АСТРОФИЗИКА

ТОМ 20 ИЮНЬ, 1984 ВЫПУСК 3

УДК 52—726

ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ НЕЗАМАГНИЧЕННОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ЭЛЕКТРОННО-ЯДЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Г. П. АЛОДЖАНЦ, А. А. СААРЯН

Поступила 22 июня 1983
Принята к печати 10 января 1984

Рассмотрены солитонные, стационарные периодические и ударные волны в вырожденной электронно-ядерной плазме. Показано, что учет релятивизма и вырождения электронов качественно не меняет характера таких волн, а влияет лишь на определение основных параметров (ω_L, r_D и т. д.).

1. *Введение*. При плотностях $10\,Z^1/\sigma^3$ г/см$^3 \lesssim \rho \lesssim 10^{11}$ г/см^3 (σ — число порядка единицы, Z — атомный номер вещества) вещество полностью ионизовано и представляет собой электронно-ядерную плазму, называемую также Ае-плазмой [1, 2]. Такая плазма реализуется в белых карликах и в оболочках барионных звезд. В Ае-плазме электроны образуют релятивистский сильно вырожденный газ. Условие сильного вырождения $\varkappa T \ll E_F - mc^2$ и условие релятивизма $p_F \gtrsim mc$ электронов, которые можно записать соответственно в виде $T \ll 6\cdot 10^9 \times \times (\gamma - 1)$ и $Z^{1/3} N_{30}^{1/3} \gtrsim 1$, хорошо выполняются во всем диапазоне существования Ае-фазы и для температур $T \sim 10^6 \div 10^8$ K, характерных для сперхплотных небесных тел. Здесь $N = 10^{30}\ N_{30}$ — концентрация ядер, $p_F = a/c\ n^{1/3} \approx 3.2\cdot 10^{-17} N_{30}^{1/3} Z^{1/3}$ $(a = (3\pi^2)^{1/3}\hbar c)$ — фермиевский импульс электронов, E_F — их энергия Ферми, $\gamma = E_F/mc^2 = = \sqrt{1+1.4 N_{30}^{2/3} Z^{2/3}}$ — релятивистский фактор (всюду используется система единиц СГС). Выше было использовано условие квазинейтральности $n = ZN$, n — концентрация электронов. Средняя потенциальная энергия кулоновского взаимодействия для электронов оказывается в этих условиях намного меньше их средней кинетической энергии ($\sim E_F$), и параметр неидеальности для электронов

$$g = \frac{e^2}{E_F r} \approx \frac{4.7\cdot 10^{-3} N_{30}^{1/3} Z^{1/3}}{\gamma} \ll 1. \qquad (1)$$

Таким образом, электроны в Ае-плазме представляют собой идеальный сильно вырожденный релятивистский газ. Напротив, кулоновское взаимодействие ядер между собой и с электронами существенно. Термодинамическое состояние ядерной компоненты в Ае-плазме существенно зависит от двух безразмерных параметров: отношения энергии нулевых колебаний ядер к энергии тепловых колебаний

$$\Gamma_0 = \frac{\hbar\omega_D}{\varkappa T} \tag{2}$$

и отношения средней энергии кулоновского взаимодействия ядер к их полной средней энергии колебаний

$$\Gamma = \frac{Z^2 e^2 N^{1/3}}{\overline{E}}. \tag{3}$$

Здесь $\overline{E} = \hbar\omega_D \operatorname{cth} \Gamma_0$ и $\omega_D \approx 0.45\, \Omega_L$ [3], где

$$\Omega_L = \sqrt{\frac{4\pi N e^2 Z^2}{M}} \approx 1.3\cdot 10^{18} \left(\frac{N_{30} Z}{\eta}\right)^{1/2} \tag{4}$$

плазменная частота ядер, $M = \eta Z m_p$ — масса ядра, $\eta = A/Z$, A — массовое число, m_p — масса протона. Следует отметить, что параметры атомных ядер Z, A в Ае-фазе являются функциями плотности ρ (или N) [1, 4] (см. таблицу). Численные расчеты [5] показали, что ядра в Ае-плазме образуют кристаллическую решетку при

$$\Gamma \geqslant \Gamma_m \approx 125. \tag{5}$$

Подставляя (3) в (5), находим следующее условие существования кристаллической фазы:

$$T \leqslant \frac{8.4\cdot 10^6}{\ln \dfrac{x+1}{x-1}} \left(\frac{N_{30} Z}{\eta}\right)^{1/2} \equiv T_m, \tag{6}$$

