

УДК 524.7—55

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗВЕЗДНЫХ ДИСКОВ.
I. УРАВНОВЕШЕННЫЕ ДИСКИ

Г. С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН

Поступила 12 ноября 1983

Исследована устойчивость уравновешенных эллиптических КГП дисков в двойных системах и в сферидальном гало относительно бароподобных возмущений. Показано, что в двойных системах вытянутые диски, а также сжатые диски, близкие к круговым, аperiodически неустойчивы. Сильно сжатые диски устойчивы при большом отношении масс: M/M_2 или M_2/M больше ~ 30 ; при промежуточных отношениях масс имеет место колебательная неустойчивость. Диски в сферидальном гало стабилизированы относительно бароподобных возмущений, если гравитационный потенциал гало превышает половину от гравитационного потенциала диска.

1. *Введение.* В спиральных галактиках равновесие дисков определяется, в основном, балансом центробежной и гравитационной сил. В этих условиях осесимметричный самогравитирующий диск является неустойчивым относительно превращения в неосесимметричный бар как для фигур несжимаемой жидкости [1], так и для бесстолкновительных гравитирующих конфигураций, моделирующих спиральные галактики [2, 3].

Многие спиральные галактики входят в состав двойных систем. В парах диски галактик могут иметь некруговую форму, кроме того, наличие компаньона влияет на устойчивость. В работе [4] получены равновесные КГП (квадратичный гравитационный потенциал) решения для звездных дисков в двойных системах. При этом влияние соседней галактики учитывалось в приливном приближении. Приливный потенциал является квадратичной формой координат, что позволило получить аналитическое КГП решение. В [5] проведен анализ свойств этих равновесных решений и получены точные КГП решения для эллиптических дисков, окруженных однородным гало. В [5] показано, что с ростом вращательного момента галактики достигаются предельные решения, которые представляют собой либо уравновешенный диск, где по одной оси центробежная сила уравновешивает гравитацию, либо пылевой диск, где в каждой точке отсутствует дисперсия скоростей и звезды движутся по подобным эллипсам. В равновесном состоянии в двойной системе собственная угловая скорость

галактики совпадает с орбитальной (как у Луны в системе Луна—Земля), поэтому она ориентирована относительно компаньона и может быть либо сжатой по направлению оси, соединяющей центры галактик, либо вытянутой в этом направлении. В вытянутом случае предельными решениями являются только уравновешенные диски, в сжатом случае — как уравновешенные, так и пылевые (см. [5]). Отметим, что предельным решением в одиночном случае является только уравновешенный диск [6].

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости эллиптических КГП дисков, входящих в двойные системы и окруженных однородным гало, относительно бароподобной моды. Используется метод исследования устойчивости, развитый в [7] (см. также [8]). В пределе одиночного диска полученные результаты полностью совпали с [9], где использовался метод работы [10].

В первой части данной работы рассматривается устойчивость уравновешенных дисков. Получено, что однородное гало полностью стабилизирует бароподобную моду возмущений в уравновешенном КГП диске, если его гравитационный потенциал превышает половину гравитационного потенциала самого диска. Для гало в виде однородного шара стабилизация наступает, если отношение массы гало внутри радиуса диска к массе диска превышает величину $M_h/M_d \geq 3\pi/8 \approx 1.18$. Вытянутые уравновешенные КГП диски в двойных системах всегда неустойчивы, причем неустойчивость носит аperiодический характер. Сжатые уравновешенные КГП диски устойчивы, если M/M_1 или M_2/M достаточно велики (≥ 30). Существование равновесных аperiодически неустойчивых КГП дисков является характерным свойством двойных систем, так как в одиночных дисках неустойчивость всегда носит колебательный характер.

2. Равновесные решения для уравновешенных дисков. Исследуемые диски имеют распределение плотности:

$$\sigma_d = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (2.1)$$

Собственный гравитационный потенциал такого диска

$$\Phi_d = a_0 x^2 + b_0 y^2 \text{ (нормировка несущественна)}, \quad (2.2)$$

где [6]:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3}{2} \frac{GM}{a(a^2 - \beta^2)} [F(k) - E(k)], \\ b_0 &= \frac{3}{2} \frac{\alpha GM}{\beta^2(a^2 - \beta^2)} [E(k) - (1 - k^2)F(k)], \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$k^2 = 1 - \beta^2/a^2, \quad M = \frac{2\pi}{3} \sigma_0 a \beta,$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi, \quad F(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi.$$

Если диск погружен в однородное сфероидальное гало, то суммарный потенциал примет вид:

$$\Phi_0 = \Phi_d + h(x^2 + y^2). \quad (2.4)$$

При вхождении диска массы M в двойную систему с массой компаньона M_2 , равновесная скорость вращения в приливном приближении равна кеплеровской:

$$\Omega = \left[\frac{G(M + M_2)}{r_{12}^3} \right]^{1/2} \equiv \Omega_k, \quad (2.5)$$

а величины a и b , входящие в суммарный потенциал

$$\Phi_0 = ax^2 + by^2, \quad (2.6)$$

имеют вид:

$$a = a_0 + \frac{1}{2} \frac{GM_2}{r_{12}^3}, \quad b = b_0 - \frac{GM_2}{r_{12}^3} \quad (2.7)$$

для сжатого диска;

$$a = a_0 - \frac{GM_2}{r_{12}^3}, \quad b = b_0 + \frac{1}{2} \frac{GM_2}{r_{12}^3} \quad (2.8)$$

