

УДК 52—64

ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ СО СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ

А. К. КОЛЕСОВ

Поступила 12 февраля 1983

Принята к печати 10 октября 1983

Решается однородное уравнение переноса излучения в анизотропно рассеивающей сферически симметричной среде. Найдена полная система сингулярных собственных функций этого уравнения. Получено условие ортогональности этих функций для полного промежутка изменения угловой переменной. Показано, что собственные значения уравнения переноса для сферической и плоской геометрий совпадают. Построены функции Грина задач со сферической симметрией для однородной бесконечной среды.

1. Введение. Задача о переносе излучения в сферически симметричных средах часто встречается при исследованиях различных астрофизических объектов (пылевых околозвездных оболочек, планетарных туманностей, рентгеновских источников и т. д.).

Теория многократного рассеяния света в бесконечной среде со сферической симметрией и в шаре конечного оптического радиуса довольно подробно разработана для случая изотропного рассеяния (см., например, [1—6]). В частности, для этого случая найдены собственные функции уравнения переноса излучения [4, 7, 8], построены функции Грина для задач со сферической симметрией [4, 9].

При произвольной индикатрисе рассеяния эта теория развита еще недостаточно полно, хотя и в этом случае получен ряд существенных результатов. Выведено интегральное уравнение для функции источников (см., например, [1]), найдены рекуррентные соотношения между коэффициентами разложения функции источников по полиномам Лежандра (см. [3]). В статье [10] принципы инвариантности использованы для вывода интегродифференциальных уравнений для функций отражения и пропускания света сферическими оболочками, хотя аналитических решений этих уравнений не получено.

В работе автора [11] был исследован световой режим в бесконечной однородной анизотропно рассеивающей и поглощающей среде, освещенной

точечным источником. Найдено точное аналитическое выражение для коэффициентов разложения функции источников по полиномам Лежандра, получены асимптотические формулы для функции источников и интенсивности излучения вдали от точечного источника.

В настоящей работе построена система ортогональных собственных функций однородного уравнения переноса излучения в сферически симметричной среде при анизотропном рассеянии. Определены функции Грина задач со сферической симметрией для бесконечной однородной среды.

2. Собственные значения и собственные функции однородного уравнения переноса излучения (случай $0 < \lambda < 1$). Рассмотрим бесконечную однородную поглощающую и анизотропно рассеивающую среду, обладающую сферической симметрией. Оптические свойства вещества этой среды будем характеризовать объемным коэффициентом поглощения α , альбедо однократного рассеяния λ ($0 < \lambda < 1$) и индикатрисой рассеяния $x(\gamma)$, где γ — угол рассеяния. Будем считать, что величина $x(\gamma)$ представляется в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\cos \gamma)$, т. е.

$$x(\gamma) = \sum_{n=0}^N x_n P_n(\cos \gamma). \quad (1)$$

Предположим, что источники излучения в среде отсутствуют, и будем искать ненулевые решения однородного уравнения переноса излучения

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \frac{1 - \mu^2}{\tau} \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \mu} + I(\tau, \mu) - \\ - \frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^N x_n P_n(\mu) \int_{-1}^1 P_n(\mu') I(\tau, \mu') d\mu' = 0, \quad (2)$$

где $I(\tau, \mu)$ — интенсивность излучения, распространяющегося на оптическом расстоянии τ от начала координат под углом $\arccos \mu$ к направлению радиуса-вектора. Такие решения, как известно [12], существуют не всегда, а лишь при определенных значениях некоторого параметра ν . Эти значения ν называются собственными значениями, а соответствующие им частные решения $I(\tau, \mu, \nu)$ — собственными функциями (или элементарными решениями) уравнения (2).

Представим величину $I(\tau, \mu, \nu)$ в виде

$$I(\tau, \mu, \nu) = \frac{1}{\tau \nu} \hat{i}(\tau, \mu, \nu) e^{-\tau \nu}, \quad (3)$$

тогда, подставляя (3) в (2), получим для функции $\hat{i}(\tau, \mu, \nu)$ следующее уравнение:

$$\tau \frac{\partial i(\tau, \mu, \nu)}{\partial \tau} + \frac{1-\mu^2}{\tau} \frac{\partial i(\tau, \mu, \nu)}{\partial \mu} + \left[1 - \mu \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\nu} \right) \right] i(\tau, \mu, \nu) = \\ = -\frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^N x_n P_n(\mu) r_n(\tau, \nu), \quad (4)$$

