

УДК 52—6

РАССЕЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ХОЛОДНОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 20 мая 1983

Принята к печати 20 октября 1983

Рассматривается многократное комптоновское рассеяние на газе неподвижных электронов. Считается, что энергии фотонов значительно меньше энергии покоя электронов. Получены точные решения описывающего такое рассеяние дифференциального уравнения в линейном и недисперсионном приближениях. Прослежена эволюция спектра излучения в одном частном случае.

1. *Введение.* В ряде объектов, таких, как разреженные газовые оболочки звезд, аккреционные диски, рентгеновские источники, квазары и сама Вселенная с реликтовым излучением (горячая модель), большую роль играет рассеяние непрерывного излучения на свободных электронах. Начало исследованию этого рассеяния было положено работой А. С. Компанейца [1]. Интерес к нему возрос в конце 60-х годов, после обнаружения новых астрофизических объектов, и с тех пор опубликовано большое число работ, посвященных изучению многократного комптоновского рассеяния (см. обзоры [2, 3]).

В большинстве работ считалось, что излучение изотропно, пространственно однородно и рассеивается на однородном электронном газе, заполняющем все пространство. Такое предположение часто оправдано, так как пространственно-угловое распределение излучения создается за 2—3 рассеяния, а формирование спектра требует очень большого числа рассеяний, при котором поле излучения изотропизуется. В последнее время предложено несколько методов решения пространственно неоднородных задач [4—7].

В настоящей работе мы рассмотрим задачу о комптоновском рассеянии излучения на электронном газе, температура которого намного меньше, чем эффективная температура излучения, так что электроны можно считать неподвижными в некоторой системе координат. Будем предполагать, что

энергия излучения, переходящая к электронному газу, отводится каким-то механизмом, отличным от комптоновского рассеяния. Сначала из релятивистского кинетического уравнения выведем уравнение, описывающее взаимодействие излучения произвольного спектра, которое мы будем считать однородным и изотропным, с холодным газом электронов. Затем приведем уравнение для случая, когда энергии фотонов значительно меньше энергии покоя электрона. Для двух предельных видов этого уравнения мы получим точные аналитические решения. Заметим, что задача о рассеянии пространственно неоднородного излучения на холодных электронах решается приближенно в работе [7].

2. *Кинетические уравнения.* Пусть фотонный газ взаимодействует с облаком электронов. Однократное взаимодействие описывается формулой Клейна—Нишины (см. [8]), учитывающей релятивистские и квантовые эффекты, в частности, комптоновский сдвиг частоты фотона. Распределение электронов по импульсам \vec{p} описывается функцией $\delta(\vec{p})$ при концентрации их n_e . Излучение будем характеризовать, как это принято в подобных задачах, числами заполнения ячеек фазового пространства $n(z, t)$, где $z = h\nu/mc^2$, ν — частота фотона, t — время, m — масса покоя электрона. С обычной интенсивностью I связано равенством $I = (2h\nu^3/c^3)n$.

Релятивистское кинетическое уравнение, описывающее взаимодействие фотонов и электронов с учетом вынужденного рассеяния [9] в системе, связанной с электронным газом, в нашем случае имеет вид

$$(1/c) \partial n / \partial t = n_e (r_0^2/2) \int d^3 p d^3 p_1 z_1 dz_1 d^2 \omega_1 (4F/p_0 p_{10}) m^3 c^3 \times \\ \times \delta(\vec{p} + mcz\vec{\omega} - \vec{p}_1 - mcz_1\vec{\omega}_1) [n(z_1, t) [1 + n(z, t)] \delta(\vec{p}_1) - \\ - n(z, t) [1 + n(z_1, t)] \delta(\vec{p})] \delta(p_0 + mcz - p_{10} - mcz_1). \quad (1)$$

