

УДК 52—64—655

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ  
В ПРОБЛЕМЕ ПЕРЕНОСА ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. М. ЛОСКУТОВ, Ю. А. ФРЕЙМАНИС

Поступила 19 апреля 1983

Принята к печати 20 октября 1983

Проведено сравнение приближенных и точных значений степени поляризации излучения, выходящего из атмосферы, в которой происходит рассеяние по закону Рэлея и истинное поглощение. Рассматриваются два типа распределения источников энергии: 1) равномерное распределение и 2) освещение параллельными лучами. Установлены условия применимости приближения однократного рассеяния (как простого, так и модифицированного).

1. *Введение.* Задача о переносе излучения с учетом поляризации представляет значительный интерес для астрофизики. Ее решение с учетом многократного рассеяния является более сложным, чем решение проблемы переноса неполяризованного излучения. Она рассматривалась в работах [1—4], где были получены точные решения некоторых модельных задач. Вместе с тем при интерпретации наблюдений очень часто используется либо приближение однократного рассеяния, либо приближение, состоящее в том, что поляризованным считают только однократно рассеянное излучение, а многократно рассеянный свет принимается неполяризованным [5—11]. Законность этих допущений обычно неизвестна и требует специального исследования. В последнее время в работах В. В. Соболева и одного из авторов данной статьи [12—14] были вычислены точные значения интенсивности и степени поляризации излучения, выходящего из плоского слоя, рассеивающего согласно закону Рэлея. Поэтому мы можем оценить точность приближения однократного рассеяния для такого типа задачи и возможности его использования. В настоящей работе предпринята такая оценка для двух типов первичных источников излучения. Рассматриваемая модель соответствует рассеянию свободными электронами в атмосферах горячих звезд и в аккреционных дисках, молекулами в атмосферах холодных звезд, а также пылью в далекой инфракрасной области.

2. *Постановка задачи.* Рассмотрим однородный плоский слой конечной оптической толщины  $\tau_0$ , рассеивающий излучение по закону Рэлея. Будем

считать, что вместе с рассеянием в слое происходит истинное поглощение. Допустим, что мощность первичных источников не зависит от азимута. Тогда состояние поляризации излучения полностью описывается двумя параметрами Стокса  $I$  и  $K$ , где величина  $I$  описывает полную интенсивность, а величина  $p = K/I$  дает степень поляризации излучения.

Для приложений наибольший интерес представляют интенсивности выходящего из слоя излучения, т. е. величины  $I(0, \eta)$ ,  $K(0, \eta)$ ,  $I(\tau_0, \eta)$  и  $K(\tau_0, \eta)$ , где  $\eta = \arccos \eta$  — угол между направлением распространения излучения и внешней нормалью к границе слоя. Наиболее просто эти величины можно найти с помощью линейных интегральных уравнений, введенных В. В. Соболевым [12]. Полная система уравнений для искомых функций дана в работе [14], и приводить ее мы не будем. Эти уравнения дают параметры Стокса выходящего из среды излучения с учетом многократного рассеяния.

Из этих уравнений или непосредственно из интегродифференциальных уравнений переноса можно получить также значения искомых функций при учете лишь однократного рассеяния.

Ограничимся двумя частными случаями: а) в среде равномерно распределены изотропные источники неполяризованного излучения, б) среда освещена со стороны поверхности  $\tau = 0$  перпендикулярно падающим неполяризованным излучением.