где

$$r_n(\tau, \nu) = \int_{-1}^1 i(\tau, \mu, \nu) P_n(\mu) d\mu. \quad (5)$$

Согласно формуле (5), величины $r_n(\tau, \nu)$ являются коэффициентами разложения $i(\tau, \mu, \nu)$ по полиномам Лежандра, следовательно, функцию $i(\tau, \mu, \nu)$ можно записать в форме

$$i(\tau, \mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r_n(\tau, \nu) P_n(\mu). \quad (6)$$

В качестве условия нормировки этой функции примем следующее равенство:

$$r_0(\tau, \nu) = \int_{-1}^1 i(\tau, \mu, \nu) d\mu = 1. \quad (7)$$

Подстановка (6) в (4) приводит к рекуррентному соотношению для величин $r_n(\tau, \nu)$ при $n \geq 0$

$$(n+1) \frac{\partial r_{n+1}(\tau, \nu)}{\partial \tau} + n \frac{\partial r_{n-1}(\tau, \nu)}{\partial \tau} + (n+1) \left(\frac{n+1}{\tau} - \frac{1}{\nu} \right) r_{n+1}(\tau, \nu) - \\ - n \left(\frac{n}{\tau} + \frac{1}{\nu} \right) r_{n-1}(\tau, \nu) = -(2n+1 - \lambda x_n) r_n(\tau, \nu). \quad (8)$$

Легко проверить, что этому рекуррентному соотношению при условии (7) удовлетворяют функции

$$r_n(\tau, \nu) = R_n(\nu) \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m! (n-m)!} \left(\frac{\nu}{2\tau} \right)^m = \\ = \sqrt{\frac{2\tau}{\pi\nu}} R_n(\nu) K_{n+1/2} \left(\frac{\tau}{\nu} \right) e^{\tau/\nu}, \quad (9)$$

входящие в решение задачи о световом режиме в бесконечной однородной анизотропно рассеивающей среде, освещенной точечным источником [11].

В формуле (9) $K_{n+1/2}(\tau/\nu)$ — модифицированные функции Бесселя 3-го рода, а $R_n(\nu)$ — известные полиномы, используемые в теории переноса излучения (см., например, [2]).

Таким образом, из формул (3), (6) и (9) следует, что собственными функциями уравнения (2) являются функции

$$I(\tau, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) R_n(\nu) K_{n+1/2}(\tau/\nu). \quad (10)$$

В соответствии с формулами (3), (6) и (9) функции $I(\tau, \mu, \nu)$ можно представить также в виде

$$I(\tau, \mu, \nu) = \frac{1}{\tau\nu} e^{-\tau/\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\nu}{2\tau}\right)^m i_m(\mu, \nu), \quad (11)$$

где

$$i_m(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1) \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n(\mu) R_n(\nu). \quad (12)$$

Наряду с функциями $I(\tau, \mu, \nu)$ введем сопряженные собственные функции

$$I^*(\tau, \mu, \zeta) = I(\tau, -\mu, -\zeta) = -\frac{1}{\tau\zeta} e^{-\tau/\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{\zeta}{2\tau}\right)^m i_m(\mu, \zeta), \quad (13)$$

удовлетворяющие уравнению

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial I^*(\tau, \mu, \zeta)}{\partial \tau} - \frac{1-\mu^2}{\tau} \frac{\partial I^*(\tau, \mu, \zeta)}{\partial \mu} + I^*(\tau, \mu, \zeta) - \\ - \frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^N x_n P_n(\mu) \int_{-1}^1 P_n(\mu') I^*(\tau, \mu', \zeta) d\mu' = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Умножим уравнение вида (2) для функции $I(\tau, \mu, \nu)$ на $I^*(\tau, \mu, \zeta)$, а уравнение (14) — на $I(\tau, \mu, \nu)$. Проинтегрируем полученные выражения по μ в пределах от -1 до 1 и из первого найденного уравнения вычтем второе, тогда получим, что

$$\frac{d}{d\tau} \left[\tau^2 \int_{-1}^1 \mu I(\tau, \mu, \nu) I^*(\tau, \mu, \zeta) d\mu \right] = 0, \quad (15)$$

следовательно,

$$\int_{-1}^1 \mu I(\tau, \mu, \nu) I^*(\tau, \mu, \zeta) d\mu = \frac{C(\nu, \zeta)}{\tau^2}. \quad (16)$$