где T_m температура плавления, а $x = 0.03\, Z^{3/2} \eta^{1/2} / N_{30}^{1/6}$. Как видно из (2), при температурах

$$T \ll 5\cdot 10^6 \left(\frac{N_{30} Z}{\eta}\right)^{1/2} \equiv T_0 \tag{7}$$

$\Gamma_0 \gg 1$, и основной вклад в $\overline{E}$ дают нулевые колебания решетки: $\overline{E} \sim \hbar\omega_D$. В этом случае кристаллическое состояние в Ае-плазме существует вплоть до плотностей

$$N \leqslant 10^{21}\, Z^9 \eta^3. \tag{8}$$

Для Ае-плазмы это условие выполняется, и при температурах, удовлетворяющих (7), ядра образуют кристаллическую решетку. При относительно высоких температурах $T \gg T_0$ существенны тепловые колебания решетки, т. е. $\overline{E} \sim \varkappa T$, и в этом случае Ае-плазма находится в кристаллическом состоянии при плотностях

$$N \geqslant \frac{4 \cdot 10^{14}}{Z^6} T^3. \tag{9}$$

Если условие (6) не имеет места, то ядра в Ае-плазме образуют жидкость.

2. *Основные параметры Ае-плазмы.* Поляризационная длина (радиус дебаевского экранирования) в Ае-плазме определяется электронами. Применение элементарной теории Дебая—Хюккеля к вырожденному локально нейтральному релятивистскому электронному газу приводит к следующему выражению для дебаевского радиуса экранирования в Ае-плазме:

$$r_D = \sqrt{\frac{E_F - m^2c^4}{12\pi n e^2 E_F}} \approx \frac{3.5 \cdot 10^{-10}}{(ZN_{30})^{1/6}\gamma^{1/2}}. \tag{10}$$

Ленгмюровская частота электронов ω_L определяется выражением

$$\omega_L = \sqrt{\frac{4\pi n e^2 c^2}{E_F}} \approx 5.63 \cdot 10^{19} \left(\frac{N_{30}Z}{\gamma}\right)^{1/2}, \tag{11}$$

а ядер Ω_L формулой (4).

Другой важной характеристикой Ае-плазмы является эффективная частота столкновений электронов. В кристаллическом состоянии она определяется рассеянием электронов на примесях, на фононах и на электронах. Используя результаты работы [6], имеем для частоты рассеяния электронов на примесях

$$\nu_{\text{пр}} \sim \frac{Z^2 e^4 N_{\text{пр}} E_F L}{p_F^3 c^2} \approx 1.5 \cdot 10^{15} \gamma Z L \frac{N_{\text{пр}}}{N}, \tag{12}$$

где $L = \ln(p_F r_D/\hbar)$ кулоновский логарифм; $N_{\text{пр}}$ — концентрация примесей (дефектов решетки). Для рассеяния электронов на фононах и на электронах получаем соответственно

$$\nu_{\text{эф}} \sim \begin{cases} \dfrac{(\varkappa T)^5 E_F^2 \gamma_i^2 Z^3 m_p^2}{c^4 p_F^8 \hbar} \approx 1.25 \cdot 10^{-22} \dfrac{Z^{1/3}\gamma_i^2 \gamma^2 T^5}{N_{30}^{8/3}}, & T \ll T_0 \\ \dfrac{e^2 E_F}{\hbar^2 c^2 p_F} \varkappa T \approx 8 \cdot 10^8 \dfrac{\gamma T}{Z^{1/3} N_{30}^{1/3}}, & T \gg T_0 \end{cases} \tag{13}$$

и

$$\nu_{ee} \sim \frac{(4\pi Z)^2 e^6 E_F^4 (\varkappa T)^2}{c^6 p_F^5 \hbar^4} \approx 8 \cdot 10^{-4} \frac{Z^{1/3} \gamma_1^{-1} T^3}{N_{30}^{5/3}}. \tag{14}$$

Если Ae-плазма находится в жидком состоянии, то рассеяние электронов уже ничем не отличается от рассеяния на примесях и эффективная частота столкновений электронов определяется формулой (12), где нужно положить $N_{\text{пр}} = N$.