для вытянутого диска. Здесь r_{12} — расстояние между центрами галактик. Для выполнения условия приливного приближения необходимым является неравенство:

$$r_{12} \gg a. \quad (2.9)$$

В предельном случае вытянутого уравновешенного диска центробежная сила балансирует суммарную гравитацию по большой оси, так что

$$\Omega^2 = 2a. \quad (2.10)$$

В этом случае равновесная функция распределения, зависящая от координат (x, y) и скоростей (v_x, v_y) имеет вид [5]

$$f_0 = \frac{\sigma_0 a}{2\sqrt{2}\beta} \frac{\delta(v_x - 2\Omega y)}{[(3a + b)a^2 - 4a\beta^2]^{1/2}} \theta \left\{ 2 \frac{\beta^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right) \times \right. \\ \left. \times [(3a + b)a^2 - 4a\beta^2] - \left(v_y + \frac{2\Omega\beta^2}{a^2} x \right)^2 \right\}. \quad (2.11)$$

Здесь

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Функция f нормирована к поверхностной плотности $\int f_0 dv_x dv_y = \sigma_0 \int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2}}$. Тот же вид функции распределения имеет место и для одиночного уравновешенного диска [11]. Необходимым условием существования решения (2.11) является неравенство

$$(3a + b)\alpha^2 - 4\sigma\beta^2 > 0, \quad (2.13)$$

которое всегда выполняется для вытянутого и одиночного дисков при выполнении (2.10).

Если в сжатом диске имеет место $a < b$, то для него имеется предельное решение (2.11). Очевидно, что на границе $a = b$ ($\alpha > \beta$) неравенство (2.13) также выполняется.

При $a > b$ и выполнении условий

$$(3b + a)\beta^2 - 4b\alpha^2 > 0, \quad \Omega^2 = 2b \quad (2.14)$$

имеет место другое предельное решение

$$f_0 = \frac{\sigma_0\beta}{2\sqrt{2}a} \cdot \frac{\delta(v_x + 2\Omega x)}{[(3b + a)\beta^2 - 4b\alpha^2]^{1/2}} \theta \left[2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right) [(3b + a)\beta^2 - 4b\alpha^2] - \left(v_x - \frac{2\Omega\alpha^2}{\beta^2} \right)^2 \right]. \quad (2.15)$$

Решения (2.11) и (2.15) не смыкаются между собой [5].

3. Кинетическое уравнение для возмущений и невозмущенные траектории. Устойчивость КГП решений (2.11) и (2.15) проводится нестандартными методами [7, 10], т. к. обычный способ представления возмущенной функции в виде $f = f_0 + \delta f$ приводит к расходимости в уравнении для δf . Устойчивость одиночных эллиптических дисков исследовалась в [9] методом работы [10]. В данной работе мы используем метод [7].

Следуя [7], представим возмущенную функцию распределения уравновешенного диска для случая $a < b$ в виде

$$f = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{c_0}} \left\{ \theta \left[c_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right) - \left(v_y + \frac{2\Omega\beta^2}{a^2} x \right)^2 - \chi \right] \delta(v_x - 2\Omega y) + \right. \\ \left. + A\theta' \left[c_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right) - \left(v_y + \frac{2\Omega\beta^2}{a^2} x \right)^2 \right] \delta(v_x - 2\Omega y) + \right. \quad (3.1)$$

$$+ B \left[c_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right) - \left(v_y + \frac{2\Omega\beta^2}{a^2} x \right)^2 \right] \delta' (v_x - 2\Omega y) \}.$$

Здесь

$$c_0 = 2 \frac{\beta^2}{a^2} [(3a + b)x^2 - 4a\beta^2]. \quad (3.2)$$

Функции χ , A и B зависят от переменных t , x , y , v_y . Подставим (3.1) в кинетическое уравнение для возмущенной функции распределения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\Omega^2 x + 2\Omega v_y - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial v_x} + \\ + \left(\Omega^2 y - 2\Omega v_x - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial v_y} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь возмущенный потенциал $\tilde{\Phi}$ равен

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 + \Phi. \quad (3.4)$$

Приравнивая коэффициенты при обобщенных функциях $\delta\chi$, $\delta'A$ и $\delta'B$ аргументами теми же, что и в (2.11), и учитывая (2.6) и (2.10), получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \hat{L}\chi = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(v_y + \frac{2\Omega\beta^2}{a^2} x \right) - B \left[4\Omega \left(1 - \frac{\beta^2}{a^2} \right) \left(v_y + \frac{2\Omega\beta^2}{a^2} x \right) - 2 \frac{c_0}{a^2} x \right], \\ \hat{L}A = \frac{\partial B}{\partial x} - 2\Omega \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \hat{L}B = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + 2\Omega y \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} - (6a + 2b)y \frac{\partial}{\partial v_y}.$$

Система (3.5) решается совместно с уравнением Пуассона для возмущения потенциала Φ :

$$\Delta \Phi = 4\pi G \delta \sigma(z). \quad (3.6)$$

Возмущение поверхностной плотности $\sigma(x, y)$ определяется в виде

$$\sigma = \int (f - f_0) dv_x dv_y. \quad (3.7)$$

Введем обозначения

$$u_x = v_x - 2\Omega y, \quad u_y = v_y + 2\Omega \frac{\beta^2}{\alpha^2} x, \quad \chi_0 = \chi(u_y = 0), \quad (3.8)$$

$$\chi_1 = \chi - \chi_0, \quad u^2 = u_y^2 + \chi.$$

Тогда в линейном приближении

$$du_y = du - \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \frac{\chi}{u^2} du. \quad (3.9)$$