Подставляя (11) и (13) в (16) и приравнявая коэффициенты при τ^{-2} в обеих частях получающегося уравнения, находим

$$\int_{-1}^1 \mu i_0(\mu, \nu) i_0(\mu, \zeta) d\mu = -\tau C(\nu, \zeta). \quad (17)$$

Величины $i_0(\mu, \nu)$ являются собственными функциями уравнения переноса излучения в плоской бесконечной однородной среде, исследованными в случае изотропного рассеяния в работе Кейза [13], а в случае анизотропного рассеяния — в работе Мика [14]. Как известно, их можно представить в виде

$$i_0(\mu, \nu) = \frac{\lambda \nu}{2} \frac{A(\nu, \mu)}{\nu - \mu} + T(\nu) \delta(\nu - \mu), \quad (18)$$

где $\delta(\nu - \mu)$ — дельта-функция Дирака,

$$T(\nu) = 1 - \nu \int_{-1}^1 \frac{\Psi(\mu)}{\nu - \mu} d\mu, \quad (19)$$

$$\Psi(\mu) = \frac{\lambda}{2} A(\mu, \mu), \quad A(\nu, \mu) = \sum_{n=0}^N x_n R_n(\nu) P_n(\mu). \quad (20)$$

Из формул (3), (7) и (11) следует условие

$$\int_{-1}^1 i_0(\mu, \nu) d\mu = 1, \quad (21)$$

которому должны удовлетворять собственные значения ν уравнения (2). Оно совпадает с условием для собственных значений уравнения переноса излучения в плоской среде (см. [12]). Таким образом, собственные значения однородного уравнения переноса излучения в сферически симметричной среде таковы же, что и собственные значения соответствующего уравнения для плоской среды. Значения ν непрерывно заполняют промежуток $[-1, 1]$, а также являются корнями $\nu = \pm \nu_j \in [-1, 1]$ характеристического уравнения $T(\nu) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, M$, где M — число положительных корней указанного уравнения).

Величины $i_0(\mu, \nu)$, как известно [12], удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{-1}^1 \mu i_0(\mu, \nu) i_0(\mu, \zeta) d\mu = N(\nu) \delta_{\nu, \zeta}, \quad (22)$$

где $\delta_{\nu, \zeta}$ — δ -функция при $\nu \in [-1, 1]$ и символ Кронекера при $\nu = \pm \nu_j$,

$$N(\nu) = \nu \{ [T(\nu)]^2 + [\pi \nu \Psi(\nu)]^2 \} \text{ при } \nu \in [-1, 1], \quad (23)$$

$$N(\nu) = 2\nu \Psi(\nu) \left[2\nu^4 \int_0^1 \frac{\Psi(\eta) d\eta}{(\nu^2 - \eta^2)^2} - 1 \right] \text{ при } \nu = \pm \nu_j.$$

Сравнение формул (17) и (22) дает

$$C(\nu, \zeta) = -\frac{N(\nu)}{\nu^3} \delta_{\nu, \zeta}. \quad (24)$$

Из формул (16) и (24) следует, что сопряженные собственные функции $I^*(\tau, \mu, \nu)$ биортогональны с весом μ по отношению к системе собственных функций $I(\tau, \mu, \nu)$.

В работах Кейза [12, 13] доказана полнота системы функций $i_0(\mu, \nu)$ в пространстве непрерывных линейных функционалов, построенных на множестве бесконечно дифференцируемых функций, определенных на числовой прямой. Используя этот результат, можно доказать и свойство полноты собственных функций $I(\tau, \mu, \nu)$ в указанном пространстве.

Для случая изотропного рассеяния собственные функции (10) были найдены ранее Н. И. Лалетиным [4, 7] и Нонненмахером [8].

Отметим, что интегралы в приведенных выше формулах являются не-собственными и понимаются в смысле главного значения Коши. Собственные функции $I(\tau, \mu, \nu)$, определяемые формулой (10), представляют собой обобщенные функции в смысле Соболева—Шварца (см., например, [15]). Действительно, учитывая асимптотическое по индексу поведение величин $K_{n+1/2}(\tau/\nu)$, мы видим (см. [4]), что ряд, стоящий в правой части формулы (10), может быть расходящимся. Его следует понимать как предел последовательности регулярных функций, т. е.

$$I(\tau, \mu, \nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} I^N(\tau, \mu, \nu) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^3}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (2n+1) P_n(\mu) R_n(\nu) K_{n+1/2}(\tau/\nu). \quad (25)$$

Это замечание относится и к формулам (11)—(13).