3. *Случай равномерного распределения источников.* В данном случае будем иметь только две искомые величины  $I(0, \eta)$  и  $K(0, \eta)$ . При учете однократного рассеяния они даются формулами (считая мощность первичных источников равной единице)

$$I_1(0, \eta) = (1 - e^{-\lambda \eta})(1 + \lambda) - \\ - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \left| 1 + \frac{1}{2} P_2(\eta) P_2(\eta') \right| \left\{ \frac{\eta'}{\eta + \eta'} [1 - e^{-\lambda(1/\eta + 1/\eta')}] + \right. \\ \left. + \frac{\eta'}{\eta - \eta'} [e^{-\lambda/\eta} - e^{-\lambda/\eta'}] \right\} d\eta', \quad (1)$$

$$K_1(0, \eta) = -\frac{3\lambda}{8} (1 - \eta^2) \int_0^1 P_2(\eta') \left\{ \frac{\eta'}{\eta + \eta'} [1 - e^{-\lambda(1/\eta + 1/\eta')}] + \right. \\ \left. + \frac{\eta'}{\eta - \eta'} (e^{-\lambda/\eta} - e^{-\lambda/\eta'}) \right\} d\eta'. \quad (2)$$

Степень поляризации при однократном рассеянии определяется по формуле  $p_1 = K_1/I_1$ . Если считать, что многократно рассеянный свет непо-

ляризован, то степень поляризации можно найти по формуле  $\bar{p}_1 = K_{\perp} / I$ , где  $I$  — полная интенсивность излучения с учетом рассеяний всех порядков. Последнее соотношение назовем модифицированным приближением однократного рассеяния.

Вычисленные по первой из этих формул значения степени поляризации  $p_1$  (в процентах) вместе с точными значениями  $p$ , приведенными в работе [14], при  $\tau_0 = 0$  и  $\tau_0 = 0.5$  даны в табл. 1 и 2.

Таблица 1  
ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ  
ПОЛЯРИЗАЦИИ  $p(0, \tau_0)$  ПРИ  $\tau_0 = 0$  И ВНУТРЕННИХ  
ИСТОЧНИКАХ ЭНЕРГИИ

$\tau_0$	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.9$		$\lambda = 1.0$	
	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$
0.05	-0.90	-1.00	-1.41	-1.65	-1.57	-1.88	-1.73	-2.11
0.10	-1.23	-1.45	-1.89	-2.46	-2.10	-2.83	-2.30	-3.21
0.25	-1.50	-2.03	-2.25	-3.66	-2.47	-4.30	-2.69	-5.00
0.50	-1.35	-2.12	-1.98	-4.17	-2.17	-5.06	-2.35	-6.08
1.0	-0.85	-1.59	-1.22	-3.57	-1.33	-4.58	-1.44	-5.86
2.0	-0.28	-0.60	-0.41	-1.61	-0.44	-2.25	-0.47	-3.24
5.0	-0.01	0.15	-0.01	0.84	-0.02	1.49	-0.02	2.81
10.0	0.00	0.21	0.00	1.23	0.00	2.48	0.00	6.60

Таблица 2  
ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ  
ПОЛЯРИЗАЦИИ  $p(0, \tau_0)$  ПРИ  $\tau_0 = 0.5$  И ВНУТРЕННИХ  
ИСТОЧНИКАХ ЭНЕРГИИ

$\tau_0$	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.9$		$\lambda = 1.0$	
	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$
0.05	-0.83	-0.92	-1.29	-1.53	-1.44	-1.75	-1.59	-1.98
0.10	-1.20	-1.41	-1.84	-2.39	-2.04	-2.74	-2.23	-3.12
0.25	-1.67	-2.22	-2.47	-3.94	-2.72	-4.59	-2.95	-5.30
0.50	-1.80	-2.73	-2.59	-5.10	-2.83	-6.08	-3.04	-7.19
1.0	-1.56	-2.73	-2.20	-5.49	-2.38	-6.76	-2.54	-8.28
2.0	-1.06	-2.04	-1.47	-4.37	-1.58	-5.56	-1.68	-7.13
5.0	-0.71	-1.20	-0.97	-2.20	-1.05	-2.57	-1.11	-2.92
10.0	-0.70	-1.14	-0.95	-1.81	-1.02	-1.73	-1.09	-0.49