Здесь $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона, $p_0 = (m^2 c^4 + p^2)^{1/2}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_1$ — орты направлений импульсов падающего и рассеянного фотонов, а величина F дается формулой

$$F(z, z_1) = (1/z_1 - 1/z)^2 - |1/z_1 - 1/z| + z/z_1 + z_1/z. \quad (2)$$

Вычисляя в (1) интегралы по \vec{p} , \vec{p}_1 и $\vec{\omega}_1$, получаем нужное кинетическое уравнение

$$(1/c) \partial n / \partial t = n_e (\pi r_0^2 / z^2) \left\{ [1 + n(z, t)] \int_{z_1}^{z_1(z)} dz_1 n(z_1, t) F(z, z_1) - \right.$$

$$-n(z, t) \int_{z/(1+2z)}^{\infty} [1 + n(z_1, t)] F(z, z_1) dz_1, \quad (3)$$

где $z_1(z) = \infty$, если $z \geq 1/2$, и $z_1(z) = z/(1-2z)$ при $z < 1/2$.

Если теперь принять, что $z = hv/mc^2 \ll 1$, разложить $n(z_1, t)$ и другие функции в ряд около точки z и сохранить члены со второй производной, то, измеряя время в единицах $3/8\pi r^2 c n_e$, получим дифференциальное уравнение

$$\partial n / \partial t = (1/z^2) (\partial / \partial z) [z^4 (n^2 + n) + (7/10) z^6 \partial n / \partial z]. \quad (4)$$

Уравнение (4) было получено в [10]. Если отбросить слагаемое с производной в скобке, то оно переходит в частный случай уравнения Компанейца — для холодных электронов. В [11] отмечалось, что в линейном приближении (4) значительно лучше описывает рассеяние на холодных электронах, чем уравнение Компанейца, а именно дает лучшую точность при сравнении с решением интегрального уравнения методом Монте-Карло. Ниже мы получим точные решения уравнения (4) в линейном и недисперсионном (без второй производной) приближениях.

3. *Линейное приближение.* Если вынужденное рассеяние не играет роли, то есть $n \ll 1$, то член n^2 можно отбросить. Тогда (4) примет вид

$$\partial n / \partial t = (1/z^2) (\partial / \partial z) [z^4 n + (7/10) z^6 \partial n / \partial z]. \quad (5)$$

Уравнение (5) не допускает ненулевого стационарного решения, имеющего физический смысл, так как энергия все время переходит от фотонов к электронам. Неоднородное же уравнение с источником на произвольной частоте

$$(1/z^2) (d/dz) [z^4 G_0 + (7/10) z^6 dG_0/dz] = \delta(z - z_1) \quad (6)$$

имеет решение (функция Грина)

$$G_0(z, z_1) = (1/120 z^3) \exp[5(z_1 - z)/7zz_1] W_{7, 5/2}(10/7z) M_{2, 5/2}(10/7z), \quad (7)$$

где \bar{z} и \underline{z} — наибольшее и наименьшее из чисел z и z_1 , а функции Уиттекера [см. [12], 9.220—9.222]

$$W_{2, 5/2}(x) = x^3 e^{-x/2} \int_0^{\infty} e^{-xt} (1+t)^4 dt, \quad (8)$$

$$M_{2, 5/2}(x) = (1/5 x^2) \int_0^x e^t (x-t)^4 dt \quad (9)$$

являются здесь элементарными функциями.

В нестационарном случае необходимо задать начальное распределение $n(z, 0) = n_0(z)$. Введем функцию Грина

$$n(z, t) = \int_0^{\infty} G(t, z, z_1) n_0(z_1) dz_1. \quad (10)$$

Она определяется тем же уравнением (5) с начальным условием $G(0, z, z_1) = \delta(z - z_1)$.