В сверхплотных небесных телах существуют, по-видимому, чрезвычайно сильные магнитные поля, порядка 10^6 Гс для белых карликов и $B \sim 10^{12}$ Гс для барионных звезд. Ларморовская частота электронов в Ae-плазме определяется известной формулой $\omega_c = eBc/E_F \approx 1.8 \cdot 10^{13} \quad B_6/\gamma_1$.

В табл. 1 приведены основные параметры Ae-плазмы для ряда значений плотностей, рассчитанные по результатам работы [4]. Из нее видно, что при низких температурах ($T \ll T_0$) длина свободного пробега электронов в Ae-плазме определяется, в основном, рассеянием на примесях, если концентрация последних $N_{\text{пр}} \gtrsim 10^{-5}\ N$, а при еще более низких концентрациях примесей — электрон-электронным рассеянием. При высоких температурах ($T \gg T_0$) доминирует электрон-фононное рассеяние.

3. *Волны малой амплитуды*. Переходя к изучению волн в Ae-плазме отметим прежде всего, что в случае кристаллической фазы модули сдвига много меньше объемной сжимаемости. Сжимаемость определяется в основном электронами, кинетическая энергия которых дает основной вклад в полную энергию, а модули сдвига — кулоновским взаимодействием ядер [7]. Учитывая это обстоятельство, колебания твердотельной Ae-плазмы будем изучать в известной модели «желе» [8], заменяя кристалл двухкомпонентной плазмой, состоящей из электронов и ядер. Такая модель не допускает существования поперечных низкочастотных волн (реально существующих в кристаллической Ae-фазе), но качественно верно описывает продольные фононы. Та же модель двухкомпонентной электронно-ядерной плазмы применима также и в случае жидкого состояния Ae-фазы.

Электромагнитные свойства релятивистской квантовой плазмы можно исследовать с помощью кинетического уравнения для матрицы плотности в представлении Вигнера, являющегося аналогом бесстолкновительного уравнения Больцмана в классической теории [9]. Общее выражение для продольной диэлектрической проницаемости такой плазмы получено в работе [10] методом функций Грина. Продольные колебания релятивистской вырожденной электронно-ионной плазмы изучены в [11].

В квазиклассическом приближении продольная ε^l и поперечная ε^{tr} диэлектрические проницаемости определяются известными выражениями [9, 11]

ρ	A	Z	γ	$10^{10} r_D$	$10^{17} P_F$	$10^{-20} \omega_L$	$10^{-18} \Omega_L$	$10^{-12} \frac{\omega_c}{B_6}$
$2.6 \cdot 10^6$	62	28	1.46	3.07	2.8	0.39	0.74	12.2
$6.3 \cdot 10^7$	63	28	3.22	2.12	8.09	1.29	3.64	5.5
$2.6 \cdot 10^8$	65	29	4.98	1.36	12.89	2.1	7.25	3.6
$1.4 \cdot 10^9$	68	29	8.49	0.45	22.25	3.65	16.46	2.1
$3.9 \cdot 10^9$	71	30	11.97	0.32	31.48	5.1	27.6	1.5
$8.7 \cdot 10^9$	75	31	15.42	0.25	40.63	6.65	39.54	1.2
$1.6 \cdot 10^{10}$	78	31	18.85	0.20	49.68	8.0	51.52	0.9
$2.7 \cdot 10^{10}$	82	32	22.24	0.17	58.65	9.5	65.03	0.8
$3.4 \cdot 10^{10}$	85	33	23.8	0.16	62.77	10.3	72.78	0.7
$3.6 \cdot 10^{10}$	86	33	24.17	0.15	63.75	10.4	74.45	0.7
$6.8 \cdot 10^{10}$	104	36	28.9	0.13	76.26	12.4	92.02	0.6
$1.1 \cdot 10^{11}$	127	40	33.27	0.12	87.8	14.1	106.3	0.5
$1.8 \cdot 10^{11}$	157	44	33.27	0.10	98.35	16.0	122.6	0.5
$2.6 \cdot 10^{11}$	195	49	40.87	0.09	107.88	17.4	130.5	0.4
$3.7 \cdot 10^{11}$	267	60	40.89	0.09	107.93	19.4	140.4	0.4
$5.1 \cdot 10^{11}$	314	63	46.92	0.08	123.84	20.3	146.1	0.4
$5.8 \cdot 10^{11}$	353	66	48.08	0.08	126.92	20.7	146.1	0.4

