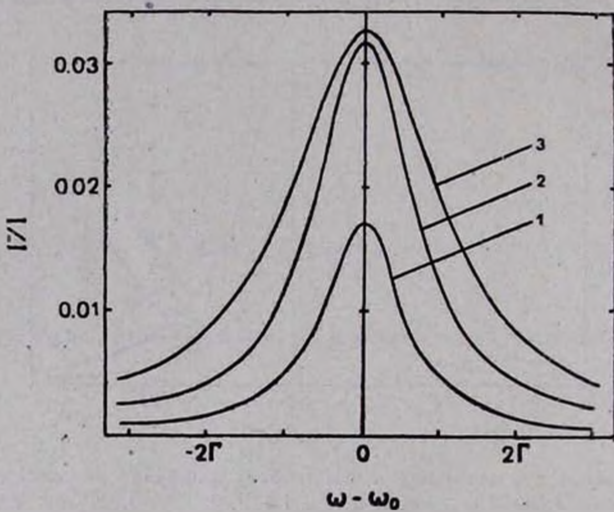


Рис. 2. Интенсивность отраженных от среды диффузно рассеянных $\gamma$-квантов в относительных единицах: 1. $\tau_0 = 0.5$, $\Gamma_{экс} = 1.1\ \Gamma$. 2. $\tau_0 = 2$, $\Gamma_{экс} = 1.55$. 3. $\tau_0 = 10$ $\Gamma_{экс} = 2.3\ \Gamma$.

Используя выражения (2) и (9), для интенсивностей находим

$$\frac{I^+(\tau_0, x)}{I} = \frac{\lambda}{2} \alpha(x) \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x)(\tau_0 - \tau)} e^{-\frac{\tau}{2}} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} \alpha(x) \int_0^{\tau_0} K(\tau' - \tau_0 + \tau) e^{-\alpha(x)\tau'} e^{-\frac{\tau}{2}} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau d\tau',$$

$$\frac{I^-(0, x)}{I} = \frac{\lambda}{2} \alpha(x) \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x)\tau} e^{-\frac{\tau}{2}} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\alpha(x)\int_0^{\infty}K(\tau'-\tau)\,e^{-\alpha(x)\tau'}\,e^{-\frac{\tau}{2}}\,I_0\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau\,d\tau', \tag{11}$$

где $I_0(\tau)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Приведенные на рис. 1 и 2 кривые очень хорошо согласуются с формулами (11). Ошибка вычислений $\varepsilon$ в зависимости от $\tau_0$ соответственно составляет: $\varepsilon = 0.06\ \%$ при $\tau_0 = 1$, $\varepsilon = 0.25\ \%$ при $\tau_0 = 2$, $\varepsilon = 1.8\ \%$ при $\tau_0 = 5$, $\varepsilon = 8\ \%$ при $\tau_0 = 10$.

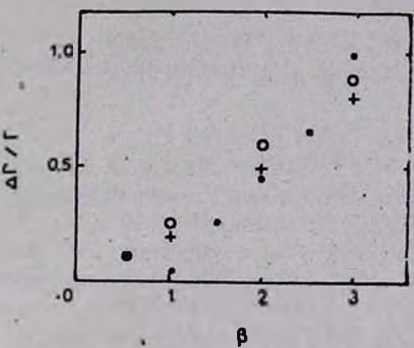


Рис. 3. Зависимость „толщинного уширения" от эффективной толщины поглотителя $\tau_0$ ($\Delta\Gamma = \Gamma_{\text{экс}} - \Gamma$). Кружочки — посчитанные значения $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$, крестики — значения $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$, взятые из [6], точки — значения $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$, взятые из [7].

На рис. 3 приведена эффективная ширина линии диффузно рассеянных $\gamma$-квантов в зависимости от эффективной толщины поглотителя (на рисунке кружочки). Как видно, в приведенном интервале $\tau_0$ она имеет линейный характер. Интересно отметить, что такая же зависимость получается для «толщинного уширения», проходящего через вещество резонансного $\gamma$-излучения (см., например, [6, 7]).

Выражаем глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору Н. Б. Енгибаряну за многочисленные и полезные обсуждения.

Отдел прикладных проблем
физики АН Арм.ССР

## APPLICATION OF INVARIANCE PRINCIPLE TO PROBLEMS OF GAMMA-RADIATION TRANSFER IN CRYSTALS

A. R. MKRTCHIAN, R. G. GABRIELIAN

Possibility of application of Hambartsumian's invariance principle to solve the problem of gamma-radiation transfer in crystals with Mössbauer isotopes is considered in the case when nuclear resonance and Rayleigh scattering take place. An analytical expression is obtained for the radiation intensity after resonance multiplex scattering with spherical indicatrix and complete frequency redistribution in crystals of finite thickness. The width of gamma-radiation energy spectrum is shown to increase with the increase of the scatterer thickness.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии, М., 1956.
3. *В. С. Шпинель*, Резонанс гамма-лучей в кристаллах, М., 1969.
4. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, Математические заметки, 19, 927, 1976.
5. *М. А. Мнацаканян*, Докл. АН СССР, 225, 1049, 1975.
6. *D. A. O'Connor, G. Longworth*, Nucl. Instr. Meth, 30, 290, 1964.
7. *А. Р. Мкртчян, Л. А. Кочарян*, Квантовая электроника, 4, 1581, 1977.