Подставляя (2.11) и (3.1) в (3.7) и интегрируя, получаем, с учетом (2.1), (3.8) и (3.9), возмущенную плотность в виде:

$$\begin{aligned} \sigma = & - \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}}} \frac{\chi_0}{2c_0} - \frac{\sigma_0}{4\sqrt{c_0}} \int \theta \left[c_0 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right) - u_y^2 \right] \times \\ & \times \left(\frac{1}{u_y} \frac{\partial \chi}{\partial u_y} - \frac{\chi}{u_y^2} \right) du_y + \frac{\sigma_0}{2\sqrt{c_0}} \int A\theta \left[c_0 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right) - u_y^2 \right] du_y. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение системы уравнений для возмущений функций (3.5) находим с помощью метода «интегрирования по траекториям». Этот метод был предложен в плазме для исследования устойчивости неоднородных систем [12] и был применен для исследования устойчивости моделей гравитирующих систем точечных масс в [13]. Фазовые траектории, соответствующие оператору \hat{L} , определяются системой характеристических уравнений этого оператора, приводимой к виду:

$$\frac{dx}{dt} = 2\Omega y, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -2(3a + b)y. \quad (3.11)$$

Решение этой системы, определяющее величины x' , y' , u_y' из (3.8) в момент времени t' в зависимости от их значений x , y , u_y в момент времени t , имеет вид

$$\begin{aligned} x' = Px + \frac{2\Omega}{\omega_1^2} u_y + \left[(1 - P)x - \frac{2\Omega}{\omega_1^2} u_y \right] \cos \omega_1(t' - t) + \\ + 2 \frac{\Omega}{\omega_1} y \sin \omega_1(t' - t), \end{aligned}$$

$$y' = y \cos \omega_1(t' - t) - \frac{\omega_1}{2\Omega} \left[(1 - P)x - \frac{2\Omega}{\omega_1^2} u_y \right] \sin \omega_1(t' - t), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_y' = \frac{\omega_1^2}{2\Omega} (1 - P) \left(Px + \frac{2\Omega}{\omega_1^2} u_y \right) - P\omega_1 y \sin \omega_1(t' - t) - \\ - P \frac{\omega_1^2}{2\Omega} \left[(1 - P)x - \frac{2\Omega}{\omega_1^2} u_y \right] \cos \omega_1(t' - t), \end{aligned}$$

где

$$\omega_1^2 = 2(3\alpha + b), \quad P = 1 - \frac{4\Omega^2}{\alpha^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \quad (3.13)$$

4. Дисперсионное уравнение для бароподобных возмущений. Оператор \hat{L} имеет смысл полной производной $\frac{d}{dt}$ вдоль траекторий (3.12). Решение системы (3.5) записывается в виде:

$$B = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Phi}{\partial x'} dt', \quad (4.1)$$

$$A = \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial B}{\partial x'} - 2\Omega \frac{\partial B}{\partial y'} \right) dt', \quad (4.2)$$

$$\chi = \int_{-\infty}^t \left\{ 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y'} u'_y + B \left[4\Omega \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) u'_y - 2 \frac{c_0}{\alpha^2} x' \right] \right\} dt'. \quad (4.3)$$

Зависимость от времени можно искать в форме

$$\Phi, B, A, \chi \sim e^{-i\omega t}. \quad (4.4)$$

Бароподобная мода соответствует квадратичному потенциалу возмущения:

$$\Phi_2 = g_{21} x^2 + g_{22} y^2 + i g_{23} xy. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.1) с учетом (4.4) и (3.12), получаем после интегрирования

$$\begin{aligned} B &= 2g_{21} \left[\frac{i}{\omega} \left(Px + \frac{2\Omega}{\omega_1^2} u_y \right) - \frac{i\omega(1-P)x}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{2i\omega\Omega}{\omega_1^2(\omega_1^2 - \omega^2)} u_y - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\Omega y}{\omega_1^2 - \omega^2} \right] - \frac{i g_{23}}{\omega_1^2 - \omega^2} \left[i\omega y - \frac{\omega_1^2}{2\Omega} (1-P)x + u_y \right]; \quad (4.6) \\ &= 2g_{21} \left[\frac{i}{\omega} x + \frac{i2\Omega}{\omega\omega_1^2} v_y - \frac{2\Omega y}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{2i\omega\Omega v_y}{\omega_1^2(\omega_1^2 - \omega^2)} \right] - \frac{i g_{23}}{\omega_1^2 - \omega^2} (i\omega y + v_y). \end{aligned}$$

Функция B не входит в определение σ , согласно (3.10), а служит для нахождения функций A и χ . Интегрируя (4.2) с учетом (4.4)–(4.6), получаем

$$A = -2g_{21} \left[\frac{1}{\omega^2} \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega_1^2} \right) - \frac{4\Omega^2}{\omega_1^2} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \right] - \frac{g_{23}}{\omega} \frac{2\Omega}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad (4.7)$$

Вычисление функции γ из (4.3) значительно более громоздко, так как требует вычисления произведений типа $x'u'_y$, $y'u'_y$ и т.д. Члены в γ , линейные по u_y , не дают вклада в σ .