Таблица 1

$10^3 \frac{v_s}{c}$	$10^{-8}\ T_m$	$10^{-7}\ T_0$	$10^{-17} \frac{N}{N_{пр}} \nu_{пр}$	$10^{-17} \frac{\nu_{эф}}{T_б}$ $T \gg T_0$	$10^{-11} \frac{\nu_{ээ}}{T_б^2}$	$10^{-11} \frac{\nu_{эф}}{T_б^5}$ $T \ll T_0$
0.8	0.29	0.28	1.3	0.4	51	725
1.5	0.83	1.4	3.8	0.3	6.1	0.7
1.9	1.37	2.75	6.3	0.3	3.5	0.05
2.5	2.42	6.33	8.5	0.3	0.2	$2\cdot10^{-3}$
2.9	3.59	10.1	12.4	0.3	1.5	$3\cdot10^{-6}$
3.3	4.92	15.0	16.5	0.3	1.2	$5.3\cdot10^{-5}$
3.6	5.91	19.5	20.2	0.3	1.0	$2.2\cdot10^{-5}$
3.9	7.25	24.6	24.6	0.3	0.9	10^{-5}
4.0	8.35	27.6	27.1	0.4	0.8	$0.7\cdot10^{-5}$
4.0	8.55	28.2	27.5	0.4	0.9	$0.6\cdot10^{-5}$
4.2	11.8	34.9	35.9	0.4	0.8	$0.4\cdot10^{-5}$
4.3	16.0	40.3	46.0	0.4	1.0	$0.2\cdot10^{-5}$
4.3	21.2	46.5	56.6	0.5	1.0	$0.2\cdot10^{-5}$
4.2	28.0	49.5	69.1	0.5	1.1	$0.2\cdot10^{-5}$
4.0	42.3	53.2	84.6	0.6	1.1	$0.3\cdot10^{-5}$
4.0	49.6	55.4	102	0.7	1.5	$0.3\cdot10^{-5}$
4.1	54.3	55.4	110	0.7	1.6	$0.3\cdot10^{-5}$

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \frac{3\omega_L^2}{v_F^2 k^2}\left(1 - \frac{\omega}{2kv_F}\ln\frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F}\right) + \varepsilon_A^l, \tag{15}$$

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \frac{3\omega_L^2}{2\omega^2}\left[1 + \left(\frac{\omega^2}{k^2 v_F^2} - 1\right)\left(1 - \frac{\omega}{2kv_F}\ln\frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F}\right)\right] + \varepsilon_A^{tr}, \tag{16}$$

где v_F — фермиевская скорость электронов, а ε_A^l и ε_A^{tr} — добавки, обусловленные ядрами. Рассмотрим высокочастотные продольные колебания для фазовых скоростей $\omega/k \gg v_F$. В этой области поправка, обусловленная ядрами, несущественна ввиду их большой массы и спектр имеет вид

$$\omega^2 = \omega_L^2\left(1 + \frac{3k^2 v_F^2}{5\omega_L^2}\right). \tag{17}$$

Бесстолкновительное затухание Ландау отсутствует, и эти волны в пренебрежении столкновениями не затухают. В окрестности $\omega/k \gtrsim v_F$ спектр продольных колебаний определяется выражением

$$\omega = kv_F\left\{1 + 2\exp\left[-2\left(1 + \frac{k^2 v_F^2}{3\omega_L^2}\right)\right]\right\}. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь низкочастотную ветвь продольных колебаний. Добавка, обусловленная ядрами, равна

$$\varepsilon_A^l = -\frac{\Omega_L^2}{\omega^2}, \tag{19}$$

Для спектра колебаний находим

$$\omega^2 = \Omega_L^2 \frac{k^2 r_D^2}{1 + k^2 r_D^2}. \tag{20}$$

В пределе больших длин волн $kr_D \ll 1$ имеем отсюда

$$\omega = v_s k, \tag{21}$$

где скорость продольного звука

$$v_s = \Omega_L r_D = \sqrt{\frac{z(E_F - m^2c^4)}{3ME_F}}. \tag{22}$$

Это же выражение для скорости звука получается из известной формулы

$$v_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} \approx \sqrt{\frac{z}{M}\cdot\frac{\partial P}{\partial n}}, \tag{23}$$