Как видно из таблиц, в рассматриваемой задаче использование приближения однократного рассеяния для нахождения величины  $K$  дает заметные ошибки для степени поляризации уже при  $\tau_0 = 0.1$ . Использование

модифицированного приближения однократного рассеяния при вычислении степени поляризации уменьшает ее абсолютное значение и приводит к еще большим расхождениям с точными результатами. Интересно отметить, что приближение однократного рассеяния дает заниженную по абсолютному значению степень поляризации при умеренных оптических толщинах слоя. Это говорит о том, что многократно рассеянные фотоны создают дополнительную поляризацию, а не деполаризуют излучение, как обычно считается. Можно полагать, что это связано с сильной поляризацией излучения, распространяющегося вдоль границы слоя, при последнем акте рассеяния.

Таким образом, при расчете степени поляризации выходящего излучения в задаче с внутренними источниками уже при оптических толщинах больших нескольких сотых, необходимо использовать точные уравнения, описывающие перенос поляризованного излучения. Использование приближения однократного рассеяния для интерпретации поляриметрических наблюдений звезд типа Ве, проведенное в работах [8] и [9], не может дать правильных значений оптических параметров оболочек этих звезд, поскольку при оптических толщинах порядка нескольких десятых, как видно из табл. 1 и 2, приближенные значения в полтора-два раза меньше точных. При очень малых оптических толщинах степень поляризации лучше определять из чистого приближения однократного рассеяния ( $p_1$ ), а не из модифицированного ( $\bar{p}_1$ ), ибо первое из них не только проще, но и несколько точнее.

4. *Случай нормального падения внешнего излучения.* А. Диффузное отражение. При нормальном падении излучения в приближении однократного рассеяния интенсивности диффузно-отраженного излучения даются выражениями

$$I_1(0, \tau) = \frac{3\kappa F}{16(1 + \tau_1)} (1 + \tau_1^2) [1 - e^{-\tau(1 + 1/\tau_1)}], \quad (3)$$

$$K_1(0, \tau) = \frac{3\kappa F}{16} (1 - \tau_1) [1 - e^{-\tau(1 + 1/\tau_1)}], \quad (4)$$

где  $\kappa F$  — освещенность поверхности  $\tau = 0$  падающим излучением. В этом приближении степень поляризации  $p_1$  равна

$$p_1 = \frac{1 - \tau_1^2}{1 + \tau_1^2} \quad (5)$$

и не зависит от оптической толщины и альbedo однократного рассеяния. Здесь также можно ввести модифицированное приближение однократного рассеяния  $\bar{p}_1 = K_1/I$ . Приближенные значения  $\bar{p}_1$ -и точные  $p$ , которые вычислены нами с помощью линейных интегральных уравнений, для

$\tau_1 = 0$  и  $\tau_1 = 0.5$  даны в табл. 3 и 4. Соответствующие значения  $p_1$  равны 100% и 60%.

Таблица 3

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ  
ПОЛЯРИЗАЦИИ  $p(0, \tau_1)$  ДИФФУЗНО-ОТРАЖЕННОГО  
ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ  $\tau_1 = 0$

$\tau_0$	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.9$		$\lambda = 1.0$	
	$\overline{p_1}$	$p$	$\overline{p_1}$	$p$	$\overline{p_1}$	$p$	$\overline{p_1}$	$p$
0.05	96.2	99.1	93.8	98.5	93.0	98.3	92.3	98.1
0.10	93.8	98.3	89.8	97.1	88.5	96.6	87.2	96.2
0.25	88.9	96.2	81.8	93.3	79.4	92.2	76.9	90.9
0.50	84.5	94.0	74.1	88.6	70.3	86.3	66.4	83.7
1.0	80.9	91.9	66.6	83.1	61.2	78.9	55.2	73.6
2.0	79.1	90.8	61.9	79.2	54.4	72.6	45.4	63.1
5.0	78.8	90.7	60.3	77.9	51.3	69.5	37.1	53.6
10.0	78.8	90.7	60.3	77.8	51.2	69.4	33.9	50.0