3. Собственные функции однородного уравнения переноса излучения в случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$). При $\lambda = 1$ собственные функции урав-

нения переноса излучения, соответствующие собственным значениям $\nu \in [-1, 1]$ и конечным $\nu_j \in [-1, 1]$ (если они существуют), имеют тот же вид, что и при $\lambda \neq 1$, т. е. определяются формулами (10). Однако в этом случае характеристическое уравнение имеет, как известно [14], также два бесконечных корня ($\nu_{\pm 1} = \pm \infty$). Найдем собственные функции, соответствующие этим бесконечным собственным значениям, т. е. величины

$$f(\tau, \mu, \pm \infty) = \lim_{\nu \rightarrow \pm \infty} \nu I(\tau, \mu, \nu), \quad (26)$$

удовлетворяющие уравнению

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial f(\tau, \mu, \pm \infty)}{\partial \tau} + \frac{1 - \mu^2}{\tau} \frac{\partial f(\tau, \mu, \pm \infty)}{\partial \mu} + f(\tau, \mu, \pm \infty) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N x_n P_n(\mu) \int_{-1}^1 P_n(\mu') f(\tau, \mu', \pm \infty) d\mu'. \end{aligned} \quad (27)$$

Представим величины $f(\tau, \mu, \pm \infty)$ в виде

$$f(\tau, \mu, \pm \infty) = \frac{1}{2\tau} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r_n(\tau) P_n(\mu). \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), получаем для функций $r_n(\tau)$ рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} (n+1) \frac{dr_{n+1}(\tau)}{d\tau} + n \frac{dr_{n-1}(\tau)}{d\tau} + \frac{(n+1)^2}{\tau} r_{n+1}(\tau) - \\ - \frac{n^2}{\tau} r_{n-1}(\tau) = -(2n+1 - x_n) r_n(\tau). \end{aligned} \quad (29)$$

Сравнивая (4) и (29) убеждаемся, что $r_n(\tau) = r_n(\tau, \pm \infty)$.

Будем искать частные решения системы уравнений (29), удовлетворяющие условию $r_0(\tau) = 1$. Формулу (29) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} (n+1) \left[\frac{dr_{n+1}(\tau)}{d\tau} + \frac{n+1}{\tau} r_{n+1}(\tau) \right] + n \left[\frac{dr_{n-1}(\tau)}{d\tau} + \frac{n-1}{\tau} r_{n-1}(\tau) \right] = \\ = \frac{n(2n-1)}{\tau} r_{n-1}(\tau) - (2n+1 - x_n) r_n(\tau). \end{aligned} \quad (30)$$

Соотношения (30) выполняются, если функции $r_n(\tau)$ являются решениями уравнения

$$\frac{dr_n(\tau)}{d\tau} + \frac{n}{\tau} r_n(\tau) = 0 \quad (31)$$

и удовлетворяют условию

$$r_n(\tau) = \frac{n(2n-1)}{2n+1-x_n} \frac{r_{n-1}(\tau)}{\tau}, \quad (32)$$

т. е.

$$r_n(\tau) = \frac{n!}{(2n+1)\beta_n} \frac{1}{\tau^n}, \quad (33)$$

где

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_n = \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{x_m}{2m+1}\right) \quad (n \geq 1). \quad (34)$$

Таким образом, из формул (28) и (33) следует, что одна из искомым собственных функций имеет вид

$$f(\tau, \mu, +\infty) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\beta_n} \frac{P_n(\mu)}{\tau^{n+1}}. \quad (35)$$

Записывая (29) в форме

$$\begin{aligned} (n+1) \left[\frac{dr_{n+1}(\tau)}{d\tau} - \frac{n+2}{\tau} r_{n+1}(\tau) \right] + n \left[\frac{dr_{n-1}(\tau)}{d\tau} - \frac{n}{\tau} r_{n-1}(\tau) \right] = \\ = - \frac{(n+1)(2n+3)}{\tau} r_{n+1}(\tau) - (2n+1-x_n) r_n(\tau), \end{aligned} \quad (36)$$