Применив к (5) преобразование Лапласа по времени и отметив результат его применения чертой сверху, получим уравнение (s — параметр преобразования)

$$(1/z^3) (d/dz) [z^4 \bar{n} + (7/10) z^6 d\bar{n}/dz] = s\bar{n}(z, s) - n_0(z). \quad (11)$$

Преобразование Лапласа от функции Грина определяется уравнением (11) при $n_0(z) = \delta(z - z_1)$. Решение (11) выражается через вырожденные гипергеометрические функции, из которых наиболее удобны функции Уиттекера. Для функции Грина получаем

$$\begin{aligned} \bar{G}(s, z, z_1) = & (5/7A) \Gamma(3 - 10/7A) \exp[5(z_1 - z)/7zz_1] \times \\ & \times (1/120z^3) W_{10/7A, 5/2}(2A/z) M_{10/7A, 5/2}(2A/\bar{z}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $A = [(5/7 + 2s)5/7]^{1/2}$.

Легко проверить, что из (12) следует условие сохранения числа фотонов при комптоновском рассеянии:

$$\int_0^{\infty} z^3 n(z, t) dz = \int_0^{\infty} z^3 n_0(z) dz. \quad (13)$$

Действительно, при использовании свойств функций Уиттекера можно получить, что

$$\int_0^{\infty} z^2 \bar{G}(s, z, z_1) dz = z_1^2/s. \quad (14)$$

Равенство (14) обеспечивает независимость от времени интеграла

$$\int_0^{\infty} z^2 G(t, z, z_1) dz = z_1^2, \quad (15)$$

что равносильно (13).

При обращении преобразования Лапласа (12) необходимо учесть следующие особенности его на комплексной плоскости: полюса Γ -функции в точках $s_n = -5/14 + 10/7 n^2$, $n = 3, 4, \dots$, а также линию ветвления по s величины A на отрицательной части вещественной оси — промежуток $(-\infty, -5/14)$. Принимая во внимание то, что функции Уиттекера являются целыми, преобразуем контур интегрирования в формуле обращения преобразования Лапласа к линии ветвления. Вычисляя вычеты и пользуясь формулами 9.233 из [12], получаем

$$G(t, z, z_1) = \exp [5 (1/z - 1/z_1)/7] (1/7 \Gamma(6) z^2) e^{-5t/14} \times \\ \times \left[\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n A_n(z) A_n(z_1) e^{10t/7n^2} 5/n^2 (n-3)! + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \mu e^{-10\mu^2 t/7} (1+\mu^2)(1+4\mu^2)(1-e^{-2\pi/\mu})^{-1} B_{\mu}(z) B_{\mu}(z_1)/12 \right]. \quad (16)$$

Здесь функции $A_n(z)$ и $B_{\mu}(z)$ являются собственными функциями дискретного и непрерывного спектра дифференциального оператора, связанного с уравнением (5). Функции $A_n(z) = M_{n, 5/2}(20/7nz)$ — элементарные, так как согласно формулам 9.220.2 и 8.972.1 из [12]

$$M_{n, 5/2}(x) = x^3 e^{-x^2} [\Gamma(6)/n(n^2-1)(n^2-4)] L_{n-3}^5(x), \quad (17)$$

где $L_n^s(x)$ — многочлены Лагерра. Функции $B_{\mu}(z) = iM_{-i\mu, 5/2}(20 i\mu/7z)/\mu^3$ вещественны в силу формул 9.220.2 и 9.212.1 того же справочника [12].

Заметим, что формально интегрировать функцию (16) по z , например, с целью проверки соотношения (13) нельзя, так как интегралы получаются расходящимися. Интегрирование по z можно производить лишь для конкретных $p_0(z)$ после вычисления интегралов по z_1 и μ . Функция Грина получилась очень сложной, и, по-видимому, при решении конкретных задач целесообразнее численно решать исходное уравнение.

4. *Недисперсионное приближение.* Теперь рассмотрим другой предельный случай уравнения (4), когда можно отбросить производную в квадратной скобке. Тогда (4) перейдет в уравнение, совпадающее с уравнением Компанейца для случая холодного электронного газа [1]:

$$\partial n / \partial t = (1/z^2) (\partial / \partial z) [z^4 (n + n^2)]. \quad (18)$$

В уравнении Компанейца используется частота $x = \hbar\nu/kT$ и единица времени $3kT/8\pi r_0^2 mc^2 n_0$. Но из (18) следует, что его решения обладают свойством $n(ax, at) = n(z, t)$, так что одинаковое изменение масштаба частот и времени не меняет характера решения.