В итоге из (3.10) получаем σ в виде

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2}}} \left\{ \frac{x^2}{a^2} \left[-2g_{22} \left[\frac{2(1-P)}{\Omega_1} - \frac{1-2P}{\Omega_2} \right] + \right. \right. \\ & + 2g_{21} \left[\frac{2P}{\omega^2} \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega_1^2} \right) - \frac{1+2P}{\Omega_1} \frac{4\Omega^2}{\omega_1^2} - \frac{1-2P}{\Omega_2} 4 \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - \right. \\ & \left. \left. - 8 \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \left(1 - P - \frac{\beta^2}{a^2} \right) \frac{\omega_1^2 + \omega^2}{\Omega_1^2} \right] - g_{23} \left[\frac{4\Omega P}{\omega\omega_1^2} - \frac{2\Omega\omega}{\omega_1^2} \frac{1-4P}{\Omega_1} + \right. \right. \\ & + \frac{2\Omega\omega(1-2P)}{\omega_1^2\Omega_2} + \left. \left. \frac{8\Omega\omega}{\Omega_1^2} \left(1 - P - \frac{\beta^2}{a^2} \right) \right] \right\} + \frac{y^2}{\beta^2} \left\{ -2g_{22} \left(\frac{1-P}{\Omega_1} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1+P}{\Omega^2} \right) + 2g_{21} \left[\frac{P}{\omega^2} \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega_1^2} \right) - (2+P) \frac{4\Omega^2}{\omega_1^2} \frac{1}{\Omega_1} + 4 \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \frac{1+P}{\Omega_2} - \right. \\ & \left. - 4 \left(1 - P - \frac{\beta^2}{a^2} \right) \frac{\omega_1^2 + \omega^2}{\Omega_1^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \right] + g_{23} \left[\frac{2\Omega P}{\omega\omega_1^2} + \frac{2\Omega\omega}{\omega_1^2} \frac{1+2P}{\Omega_1} - \right. \\ & \left. - \frac{2\Omega\omega}{\omega_1^2} \frac{1+P}{\Omega_2} + \frac{4\omega\Omega}{\Omega_1^2} \left(1 - P - \frac{\beta^2}{a^2} \right) \right] \right\} + \frac{ixy}{\beta^2} \left\{ g_{22} \frac{\omega}{\Omega} (1-P) \times \right. \\ & \times \left(\frac{1}{\Omega_1} - \frac{1}{\Omega_2} \right) + g_{21} \frac{4\Omega\omega}{\Omega_1} \left[\frac{P}{\omega^2} + \frac{2}{\Omega_1} \left(1 - P - \frac{\beta^2}{a^2} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{3(1-P)}{\Omega_2} \right] - g_{23} \left[-\frac{2-3P}{\Omega_1} + \frac{4(1-P)}{\Omega_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_1^2 + \omega^2}{\Omega_1^2} \left(1 - P - \frac{\beta^2}{a^2} \right) \right] \right\} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2}}} (f_{21}x^2 + f_{22}y^2 + if_{23}xy), \quad (4.8) \end{aligned}$$

где

$$\Omega_1 = \omega_1^2 - \omega^2, \quad \Omega_2 = 4\omega_1^2 - \omega^2. \quad (4.9)$$

Из теории потенциала [14] (см. также [9]) следует связь между коэффициентами $f_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ из (4.5) и (4.8). При этом возмущение приливного потенциала равно нулю. Имеем:

$$\begin{aligned}
 -(\alpha^2 - \beta^2) g_{21} &= \alpha^2 (2a_0 \alpha^2 - a_0 \beta^2 - b_0 \beta^2) f_{21} + \beta^2 (b_0 \beta^2 - a_0 \alpha^2) f_{22} \\
 -(\alpha^2 - \beta^2) g_{22} &= \alpha^2 (b_0 \beta^2 - a_0 \alpha^2) f_{21} + \beta^2 (a_0 \alpha^2 + b_0 \alpha^2 - 2b_0 \beta^2) f_{22} \quad (4.10) \\
 (\alpha^2 - \beta^2) g_{23} &= 2\alpha^2 \beta^2 (a_0 - b_0) f_{23}
 \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение получается из равенства нулю определителя системы (4.10) с коэффициентами из (4.8). После громоздких алгебраических преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{\alpha - b}{\omega_1^2} \left(\frac{a_0 - b_0}{\alpha - b} - 1 \right) \left[P \left(\frac{A_B}{\omega_1^2} - 2A_2 \right) \Omega_1^2 \Omega_2 + \frac{P}{\omega_1^2} A_B + \omega^2 \Omega_1^2 + \right. \\
 & \left. + 2(1-P) A_2 \omega^2 \Omega_1 \Omega_2 - 4(1-P) \omega_1^2 A_2 \omega^2 \Omega_2 + 8(1-P) A_B \omega_1^2 \omega^2 + \right. \\
 & \left. + 4A_B \omega^2 \Omega_1 \right] + \omega^2 \left\{ -\Omega_1^2 \Omega_2 + \left[2 \left(\frac{4\Omega^2}{\omega_1^2} A_1 + B_1 \right) + 4\alpha^2 \frac{a_0 - b_0}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{1-P}{\omega_1^2} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times (B_2 - A_2 - 3b_0 - 2\omega_1^2) \right] \Omega_1^2 + \left\{ 3a_0 \frac{8\Omega^2}{\omega_1^2} - 2(1-P) \left(\frac{4\Omega^2}{\omega_1^2} A_2 - B_2 \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2\alpha^2 \frac{a_0 - b_0}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{1}{\omega_1^2} \left[2 - (1-P) \frac{\omega_1^2}{4\Omega^2} A_2 - 2PA_2 - 2(1-P) B_2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + 6(1-P) b_0 + (3-4P) \omega_1^2 - (1-P) \frac{\omega_1^2}{4\Omega^2} \omega_1^2 \right] \right\} \Omega_1 \Omega_2 + \right. \\
 & \left. + \left\{ 4(1-P) A_B \left(4 \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - 2\alpha^2 \frac{a_0 - b_0}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{1}{\omega_1^2} \right) + 4\alpha^2 \frac{a_0 - b_0}{\alpha^2 - \beta^2} (1-P) \times \right. \right. \quad (4.11) \\
 & \left. \left. \times \left[A_2 - (1-3P) \frac{\omega_1^2}{4\Omega^2} A_2 + B_2 - (1-P) \frac{\omega_1^2}{4\Omega^2} B_2 - 3(a_0 + b_0) - \omega_1^2 \left(1 - \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{\omega_1^2}{4\Omega^2} \right) \right] \right\} \Omega_2 + \left\{ -4A_B (2-P) + 8\alpha^2 \frac{a_0 - b_0}{\alpha^2 - \beta^2} (1-P)^2 \frac{1}{4\Omega^2} A_B + \right. \\
 & \left. + 4\alpha^2 \frac{a_0 - b_0}{\alpha^2 - \beta^2} \left[-(1-P) A_1 + \left(\omega_1^2 \frac{1-P}{4\Omega^2} - 2 + 3P \right) B_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1-P)^2 \left(A_2 - 3B_2 + 2 \frac{\omega_1^2}{4\Omega^2} B_2 \right) + 3b_0 (1-P) \right] \right\} \Omega_1 + \\
 & \left. + 8\alpha^2 \frac{a_0 - b_0}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{\omega_1^2}{4\Omega^2} (1-P) (1-3P) A_B + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1-P)^2 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{4\Omega^2} \right) \left(B_2 + \frac{B_1}{1-P} \right) \omega_1^2 \right] \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= a_0(1 - 2P) + (2 - P)Q, \quad A_2 = 2a_0 + Q, \\ B_1 &= b_0(1 + P) + (2 - P)Q, \quad B_2 = b_0 - Q, \\ Q &= \frac{a_0\alpha^2 - b_0\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad A_B = A_1B_2 + A_2B_1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Уравнение (4.11) справедливо для диска, окруженного однородным гало, вытянутого диска в двойной системе и сжатого диска достаточной сплюснутости с $a < b$. Для уравновешенного сжатого диска малой сплюснутости при $a > b$ справедливо решение (2.15). Дисперсионное уравнение для такого диска получается из (4.11) при следующих заменах:

$$\alpha \rightarrow \beta, \quad a \leftrightarrow b, \quad a_0 \leftrightarrow b_0, \quad Q \rightarrow (-Q). \quad (4.13)$$

При этом параметры, входящие в (4.11), переопределяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 2(3b + a), \quad P = 1 - \frac{4a^2}{\beta^2} \frac{Q^2}{\omega_1^2}, \quad Q^2 = 2b, \\ A_1 &= b_0(1 - 2P) + (2 - P)Q, \quad A_2 = 2b_0 + Q, \\ B_1 &= a_0(1 + P) + (2 - P)Q, \quad B_2 = a_0 - Q, \\ Q &= (a_0\alpha^2 - b_0\beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2), \quad A_B = A_1B_2 + A_2B_1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Отметим, что неравенства (2.13) и (2.14) эквивалентны условию $P > 0$, согласно (3.13) и (4.14), соответственно. Неустойчивость регистрируется по наличию отрицательных или комплексных корней уравнения (4.11). Левая часть (4.11) численно строилась как функция действительных ω^2 и устойчивость определялась по свойствам ее действительных корней (см. табл. 1).

5. Устойчивость уравновешенного диска в двойной системе.

а) Вытянутые диски.

Удобно ввести следующие безразмерные параметры:

$$l = \frac{\beta}{a}, \quad m = \frac{M}{M_2}, \quad \tilde{b}_0 = \frac{b_0}{a_0}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{a_0}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{a_0}, \quad f = \frac{GM_2}{r_{12}^3 a_0} \quad (5.1)$$

В вытянутом уравновешенном диске $Q^2 = 2a$, поэтому с учетом (2.5) и (2.8) имеем

$$f = \frac{2}{3 + m} \quad (5.2)$$

Таблица 1

№	Действительные корни (4.11) для ω^2		Моды				
	Число корней со знаком		Гармони- ческие колеба- ния	Апериоди- ческая ус- тойчивость	Апериоди- ческая неус- тойчивость	Колеба- тельная ус- тойчи- вость	Колеба- тельная неус- тойчи- вость
	+	0					
1	4	0	8	0	0	0	0
2	3	1	6	1	1	0	0
3	2	2	4	2	2	0	0
4	1	3	2	3	3	0	0
5	0	4	0	4	4	0	0
6	2	0	4	0	0	2	2
7	1	1	2	1	1	2	2
8	0	2	0	2	2	2	2
9	0	0	0	0	0	4	4