аналогично можно получить и вторую собственную функцию

$$f(\tau, \mu, -\infty) = \frac{1}{2}. \quad (37)$$

Сопреженные собственные функции равны

$$f^*(\tau, \mu, +\infty) = -\frac{1}{2}, \quad f^*(\tau, \mu, -\infty) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{\beta_n} \frac{P_n(\mu)}{\tau^{n+1}}. \quad (38)$$

Непосредственными вычислениями легко показать, что функции $f(\tau, \mu, \pm\infty)$ и $I(\tau, \mu, \nu)$ при конечных значениях ν образуют систему, биортогональную с весом μ системе функций $f^*(\tau, \mu, \pm\infty)$ и $I^*(\tau, \mu, \nu)$, причем

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \mu f(\tau, \mu, +\infty) f^*(\tau, \mu, +\infty) d\mu = \\ & = - \int_{-1}^1 \mu f(\tau, \mu, -\infty) f^*(\tau, \mu, -\infty) d\mu = - \frac{1}{2(3-x_1)\tau^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Сравнение формул (16) и (39) показывает, что можно формально положить

$$C(+\infty, +\infty) = -C(-\infty, -\infty) = -\frac{1}{2(3-x_1)}. \quad (40)$$

4. Собственные функции, удовлетворяющие заданным условиям в начале координат и на бесконечности. Когда мы решаем задачи о переносе излучения в бесконечной среде, нас обычно интересуют решения, регулярные в начале координат ($\tau = 0$) и стремящиеся к нулю на бесконечности. Функции $I^N(\tau, \mu, \nu)$, определяемые формулой (25), не удовлетворяют условию регулярности при $\tau = 0$, а в случае $\nu < 0$ не стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому для решения граничных задач вместо этих функций удобнее использовать следующие собственные функции:

$$\begin{aligned} f(\tau, \mu, \nu) &= I(\tau, \mu, \nu) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\nu^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) R_n(\nu) K_{n+1/2}(\tau/\nu) \quad (\nu > 0), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} f(\tau, \mu, \nu) &= I(\tau, \mu, \nu) + I(\tau, \mu, -\nu) = \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2\tau\nu^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) P_n(\mu) R_n(\nu) I_{n+1/2}(\tau/\nu) \quad (\nu < 0), \end{aligned} \quad (42)$$

где $I_{n+1/2}(\tau/\nu)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода. Учитывая свойства $K_{n+1/2}(\tau/\nu)$ и $I_{n+1/2}(\tau/\nu)$, легко показать, что функции $f^N(\tau, \mu, \nu)$, приводящие к собственным функциям $f(\tau, \mu, \nu)$ при $N \rightarrow \infty$, экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow \infty$ в случае $\nu > 0$ и регулярны при $\tau = 0$ в случае $\nu < 0$.

В качестве сопряженных следует использовать функции

$$\begin{aligned} f^*(\tau, \mu, \nu) &= I^*(\tau, \mu, \nu) + I^*(\tau, \mu, -\nu) = \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2\tau\nu^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) R_n(\nu) I_{n+1/2}(\tau/\nu) \quad (\nu > 0), \end{aligned} \quad (43)$$

$$f^*(\tau, \mu, \nu) = I^*(\tau, \mu, \nu) = \\ = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi\tau\nu^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) R_n(\nu) K_{n+1/2}(-\tau/\nu) \quad (\nu < 0). \quad (44)$$

Из формул (16) и (41)–(44) следует, что системы функций $f(\tau, \mu, \nu)$ и $f^*(\tau, \mu, \nu)$ связаны условием биортогональности

$$\int_{-1}^1 \mu f(\tau, \mu, \nu) f^*(\tau, \mu, \zeta) d\mu = \frac{C(\nu, \zeta)}{\tau^2}. \quad (45)$$

Отметим, что при $\lambda = 1$ в число функций $f(\tau, \mu, \nu)$ и $f^*(\tau, \mu, \nu)$ следует включать и функции $f(\tau, \mu, \pm\infty)$ и $f^*(\tau, \mu, \pm\infty)$, определяемые формулами (35), (37) и (38).