Таблица 4

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ  
ПОЛЯРИЗАЦИИ  $p(0, \tau_1)$  ДИФФУЗНО-ОТРАЖЕННОГО  
ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ  $\tau_1 = 0.5$

$\tau_0$	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.9$		$\lambda = 1.0$	
	$\overline{p_1}$	$p$	$\overline{p_1}$	$p$	$\overline{p_1}$	$p$	$\overline{p_1}$	$p$
0.05	57.3	59.6	55.9	59.2	55.4	59.1	54.9	59.0
0.10	55.7	59.1	53.3	58.4	52.3	58.2	51.5	58.0
0.25	52.0	57.8	47.1	56.1	45.5	55.4	43.8	54.7
0.50	47.9	56.1	40.5	52.5	38.0	51.0	35.4	49.2
1.0	43.7	53.9	33.3	47.4	29.7	44.2	26.0	40.4
2.0	41.3	52.4	28.5	42.9	23.7	37.7	18.5	30.5
5.0	40.8	52.1	27.0	41.4	21.2	34.6	13.4	22.6
10.0	40.8	52.1	27.0	41.4	21.1	34.5	11.7	20.1

Из таблиц видно, что приближение однократного рассеяния при диффузном отражении пригодно, если  $\tau_0 \lesssim 0.25$ , и дает несколько завышенную степень поляризации выходящего излучения. Таким образом, в этом случае многократно рассеянные фотоны частично деполаризуют излучение. Модифицированное приближение однократного рассеяния приводит к занижению степени поляризации. Однако при больших оптических толщинах простое приближение является неудовлетворительным. Значительно лучшие результаты дает модифицированное приближение, и им можно

пользоваться для качественной интерпретации наблюдений. Его использование в работах [5] и [6] позволило получить правильные оценки размеров частиц в облаках Венеры и Юпитера.

Б. Диффузное пропускание. Интенсивности диффузно-пропущенного излучения при однократном рассеянии даются формулами.

$$I_1(\tau_0, \eta) = \frac{3F}{16(1-\eta)} (1 + \eta^2) (e^{-\tau_0} - e^{-\tau_0/\eta}), \quad (6)$$

$$K_1(\tau_0, \eta) = \frac{3iF}{16} (1 + \eta) (e^{-\tau_0} - e^{-\tau_0/\eta}), \quad (7)$$

а степень поляризации  $p_1$  определяется по формуле (5).

В табл. 5 и 6 приводятся приближенные  $p_1$  (модифицированное приближение) и точные  $p$  значения степени поляризации при  $\eta = 0$  и  $\eta = 0.5$ . Простое приближение однократного рассеяния дает соответственно  $p_1 = 100\%$  и  $p_1 = 60\%$ .

Таблица 5

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ  
ПОЛЯРИЗАЦИИ  $p(\tau_0, \eta)$  ДИФФУЗНО-ПРОПУЩЕННОГО  
ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ  $\eta = 0$

$\tau_0$	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.9$		$\lambda = 1.0$	
	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$
0.05	96.0	99.0	93.6	98.4	92.8	98.2	91.9	98.0
0.10	93.2	98.1	89.0	96.8	87.6	96.3	86.2	95.8
0.25	85.7	95.4	78.5	91.9	75.7	90.5	72.9	89.1
0.50	78.8	91.4	65.7	84.2	61.2	81.3	56.7	78.0
1.0	67.8	85.1	48.4	71.6	42.0	65.8	35.6	58.9
2.0	54.2	76.9	29.3	55.4	21.9	45.8	14.9	34.5
5.0	35.3	65.8	9.2	36.8	4.2	25.6	1.18	13.9
10.0	21.1	59.2	1.85	30.1	0.36	20.8	0.01	11.7

Из таблиц видно, что область применимости простого и модифицированного приближения однократного рассеяния с целью определения степени поляризации диффузно-пропущенного излучения примерно та же, что и для диффузно-отраженного, хотя результаты получаются несколько менее точные. Многократно рассеянный свет частично деполаризует выходящее из среды излучение. Поэтому при  $\tau_0 > 1$  оба приближения неудовлетворительны. Как следует из работы [13], при  $\tau_0 \gtrsim 10$  степень поляризации диффузно-пропущенного излучения с хорошей точностью аппроксими-

руется решением задачи Милна — тем лучше, чем ближе альбе́до однократного рассеяния к единице.