Результаты решения дисперсионного уравнения (4.13) представлены на рис. 1. Все модели вытянутых сбалансированных дисков в двойных системах аperiodически неустойчивы относительно бароподобных возмущений, что проявляется в наличии отрицательных корней для ω^2 . Отметим, что неустойчивость одиночных эллиптических дисков имеет только колебательный характер [9]. При переходе к одиночному диску ($m \rightarrow \infty$ и $f \rightarrow 0$) инкремент аperiodической неустойчивости стремится к нулю; уравнение (4.11) имеет нулевой корень $\omega^2 = 0$ при $f=0$, $a=a_0$, $b=b_0$. Часть моделей (см. рис. 1), расположенных выше кривой ab и внутри области cde , являются, кроме того, колебательно неустойчивыми. С ростом m отношение полуосей, при котором возникает колебательная неустойчивость, стремится к величине $\beta/a \rightarrow 0.7296$, соответствующей одиночным дискам (см. [1], [9]). При увеличении массы компаньона область колебательной неустойчивости сужается, но при $m < 0.063$ появляется дополнительная область колебательно неустойчивых моделей, которая для очень больших масс $m \rightarrow 0$ находится в интервале $0.58 < \beta/a < 0.78$.

Формальные решения для вытянутых уравновешенных дисков существуют на всей плоскости $(\beta/a, m)$. Однако они имеют физический смысл лишь в случае выполнения условия применимости приливного приближения $a \ll r_{12}$, которое может быть записано в виде [5]:

$$\frac{3}{2} m f \frac{F(k) - E(k)}{1 - k^2} = \left(\frac{a}{r_{12}} \right)^3 \ll 1. \quad (5.3)$$

С учетом (5.2) получаем уравнение границы применимости на плоскости $(\beta/a, m)$:

$$m = 3 \left[3 \frac{F(k) - E(k)}{k^2} - 1 \right]^{-1}. \quad (5.4)$$

При $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 1$ имеем, используя разложения эллиптических функций (см., например, [5]),

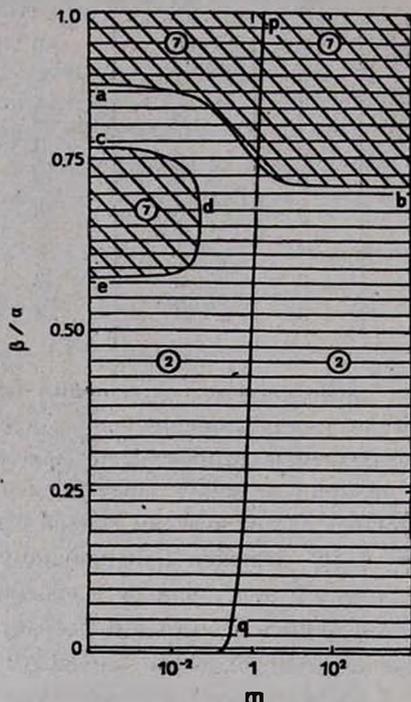


Рис. 1. Устойчивость уравновешенных вытянутых дисков в двойной системе на плоскости $(\beta/\alpha, m = M/M_2)$. Все модели являются аперiodически неустойчивыми (заштрихованы горизонтально). Косой штриховкой выделены области (выше кривой ab и внутри cde), где дополнительно имеет место колебательная неустойчивость. Цифры в кружочках соответствуют классификации мод из табл. 1. Кривая pqo является границей, отделяющей физические решения (слева $\alpha < r_{12}$) от нефизических ($\alpha > r_{12}$).

$$m = \frac{12}{3\pi - 4} \approx 2.21 \quad (k=0),$$

$$m = \frac{3}{3 \ln \left(4 \frac{\alpha}{\beta} \right) - 4} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 0, k \rightarrow 1 \right). \quad (5.5)$$

Кривая pqo на рис. 1, построенная по (5.4), отделяет физические (слева от кривой pqo) от нефизических решений для вытянутого диска в паре.

б) Сжатые диски.

В сжатом диске большой сплюснутости предельное вращение достигается при $\Omega^2 = 2a < 2b$, что в безразмерных переменных сводится к равенству

$$f = \frac{2}{m}. \quad (5.6)$$

Если в слабо сжатом диске $\Omega^2 = 2b < 2a$, то в безразмерных переменных

$$f = \frac{2\bar{b}_0}{3 + m}. \quad (5.7)$$

Для решений с $a < b$, наряду с (5.6), выполняется неравенство (2.13). Оно выполняется и при равенстве $a = b$, которое определяет границу применимости решений (2.11), справедливых при $l \leq l_2(m)$. Функция $l_2(m)$ находится из условия (см. (2.8), (5.1), (5.6)):

$$a = b, \quad \tilde{b}_0 = 1 + \frac{3}{2}f = 1 + \frac{3}{m}. \quad (5.8)$$

Кривая $adbgo$ на рис. 2, построенная численно по формуле (5.8), определяет границу $l_2(m)$.

Для решений с $b < a$, наряду с (5.7), требуется выполнение неравенства (2.14). При обращении его в равенство, условие $b < a$ сохраняется. Граница применимости решения (2.15) $l_1 > l_1(m)$ определяется [из условия знака равенства в (2.14)]. Уравнение для $l_1(m)$, с учетом (2.8), (5.1), (5.7) имеет вид

$$l_1^2(m) = 4 \frac{\tilde{b}_0(1+m)}{3+m+\tilde{b}_0(4+3m)} \left\{ \begin{array}{l} \approx 1 - \frac{12}{19m} \\ \text{при } m \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Кривая pta на рис. 2, построенная численно по формуле (5.9), определяет границу $l_1(m)$. Между кривыми $l_1(m)$ и $l_2(m)$ решения для сжатых уравновешенных дисков не существуют.