При решении граничных задач, когда граничное условие задано на поверхности $\tau = \tau_0$, интенсивность излучения $I(\tau, \mu)$ представляется в виде

$$I(\nu, \mu) = \sum_{j=1}^m [c(\tau_0, +\nu_j) f(\tau, \mu, +\nu_j) + c(\tau_0, -\nu_j) f(\tau, \mu, -\nu_j)] + \\ + \int_{-1}^1 c(\tau_0, \nu) f(\tau, \mu, \nu) d\nu, \quad (46)$$

причем функция $c(\tau_0, \nu)$ и величины $c(\tau_0, \pm\nu_j)$ определяются из условий при $\tau = \tau_0$, в начале координат и на бесконечности.

5. *Функции Грина при $0 < \lambda < 1$.* Построим функцию Грина $G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$ для бесконечной однородной среды, освещенной коническими источниками, расположенными на поверхности $\tau = \tau_0$ и излучающими под углом $\arcsos \mu_0$ ($-1 \leq \mu_0 \leq 1$) к направлению радиус-вектора, т. е. решим уравнение

$$\mu \frac{\partial G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)}{\partial \tau} + \frac{1-\mu^2}{\tau} \frac{\partial G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)}{\partial \mu} + G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) - \\ - \frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^N \tau_n P_n(\mu) \int_{-1}^1 P_n(\mu') G(\tau, \mu'; \tau_0, \mu_0) d\mu' = \frac{\delta(\tau - \tau_0) \delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\tau^2}. \quad (47)$$

Интегрируя обе части уравнения (47) по τ в пределах от $\tau_0 - \varepsilon$ до $\tau_0 + \varepsilon$ и устремляя ε к нулю, получим условие разрыва на излучающей поверхности

$$G(\tau_0 + 0, \mu; \tau_0, \mu_0) - G(\tau_0 - 0, \mu; \tau_0, \mu_0) = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\tau_0^2}. \quad (48)$$

Требуя, чтобы функция $G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$ стремилась к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ и была регулярна при $\tau = 0$, представим ее в виде

$$G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = \sum_{j=1}^m c(\tau_0, \mu_0, +v_j) f(\tau, \mu; +v_j) + \\ + \int_0^1 c(\tau_0, \mu_0, v) f(\tau, \mu, v) dv, \quad (\tau > \tau_0) \quad (49)$$

$$G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = - \sum_{j=1}^m c(\tau_0, \mu_0, -v_j) f(\tau, \mu, -v_j) - \\ - \int_{-1}^0 c(\tau_0, \mu_0, v) f(\tau_0, \mu, v) dv, \quad (\tau < \tau_0) \quad (50)$$

причем слагаемые в сумме по j в правой части формулы (47) будем располагать в порядке убывания величин $|v_j|$.

Подставляя (49)—(50) в (48), перепишем условие разрыва функции Грина на поверхности $\tau = \tau_0$ в форме

$$\sum_{j=1}^m [c(\tau_0, \mu_0, +v_j) f(\tau_0, \mu, +v_j) + c(\tau_0, \mu_0, -v_j) f(\tau_0, \mu, -v_j)] + \\ + \int_{-1}^1 c(\tau_0, \mu_0, v) f(\tau_0, \mu, v) dv = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\tau_0^2\mu}. \quad (51)$$

Используя условие (45) и формулу (24), из уравнения (51) находим, что при конечных значениях v

$$c(\tau_0, \mu_0, \pm v) = \mp \frac{v^2}{2\pi N(v)} f^*(\tau_0, \mu_0, \pm v). \quad (52)$$

Подстановка (52) в (49) и (50) дает искомые выражения для функции Грина при $0 < \lambda < 1$:

$$G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{v_j^2}{N(v_j)} f^*(\tau_0, \mu_0, +v_j) f(\tau, \mu, +v_j) - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{v^2}{N(v)} f^*(\tau_0, \mu_0, v) f(\tau, \mu, v) dv, \quad (\tau > \tau_0), \quad (53)$$

$$G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{\nu_j^2}{N(\nu_j)} f^*(\tau_0, \mu_0, -\nu_j) f(\tau, \mu, -\nu_j) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 \frac{\nu^2}{N(\nu)} f^*(\tau_0, \mu_0, \nu) f(\tau, \mu, \nu) d\nu \quad (\tau < \tau_0). \quad (54)$$

Найдем теперь функцию Грина

$$G(\tau, \mu; \tau_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) d\mu_0 \quad (55)$$