с использованием условия квазинейтральности $ZN = n$ [12] и уравнения состояния [13]

$$P = \frac{m^4c^5}{32\pi^2\hbar^3}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sh}\xi - \frac{8}{3}\operatorname{sh}\frac{\xi}{2} + \xi\right),$$
$$n = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{3\pi^2}\operatorname{sh}^3\frac{\xi}{4} \tag{24}$$

для вырожденного релятивистского электронного идеального газа, где $\xi = 4Ar\operatorname{sh}(p_F/mc)$.

В пределе $\omega \gg \nu$ декремент затухания низкочастотных волн определяется бесстолкновительным затуханием Ландау на электронах

$$\delta = \frac{3\pi}{4}\frac{\omega^4}{k^3v_F^3}\frac{Mc^2}{ZE_F}. \tag{25}$$

Для звуковых волн, используя закон дисперсии (21), находим

$$\delta = \frac{3\pi}{4}\frac{kv_s^4}{v_F^3}\frac{Mc^2}{ZE_F}. \tag{26}$$

В другом предельном случае $\omega \ll \nu$ для малых длин волн $k\Lambda \gg 1$ (Λ — длина свободного пробега электронов с учетом всех процессов рассеяния, рассмотренных выше) столкновениями опять можно пренебречь, и декремент затухания звуковых волн определяется той же формулой (26). При $\omega \ll \nu$ и для больших длин волн $k\Lambda \ll 1$ затухание фононов обусловлено вязкостью электронного газа. В этом случае декремент затухания можно оценить с помощью элементарной кинетической теории [14]

$$\delta \sim \frac{E_F\omega^2 z}{v_s^2\nu M} = \frac{E_Fk^2Z}{\nu M}. \tag{27}$$

Спектр поперечных колебаний определяется известным дисперсионным уравнением

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 0, \tag{28}$$

где $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ — поперечная диэлектрическая проницаемость (см. формулу (16)). При фазовых скоростях $\omega/k \gg v_F$ находим для спектра незатухающих (в пренебрежении столкновениями) волн известное выражение

$$\omega^2 = \omega_L^2 + k^2c^2. \tag{29}$$

4. *Нелинейные стационарные волны.* Как и в газовой динамике, учет нелинейных эффектов для волн с линейным законом дисперсии должен приводить к хорошо известному эффекту укручения и опрокидывания фронта волны [15]. Если в газовой динамике рост крутизны фронта ограничивается диссипативными эффектами, то в плазме главную роль в этом вопросе могут играть эффекты дисперсии. В определенных условиях дисперсия может компенсировать рост укручения фронта, приводя к стационарному профилю волны.

Ниже стационарные нелинейные ядерно-звуковые волны в Ае-плазме исследуются с помощью гидродинамических уравнений для ядерной компоненты

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{Ze}{M}\nabla\varphi,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla N\vec{v}) = 0, \qquad (30)$$

$$\Delta\varphi = -4\pi e\,(ZN - n).$$

(Пространственное распределение электронов ввиду их больших скоростей $\sim v_F \gg \omega/k$) мгновенно реагирует на изменение поля (т. е. поле волны для электронов квазистационарно). Поэтому распределение электронов имеет вид

$$n = \frac{1}{a^3}\left[(\mu + e\varphi)^2 - m^2c^4\right]^{3/2}, \qquad (31)$$

$\mu = E_F$ — химический потенциал электронного газа. Важным свойством системы уравнений (30) с электронной плотностью (31) является существование у них одномерных решений, в которых все величины зависят от переменных t и x только в комбинации $\xi = x - ut$ с постоянной u. В этом случае из первых двух уравнений системы (30) N и v можно выразить через потенциал поля

$$N = \frac{N_0}{\sqrt{1 - \dfrac{2Ze\varphi}{M(u - v_0)^2}}}, \quad v - u = (v_0 - u)\sqrt{1 - \frac{2Ze\varphi}{M(u - v_0)^2}}, \qquad (32)$$