Результаты исследования дисперсионного уравнения (4.11) для сжатых дисков представлены на рис. 2. Сжатые диски с $a < b$ (ниже кривой $l_2(m)$) устойчивы относительно бароподобных возмущений при большом и малом отношении масс компаньонов (правее кривой eks и левой линии dh). Промежуточным значениям m соответствуют только неустойчивые решения. Неустойчивыми являются также диски, отношение осей которых лежит выше кривой ks . При $m \rightarrow \infty$ это соответствует $l > 0.7296$, в соот-

ветствии с одиночным диском. В обоих случаях неустойчивость носит колебательный характер (две неустойчивых моды). В области bdk происходит наложение этих двух неустойчивостей, поэтому число неустойчивых мод здесь равно 4.

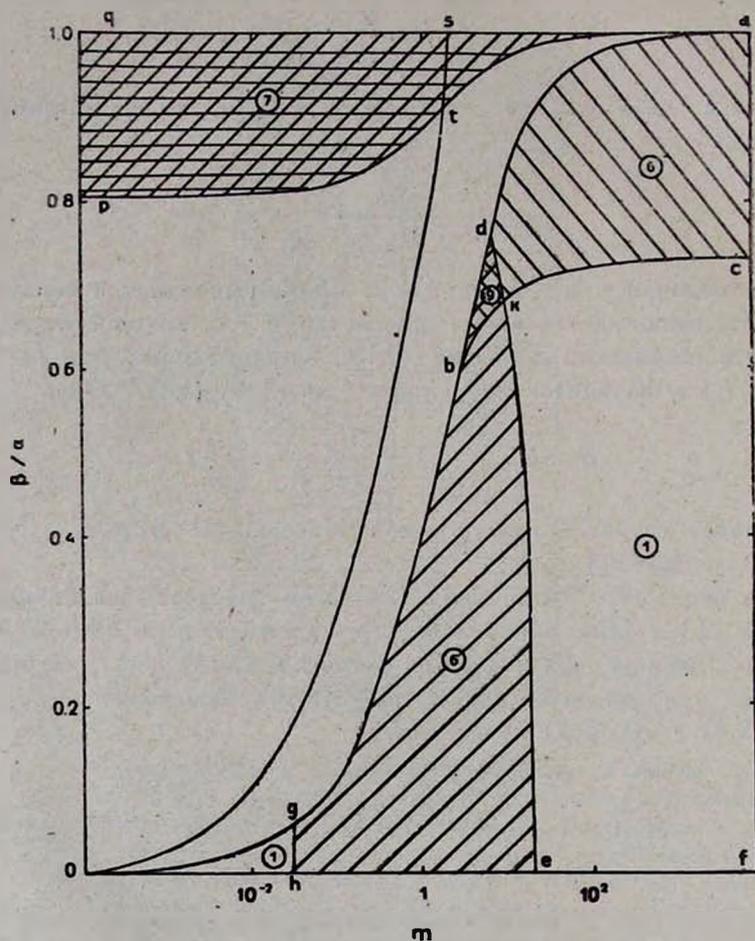


Рис. 2. Устойчивость сжатых уравновешенных дисков в двойных системах на плоскости $(\beta/\alpha, m = M/M_2)$. Решения существуют в областях 1) выше линии atp , где имеет место $a > b$ и 2) правее линии $ogbda$, где $a < b$. В незаштригованных областях ogh и $cfek$ имеет место устойчивость относительно бароподобной моды. Косая штриховка указывает на наличие колебательно неустойчивой моды (области $atqs$, $abghek$ и $adbkc$), две косых штриховки (область dbk) указывают на наличие двух колебательно неустойчивых мод; горизонтальная штриховка (область $atrqs$) означает наличие аperiodической неустойчивости. Цифры в кружочках соответствуют классификации мод из табл. 1. Кривая ots отделяет физически допустимые (слева $\alpha < r_{12}$), решения от нефизических.

Устойчивость сжатых дисков с $a > b$ находится из решения уравнения (4.11) с учетом замен (4.13) и (4.14). Все модели таких дисков (область $atpqs$) имеют по три неустойчивых моды: одну аперiodическую и две колебательных. В этом отношении они аналогичны моделям вытянутых дисков малой сплюснутости (см. рис. 1).

Физические решения для сжатых дисков, так же, как и для вытянутых, должны удовлетворять условию (5.3). Для дисков с $a < b$, с учетом (5.6), получается, что неравенство никогда не выполняется:

$$\left(\frac{\alpha}{r_{13}}\right)^3 = 3 \frac{F(k) - E(k)}{k^2} > 1 \begin{cases} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} \text{ при } k \Rightarrow 0 \\ \Rightarrow 3 \ln\left(4 \frac{\alpha}{\beta}\right) \text{ при } k \Rightarrow 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Для дисков с $a > b$ условие равенства в (5.3) с учетом (2.3), (5.1), (5.7) принимает вид

$$m = 3 \left[\frac{3}{k^2} \left(\frac{E}{1-k^2} - F \right) - 1 \right]^{-1} \begin{cases} \Rightarrow \frac{12}{3\pi - 4} \approx 2.21 \text{ при } k \Rightarrow 0 \\ \Rightarrow 1 - k^2 \text{ при } k \Rightarrow 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Кривая sto на рис. 2 построена по формуле (5.11). Она нигде не пересекается с кривой $ogbda$ ($l_2(m)$). Решения с $a > b$ являются физически допустимыми лишь слева от линии st' , однако они неустойчивы.