для бесконечной однородной среды, освещенной изотропными точечными источниками, равномерно распределенными на поверхности $\tau = \tau_0$. Из формул (53)—(55) при учете (41) и (42) следует, что

$$G(\tau, \mu; \tau_0) = \frac{1}{2\pi\tau_0} \sum_{j=1}^m \frac{\nu_j}{N(\nu_j)} f(\tau, \mu; +\nu_j) \operatorname{sh} \frac{\tau_0}{\nu_j} + \\ + \frac{1}{2\pi\tau_0} \int_0^1 \frac{\nu}{N(\nu)} f(\tau, \mu, \nu) \operatorname{sh} \frac{\tau_0}{\nu} d\nu, \quad (\tau > \tau_0) \quad (56)$$

$$G(\tau, \mu; \tau_0) = -\frac{1}{4\pi\tau_0} \sum_{j=1}^m \frac{\nu_j}{N(\nu_j)} f(\tau, \mu, -\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} - \\ - \frac{1}{4\pi\tau_0} \int_{-1}^0 \frac{\nu}{N(\nu)} f(\tau, \mu, \nu) e^{\tau_0/\nu} d\nu \quad (\tau < \tau_0). \quad (57)$$

Устремляя в (56) τ_0 к нулю, находим функцию Грина $G(\tau, \mu, 0)$ для бесконечной однородной среды, освещенной изотропным точечным источником, расположенным в начале координат:

$$G(\tau, \mu; 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{f(\tau, \mu, +\nu_j)}{N(\nu_j)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{f(\tau, \mu, \nu)}{N(\nu)} d\nu. \quad (58)$$

Формулы, аналогичные (53)—(54), (56)—(58) для случая изотропного рассеяния были получены ранее Н. И. Лалетиним [4].

Умножая выражения для функций Грина на $P_n(\mu)$, интегрируя по μ в пределах от -1 до 1 и используя (41) и (42), легко получить формулы для угловых моментов этих функций. В частности

$$G_n(\tau, 0) = \int_{-1}^1 G(\tau, \mu, 0) P_n(\mu) d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{r_n(\tau, \nu_j)}{\nu_j N(\nu_j)} e^{-\tau/\nu_j} + \int_0^1 \frac{r_n(\tau, \nu)}{\nu N(\nu)} e^{-\tau/\nu} d\nu, \right. \quad (59)$$

где величины $r_n(\tau, \nu)$ определяются формулой (9). Умножая это выражение на величину $\frac{\lambda L \alpha^2}{8\pi}$, где L — мощность точечного источника, получим формулу для коэффициентов $S_n(\tau)$ разложения функции источников $S(\tau, \mu)$ по полиномам Лежандра, найденную автором ранее [11] другим методом.

6. *Функции Грина при $\lambda = 1$.* При $\lambda = 1$, когда $\nu_{\pm 1} = \pm \infty$, в формулах (53) — (54), (56) — (58) для функций Грина, а также в формуле (59) следует изменить вид первых слагаемых ($j = 1$) в суммах по индексу j . Обозначим эти слагаемые в выражениях для $G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$, $G(\tau, \mu; \tau_0)$, $G(\tau, \mu; 0)$ и $G_n(\tau, 0)$ соответственно через $g(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$, $g(\tau, \mu; \tau_0)$, $g(\tau, \mu; 0)$ и $g_n(\tau, 0)$. Найдем эти величины.

Из условия (51) при учете свойства (39) собственных функций и выражений (35), (37), (38), получаем

$$g(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = g(\tau, \mu; \tau_0) = g(\tau, \mu; 0) = \frac{3-x_1}{2\pi} f(\tau, \mu, +\infty) \quad (\tau > \tau_0), \quad (60)$$

$$g(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = -\frac{3-x_1}{2\pi} f^*(\tau_0, \mu_0, -\infty), \quad (61)$$

$$g(\tau, \mu; \tau_0) = \frac{3-x_1}{4\pi\tau_0} \quad (\tau < \tau_0).$$

Умножая выражение (60) для $g(\tau, \mu, 0)$ на $P_n(\mu)$ и интегрируя по μ в пределах от -1 до 1 , находим:

$$g_n(\tau, 0) = \frac{3-x_1}{2\pi} \frac{n!}{(2n+1)\beta_n} \frac{1}{\tau^{n+1}}. \quad (62)$$