Таблица 6

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ  
ПОЛЯРИЗАЦИИ  $p(\tau_0, \tau_1)$  ДИФФУЗНО-ПРОПУЩЕННОГО  
ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ  $\tau_1 = 0.5$

$\tau_0$	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.9$		$\lambda = 1.0$	
	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$	$p_1$	$p$
0.05	57.7	59.6	56.1	59.2	55.4	59.1	55.1	59.0
0.10	55.8	59.1	53.2	58.4	52.3	58.2	51.4	58.0
0.25	51.9	57.8	46.9	56.0	45.3	55.3	43.6	54.6
0.50	47.3	55.8	39.7	52.1	37.1	50.5	34.5	48.7
1.0	41.2	52.7	30.1	45.2	26.3	41.8	22.6	37.6
2.0	33.5	48.1	19.0	35.3	14.4	29.0	10.1	21.2
5.0	21.6	40.8	6.05	21.7	2.9	13.4	0.8	4.3
10.0	12.7	36.4	1.2	16.4	0.2	9.4	0.01	2.3

5. *Заключение.* Из рассмотренных выше частных случаев можно сделать следующие выводы. При внутренних источниках излучения в плоском слое приближение однократного рассеяния дает быстро растущие с  $\tau_0$  и  $\lambda$  погрешности для степени поляризации выходящего излучения. При внешнем освещении слоя ошибки значительно меньше, особенно для диффузно-отраженного излучения. Сказанное означает, что задачи о переносе поляризованного излучения в большинстве случаев должны решаться точно с учетом многократного рассеяния.

Ленинградский государственный  
университет

## ON THE SINGLE SCATTERING APPROXIMATION IN THE PROBLEM OF TRANSFER OF POLARIZED RADIATION

V. M. LOSKUTOV, J. A. FREIMANIS

The approximate and exact values of the degree of polarization for radiation emergent from an atmosphere with nonconservative Rayleigh scattering are compared. Two cases of the source distribution are considered: 1) the uniform distribution, 2) the illumination by parallel rays. The conditions of applicability for single scattering approximation (both ordinary and modified) are determined.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
2. В. В. Соболев. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
3. А. Э. Долгинов, Ю. Н. Гнедин, Н. А. Силантьев. Распространение и поляризация излучения в космической среде, Наука, М., 1979.
4. Н. Domke, *Astron. Nachr.* 298, H1, 57, 1977.
5. В. В. Соболев, *Астрон. ж.*, 45, 169, 1968.
6. В. М. Лоскутов. *Астрон. ж.*, 48, 1046, 1971.
7. Д. И. Назирнер. Труды АО ЛГУ, 19, 79, 1962.
8. I. S. Mc Lean, *M. N. RAS*, 186, 265, 1979.
9. T. J. Jones, *Ap. J.*, 228, 787, 1979.
10. J. C. Brown, I. S. Mc Lean, A. G. Emslie, *Astron. Astrophys.*, 68, 415, 1978.
11. J. C. Kemp, *Astron. Astrophys.* 91, 108, 1980.
12. В. В. Соболев, Уч. зап. ЛГУ, 116, 3, 1949.
13. В. М. Лоскутов, В. В. Соболев, *Астрофизика*, 15, 241, 1979.
14. В. М. Лоскутов, В. В. Соболев, *Астрофизика*, 17, 535, 1981.