6. Устойчивость уравновешенного диска в однородном эллипсоидальном гало. Дисперсионное уравнение (4.11) применимо для исследования устойчивости дисков в сфероидальных гало, если

$$a = a_0 + h, \quad b = b_0 + h. \quad (6.1)$$

Безразмерная величина

$$\chi = \frac{h}{a_0} \quad (6.2)$$

характеризует роль гало. Из (6.1) следует, что $(a_0 - b_0)/(a - b) = 1$, поэтому дисперсионное уравнение (4.11) становится бикубическим, как для одиночного диска. Результаты решения уравнения (4.11) при наличии однородного сфероидального гало представлены на рис. 3. При $\chi > 0.5$ уравновешенные диски, в том числе круговые с ненулевой дисперсией, оказываются стабилизированными. Для круговых дисков имеет место $a_0 =$

$$= \frac{3\pi}{8} \frac{GM_d}{R^3}, \text{ а для однородного сферического гало с радиусом, рав-}$$

ным радиусу диска, имеем $h = \frac{GM_h}{2R^3}$. Таким образом, для этого случая

$$\chi = \frac{h}{\alpha_0} = \frac{4}{3\pi} \frac{M_h}{M_d} \quad (6.3)$$

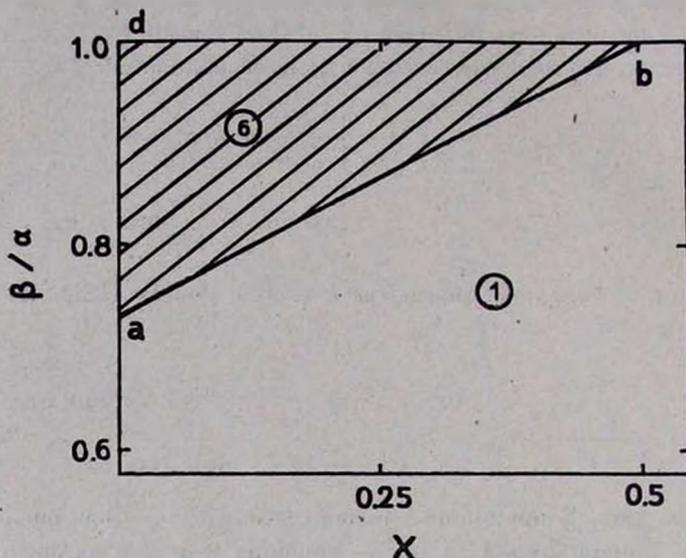


Рис. 3. Устойчивость дисков в сфероидальном гало на плоскости (β/α , h/α_0). Штриховкой отмечена область колебательной неустойчивости abd . Остальные диски устойчивы относительно бароподобных возмущений. Цифры в кружочках соответствуют классификации мод из табл. 1.

Круговой КГП диск стабилизируется массой однородного сферического гало того же радиуса, если масса гало превышает

$$M_h \gtrsim \frac{3\pi}{8} M_d \approx 1.18 M_d \quad (6.4)$$

Этот вывод находится в согласии с результатами работ [2, 10], где исследовалась устойчивость круговых дисков при наличии гало. Отметим, что в окрестности точки $\chi = 0.5$ впервые появляется возможность построения холодных некруговых дисков [5].

THE STABILITY OF ELLIPTICAL STELLAR DISKS.
I. BALANCED DISKS

G. S. BISNOVATYI-KOGAN

The stability of the balanced elliptical disks with quadratic gravitational potential (QGP) relative to bar-like perturbations for binary systems and in the presence of spheroidal halo is investigated. It is shown that in binary systems the elongated disks and compressed disks close to the circular ones are aperiodically unstable. Strongly compressed disks are stable for large ratio of masses: M/M_2 or M_2/M is greater ~ 30 ; the oscillating instability takes place for intermediate mass ratio. The disks in the uniform spheroidal halo are stabilized relative to the barlike perturbations if the gravitational potential of the halo exceeds one half of the gravitational potential of the disk.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Чандраскар, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
2. J. P. Ostriker, P. J. E. Peebles, Ap. J., 186, 467, 1973.
3. A. Toomre, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 15, 437, 1977.
4. G. S. Bisnovatyi-Kogan, M. N. RAS, 174, 203, 1976.
5. Г. С. Бисноватый-Коган, Астрофизика, 19, 65, 1983.
6. K. C. Freeman, M. N. RAS, 134, 15, 1966.
7. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, Астрон. ж., 50, 97, 1973.
8. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976.
9. S. Tremaine, M. N. RAS, 175, 557, 1976.
10. A. Kalnajs, Ap. J., 175, 63, 1972.
11. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, В сб. «Динамика и эволюция звездных систем», ВАГО ГАО, М.—Л., 1975, стр. 138.
12. M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker, Ядерный синтез, Дополнение кн. 1, 1962, стр. 143.
13. Г. С. Бисноватый-Коган, Астрофизика, 7, 121, 1971.
14. Ф. Морс, Г. Фешбак, Методы теоретической физики, т. 2, ИЛ, 1960, стр. 283.