где v_0 и N_0 — значения скорости и плотности ядер в точке, в которой φ принят равным нулю. Подставляя N в уравнение Пуассона, для потенциала получаем

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = 4\pi e\left\{\frac{1}{a^3}\left[(\mu + e\varphi)^2 - m^2c^4\right]^{3/2} - \frac{ZN_0}{\sqrt{1 - \dfrac{2Ze\varphi}{M(u - v_0)^2}}}\right\}. \qquad (33)$$

Первый интеграл уравнения (33):

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = E^2(\varphi) = 8\pi N_0 Z\mu \left\{\frac{M(u-v_0)^2}{Z\mu}\left(\sqrt{1-\frac{2Ze\varphi}{M(u-v_0)^2}}-1\right)+F(\varphi)\right\}. \tag{34}$$

Здесь введено обозначение

$$F(\varphi) = \frac{1}{8a^3N_0Z\mu}\Big\{(\mu+e\varphi)\left[2(\mu+e\varphi)^2-5m^2c^4\right]\sqrt{(\mu+e\varphi)^2-m^2c^4}-$$
$$-\mu(2\mu-5m^2c^4)\sqrt{\mu^2-m^2c^4}+$$
$$+3(mc^2)^4\ln\frac{\mu+e\varphi+\sqrt{(\mu+e\varphi)^2-m^2c^4}}{\mu+\sqrt{\mu^2-m^2c^4}} \tag{35}$$

и за начало отсчета потенциала φ выбрана точка, в которой напряженность электрического поля $E=0$. Зная функцию $E(\varphi)$, можно получить уравнение, определяющее потенциал в зависимости от ξ

$$\xi = \pm\int\frac{d\varphi}{\sqrt{E^2(\varphi)}}. \tag{36}$$

В общем случае, когда $n_0 \neq ZN_0$, это соотношение определяет распределение потенциала в одномерной периодической волне. Для амплитуды потенциала φ_m можно получить уравнение, исходя из условия $d\varphi/d\xi=0$ при $\varphi=\varphi_m$

$$E^2(\varphi_m)=0, \tag{37}$$

где $E^2(\varphi)$ определяется уравнением (34). Длина этой волны

$$\lambda = (2\pi N_0 Z\mu)^{-1/2}\int_0^{\varphi_m}\left\{\frac{M(u-v_0)^2}{Z\mu}\left(\sqrt{1-\frac{2Ze\varphi}{M(u-v_0)^2}}-1\right)+F(\varphi)\right\}^{-1/2}d\varphi. \tag{38}$$

В случае, когда одновременно обращаются в нуль плотность заряда и потенциал поля, уравнение (33), описывающее уединенную волну, соответствует предельному случаю периодической волны. Легко показать, что в лабораторной системе отсчета уединенная волна распространяется со сверхзвуковой скоростью $(u>v_s)$. Из уравнения (37) можно найти зависимость скорости такой волны от амплитуды потенциала

$$u^2 = \frac{Z\mu}{2M}\frac{F^2(\varphi_m)}{F(\varphi_m)-\frac{e\varphi_m}{\mu}}. \tag{39}$$

Отсюда следует, что если амплитуда уединенной волны мала ($e\varphi_m \ll \mu$), то ее скорость стремится к скорости звука v_s. Как видно из уравнения (36), оно имеет решения лишь при не слишком больших значениях φ_m. Максимально возможное значение амплитуды (или скорости) уединенной волны можно определить, решая совместно уравнения $\frac{2Ze\varphi_m}{Mu^2} = 1$ и (39), которые приводят к уравнению

$$F(\varphi_m) = \frac{2e\varphi_m}{\mu}. \tag{40}$$

Отсюда получаем, что возможны уединенные волны только со скоростями $v_s \leqslant u \leqslant Mv_s$, где M — число Маха, зависящее от релятивистского фактора γ. В случае нерелятивистских и ультрарелятивистских электронов число Маха соответственно равно $M = 1.85$, $M = 1.7$. Отметим, что для невырожденной нерелятивистской плазмы $M = 1.6$.