Первыми интегралами уравнений характеристик (18) являются $z^4 B = C^4$, где $B = n + n^2$, и $4Ct + 2^{1/2} F(\varphi, 2^{-1/2})$, причем $F(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл первого рода, а

$$\varphi = \varphi(B) = 2 \operatorname{arctg}(2^{-1/2} B^{-1/4}). \quad (19)$$

Неявное решение (18), удовлетворяющее начальному условию $n(z, 0) = n_0(z)$, дается формулой

$$t = [F(\varphi_0, 2^{-1/2}) - F(\varphi, 2^{-1/2})]/2^{3/2} C, \quad (20)$$

где $\varphi_0 = \varphi(B_0(z_0))$, $B_0(z) = n_0(z)[1 + n_0(z)]$, $C = zB^{1/4}(z) = z_0 B_0^{1/4}(z_0)$.

Вычислять решение надо в следующем порядке. Сначала при заданных n и z находим C , затем такое z_0 , что $C = z_0 B_0^{1/4}(z_0)$, после чего φ и φ_0 . Далее получаем зависимость t от n при закреплённом z , которую надо обратить и получить $n(z, t)$. Таблицы функции $F(\varphi, k)$ имеются, например, в [13].

Если в полученном решении считать $n \gg 1$, то есть рассмотреть случай, когда вынужденное рассеяние играет основную роль, то, воспользовавшись тем, что при $n \gg 1$ будет $B \sim n^2$, $\varphi \sim 2^{1/2} n^{-1/2}$, $F(\varphi, 2^{-1/2}) \sim \varphi$, найдем, что (20) сведется к

$$t = 1/2 z_0 n_0(z) - 1/2 z n(z, t). \quad (21)$$

Такое решение было получено Я. Б. Зельдовичем и Е. В. Левичем в [14] (см. также [2]). В этой работе показано, что если в начальном распределении $n_0(z)$ имеется точка перегиба, то с течением времени в распределении $n(z, t)$ появляются неоднозначности (перехлест), что было интерпретировано как свидетельство образования разрыва — ударной волны в спектре излучения. Неоднозначность же появляется вследствие некорректности перехода от интегрального уравнения к дифференциальному при резко меняющейся $n(z, t)$ с изменением z .

Для иллюстрации нашего решения на рис. 1 приводятся графики спектров, точнее числа фотонов $z^2 n(z, t)$ при начальном распределении $n_0(z) = ze^{-z}$ для ряда моментов t . Заметим, что функция, обратная $C = z_0 B_0^{1/4}(z_0)$ двузначна. Двузначны также при каждом z зависимости B_0 от n и, следовательно, t от n . Таким образом, определенные значения n при данном z могут приниматься дважды. При z , лежащих справа от $z = 1$ — точки максимума $n_0(z)$, одно из таких значений t отрицательно (прошлое).

Общая картина эволюции спектра та же, что и в случае (21). Максимум распределения со временем смещается в сторону меньших частот. Начиная с некоторого $t \approx 0.3$ появляется перехлест, который также смещает-

ся влево. При $t = 0.3635$ этот выступ кривой достигает оси $z = 0$, а при больших t распространяется в область отрицательных z .

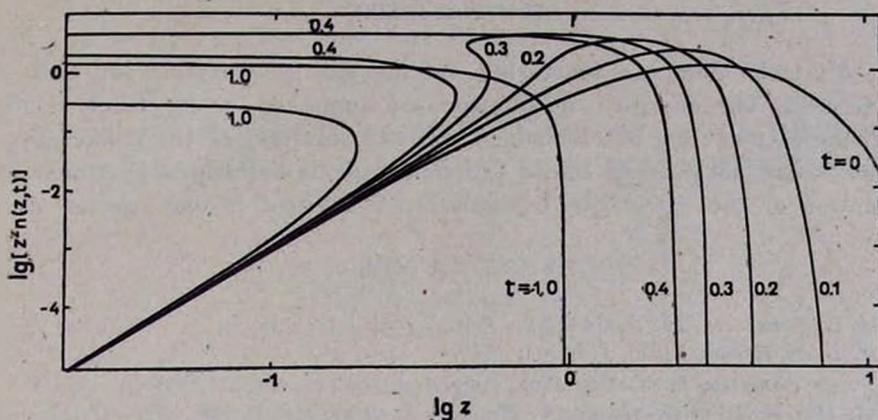


Рис. 1. Эволюция спектра числа фотонов согласно (20).