5. *Слабонелинейные волны*. Исследуем систему уравнений (30) с n из (31) в случае слабой нелинейности $(N - N_0)/N_0 \ll 1$ (здесь N_0 — равновесная плотность ядер) и слабой пространственной дисперсии $\lambda \gg r_D$ (λ — длина волны). Методом последовательных приближений из последнего уравнения системы (35) получаем

$$e\nabla\varphi = \frac{M}{Z} v_s^2(N) \frac{\nabla N}{N} + \frac{M}{Z} v_s^2(N_0)\, r_D^2\, \frac{\nabla(\Delta N)}{N_0}, \tag{41}$$

где скорость звука v_s в Ае-плазме как функция плотности определяется выражением

$$v_s^2(N) = \frac{Z}{3M} \frac{a^2 (ZN)^{2/3}}{\sqrt{a^2 (ZN)^{2/3} + m^2c^4}}. \tag{42}$$

Подставляя (41) в первое из уравнений (30), находим

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -v_s^2(N) \frac{\nabla N}{N} - v_s^2(N_0)\, r_D^2 \frac{\nabla(\Delta N)}{N_0}, \\ \frac{\partial N}{\partial t} + (\nabla N\vec{v}) = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Из этих уравнений, повторяя преобразования, аналогичные проделанным для случая больцмановской плазмы в [16], находим следующее уравнение для v:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left[v_s(N_0) + \frac{\alpha+1}{2} v\right] \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \tag{44}$$

где

$$\alpha = \frac{5}{3} - \frac{v_F^2}{3c^2}, \qquad \beta = \frac{v_s r_D^2}{2}. \tag{45}$$

Вводя обозначение

$$W = \frac{\alpha+1}{2} v, \tag{46}$$

уравнение (44) приводим к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (v_s + W) \frac{\partial W}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0. \tag{47}$$

Уравнение такого типа впервые было получено Кортевегом и де Вризом.

В случае стационарных волн, когда все величины зависят от $\xi = x - ut$, уравнение Кортевега—де Вриза имеет два класса решений [12, 16], описывающих соответственно а) уединенные стационарные волны (солитоны), б) периодические стационарные волны. В случае солитонов решение уравнения (47) имеет вид

$$W = 3(u - v_s)\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{u - v_s}{4\beta}}\,\xi\right). \tag{48}$$

Используя (46), для v получаем

$$v = \frac{6(u - v_s)}{\alpha+1}\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{u - v_s}{4\beta}}\,\xi\right). \tag{49}$$

Из системы уравнений (32) в случае слабой нелинейности с использованием решения (49) для N и φ получаем

$$N = N_0\left[1 + \frac{6(u - v_s)}{v_s(\alpha+1)}\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{(u - v_s)}{4\beta}}\,\xi\right)\right], \tag{50}$$

$$\varphi = \frac{6Mv_s}{Ze(\alpha+1)}(u - v_s)\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{u - v_s}{4\beta}}\,\xi\right). \tag{51}$$

Из этих выражений следует, что размеры солитона $\Delta \sim [4\beta/(u - v_s)]^{1/2}$.

Оценим энергию солитона. Она равна сумме механической и электрической энергий волны,

$$E_0=\frac{1}{2}M\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Nv^2d\xi+\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2d\xi. \tag{52}$$

Подставляя сюда v, φ и N из (49), (50), (51), для энергии солитона получаем

$$E_0=\frac{24MN_0v_s^2}{(\alpha+1)^2}\left(\frac{u-v_s}{v_s}\right)^2\Delta+$$
$$+\frac{8}{5}N_0Mv_s^2\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)^3\left(\frac{u-v_s}{v_s}\right)^3\left(1+\frac{\alpha+1}{12}\right)\Delta\approx\frac{24MN_0v_s^2}{(\alpha+1)^2}\left(\frac{u-v_s}{v_s}\right)^2\Delta. \tag{53}$$

Отсюда следует, что энергия солитона, в основном, сосредоточена в механической энергии колебаний ядер.

Выше было отмечено, что уравнение Кортевега—де Вриза, кроме стационарных солитонных решений, имеет также решение типа стационарной периодической волны. Рассмотрим кратко это решение. Оно имеет следующий вид (см., например, [12, 16)]:

$$W-W_3=(W_1-W_3)\,dn^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3\beta}(W_1-W_3)}\,\xi,\ s\right), \tag{54}$$

здесь W_1, W_2, W_3 — корни кубического уравнения $W^3-3(u-v_s)W^2-c_1W+c_2=0$, расположенные в порядке $W_1\geqslant W_2\geqslant W_3$ (c_1 и c_2 — постоянные, такие, что W_1, W_2, W_3 действительны), $s^2=\frac{(W_1-W_2)}{(W_1-W_3)}$, а $dn(y,z)$ — эллиптическая функция Якоби. Длина этих волн

$$\lambda=\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{3\beta}(W_1-W_3)}}F\left(\frac{\pi}{2},s\right), \tag{55}$$

где $F(y,s)=\int\limits_0^y dy/\sqrt{1-s^2\sin^2y}$ — эллиптический интеграл первого рода. Отметим, что найденные в случае слабой нелинейности решения можно получить также непосредственно из результатов раздела 4.

Во всем предыдущем рассмотрении нелинейных стационарных волн в Ae-плазме мы пренебрегали диссипацией. Попробуем теперь учесть влияние затухания на характер таких волн. Пусть закон дисперсии имеет вид $\omega=v_sk-\beta k^3-i\xi k^2$ (ядерно-звуковые волны в Ae-плазме с $k\Lambda\gg1$), где v_s, β и ξ определяются выражениями (22), (45), (27), соответственно. Тогда вместо уравнения Кортевега — де Вриза имеем уравнение [16]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (v_s + W)\frac{\partial W}{\partial x} - \xi\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, \tag{56}$$

которое называется также уравнением Кортевега—де Вриза—Бюргерса.

Стационарное решение $W = W(x - ut)$ ($W(\infty) = 0$) этого уравнения описывает ударную волну. Характер структуры такой волны зависит от соотношения между дисперсионным и диссипативным параметрами β и ξ. При достаточно малой ξ получаем волну с осциллирующей структурой, первые несколько осцилляций на фронте которой будут близки к солитонам, движущимся со скоростью u. Расстояния между этими солитонами логарифмически растут при $\xi \to 0$ [18]. Если величина ξ больше некоторого критического значения $\xi_{кр} = \sqrt{4\beta(u - v_s)}$, то стационарное решение (56) имеет вид ударной волны с монотонной структурой, как и в обычной газодинамике. Скорость ударной волны $u = v_s + W_0/2$, где $W_0 = W(-\infty)$.

Ереванский государственный
университет

THE WAVES IN HOMOGENEOUS NONMAGNETIZED ELECTRON-NUCLEAR PLASMA

G. P. ALOJANTS, A. A. SAHARIAN

The solitary, stationary periodic and shockwaves are considered in degenerate electron-nuclear plasma. It is shown that the account of relativism and degeneration of electrons only affects the plasma parameters but does not significantly alter the character of such waves.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
2. *Д. А. Киржниц*, ЖЭТФ, 38, 503, 1960.
3. *Д. А. Киржниц*, УФН, 104, 489, 1971.
4. *Г. С. Саакян, Л. Ш. Григорян*, Астрофизика, 13, 669, 1977.
5. В сб. «Белые карлики», под ред. В. С. Имшенника, М., 1975, стр. 126.
6. *А. А. Абрикосов*, ЖЭТФ, 45, 2038, 1963.
7. *А. А. Абрикосов*, ЖЭТФ, 39, 1797, 1960.
8. *Д. Пайнс, Ф. Нозьер*, Теория квантовых жидкостей, М., 1967.
9. *В. П. Силин, А. А. Рухадзе*, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
10. *В. Н. Цытович*, ЖЭТФ, 40, 1775, 1961.
11. *В. В. Косачев, Б. А. Трубников*, ЖЭТФ, 60, 594, 1971.

12. *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*, Физическая кинетика, Наука, М., 1979.
13. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Статистическая физика, Наука, М., 1964.
14. *У. Киттель*, Квантовая теория твердых тел, М., 1967.
15. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Механика сплошных сред, М., 1944.
16. *В. И. Карпман*, Нелинейные волны в диспергирующих средах, Наука, М., 1973.
17. Солитоны в действии, под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта, Мир, М., 1981.
18. *Р. З. Сагдеев*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, 1964, стр. 20.