При достаточно больших t ударная волна проходит и n уменьшается. При $n \ll 1$, $B \sim n$, $\varphi \sim \pi - 2^{1/2} n^{1/4}$, $F(\varphi, 2^{-1/2}) \sim 2F(\pi/2, 2^{-1/2}) - 2^{3/2} n^{1/4}$ и, как видно из (20), t при закрепленном z ограничено сверху величиной $1/z$, а при $n \rightarrow 0$ стремится к $1/z$. Это означает, что среднее число заполнения состояний фотонов в частоте z обращается в нуль за конечное время $t = 1/z$. При этом, когда $t \rightarrow 1/z - 0$, то $n \sim \exp[-1/(1/z - t)]$ (в пределах рисунка этот закон не достигается).

Таким образом, главная особенность решения (21), отражающая образование ударной волны в спектре, сохраняется и у (20), даже при небольших начальных значениях $n_0(z)$. Но решение (20) позволяет проследить эволюцию спектра в областях, где n порядка единицы и мало и где решение, следовательно, имеет физический смысл. Отметим, что получить решение уравнения (20) численными методами затруднительно.

Заметим, что мы считали при выводе (4) $z \ll 1$, а начальное распределение $n_0(z)$ взяли с максимумом при $z = 1$. Однако $z \ll 1$ можно добиться, пользуясь отмеченной выше инвариантностью уравнения (18) и вводя соответствующий масштаб частот и времени.

Решение (20) позволяет аналогично получить численные результаты для любого начального спектра. Вместе с (7) и (16) оно пополняет набор приведенных в [3] точных решений уравнений, связанных с описанием многократного комптоновского рассеяния.

THE SCATTERING OF SPACE — HOMOGENEOUS
ISOTROPIC RADIATION ON COLD ELECTRON GAS

D. I. NAGIRNER

Multiple Compton scattering on the gas of electrons at rest is considered. The energies of photons are supposed to be much smaller than the rest energy of electron. The exact solutions of the Fokker-Plank equation are obtained in linear and non-dispersional approximations. The evolution of the spectrum of radiation is studied in one special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Компанец, ЖЭТФ, 31, 876, 1956.
2. Я. Б. Зельдович, УФН, 115, 161, 1975.
3. R. A. Sunyaev, L. G. Titarchuk, *Astron. Astrophys.*, 86, 121, 1980.
4. A. Illarionov, T. Kallman, R. McCray, R. Ross, *Ap. J.*, 228, 279, 1979.
5. A. P. Lightman, G. B. Rybicki, *Ap. J.*, 236, 928, 1980.
6. D. G. Payne, *Ap. J.*, 237, 951, 1980.
7. A. P. Lightman, D. Q. Lamb, G. B. Rybicki, *Ap. J.*, 248, 738, 1981.
8. Е. М. Лифищ, А. П. Пугачевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1981.
9. Ю. П. Очелков, О. Ф. Прилуцкий, И. Л. Розенталь, В. В. Усов, *Релятивистская кинетика и гидродинамика*, Атомиздат, М., 1979.
10. R. R. Ross, R. Weaver, R. McCray, *Ap. J.*, 219, 292, 1978.
11. S. H. Langer, R. R. Ross, R. McCray, *Ap. J.*, 222, 959, 1978.
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971.
13. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, М., 1968.
14. Я. Б. Зельдович, Е. В. Левич, ЖЭТФ, 55, 2433, 1968.