7. *Асимптотические формулы.* Из формул (35), (38), (41) — (44) следуют асимптотические выражения, справедливые при $\tau \gg 1$:

$$f(\tau, \mu, \nu) = f^*(\tau, -\mu, -\nu) \sim \frac{i_0(\mu, \nu)}{\tau \nu} e^{-\tau/\nu}, \quad \nu > 0, \quad \tau \gg 1, \quad (63)$$

$$f(\tau, \mu, -\nu) = f^*(\tau, -\mu, \nu) \sim -\frac{1}{\tau\nu} [i_0(-\mu, \nu) - i_0(\mu, \nu) e^{-2\tau/\nu}] e^{-1/\nu}, \quad (64)$$

$$\nu > 0, \quad \tau \gg 1,$$

$$f(\tau, \mu, +\infty) = -f^*(\tau, \mu, -\infty) \sim \frac{1}{2\tau}, \quad \tau \gg 1. \quad (65)$$

Так же, как и в случае изотропного рассеяния (см. [12], гл. 5), легко доказать, что при $\tau \gg 1$ поведение функций $G(\tau, \mu; 0)$ и $G_n(\tau, 0)$ определяется внеинтегральными членами, соответствующими наибольшим собственным значениям $\nu_1 = 1/k$. Учитывая (63)–(65), из формул (58), (59), (60) и (62) находим:

$$G(\tau, \mu, 0) \sim \frac{\lambda k i(\mu)}{4\pi N(1/k)} \frac{e^{-k\tau}}{\tau}, \quad \tau \gg 1, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (66)$$

$$G(\tau, \mu, 0) \sim \frac{3-x_1}{4\pi\tau}, \quad \tau \gg 1, \quad \lambda = 1, \quad (67)$$

$$G_n(\tau, 0) \sim \frac{k R_n(1/k)}{2\pi N(1/k)} \frac{e^{-k\tau}}{\tau}, \quad \tau \gg 1, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (68)$$

$$G_n(\tau, 0) \sim \frac{3-x_1}{2\pi} \frac{n!}{(2n+1)\beta_n} \frac{1}{\tau^{n+1}}, \quad \tau \gg 1, \quad \lambda = 1. \quad (69)$$

В формуле (66) $i(\mu) = (2/\lambda) i_0(\mu, 1/k)$ — функция, описывающая угловое распределение интенсивности излучения в глубоких слоях полубесконечной плоской среды, граничная поверхность которой освещена параллельными лучами (см. [2], гл. 2).

Умножая выражения (66) и (67) на $L\alpha^2/4\pi$, а (68) и (69) — на $\lambda L\alpha^2/8\pi$, получим асимптотические формулы соответственно для интенсивности излучения $I(\tau, \mu)$ и величин $S_n(\tau)$, выполняющиеся вдали от точечного источника. Для случая $\lambda < 1$ эти формулы были получены автором в работе [11].

В дальнейшем автор предполагает исследовать перенос излучения в шаре конечного оптического радиуса и в сферической оболочке.

Ленинградский государственный
университет

THE GREEN'S FUNCTIONS FOR EQUATION OF RADIATIVE TRANSFER IN AN INFINITE HOMOGENEOUS MEDIUM WITH A RADIAL DISTRIBUTION OF THE SOURCES

A. K. KOLESOV

The homogeneous equation of radiative transfer in an anisotropically scattering spherical medium is solved. The complete set of singular eigenfunctions of this equation is found. A full-range orthogonality relation for these eigenfunctions is obtained. It is shown that the eigenvalues of the radiative transfer equation for spherical and plane geometries is the same. The Green's functions of spherically symmetric problems for a homogeneous infinite spherical medium are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.
2. В. В. Соболев, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
3. Д. Белл, С. Глестон, Теория ядерных реакторов, Атомиздат, М., 1974.
4. Н. И. Лалетин, в сб. «Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов», Атомиздат, М., 1974, стр. 155.
5. Ю. И. Ершов, С. Б. Шихов, Методы решения краевых задач теории переноса, Атомиздат, М., 1977.
6. Г. И. Марчук, В. И. Лебедев, Численные методы в теории переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1971.
7. Н. И. Лалетин, Атомная энергия, 20, 509, 1969.
8. T. F. Nonnenmacher, Nukleonik, 10, 275, 1967.
9. K. M. Case, R. Zelazny, M. Kanai, J. Math. Phys., 11, 223, 1970.
10. S. Uno, H. Kagiwada, R. Kalaba, J. Math. Phys., 12, 1279, 1971.
11. А. К. Колесов, ДАН, СССР, 272, 53, 1983.
12. К. Кейз, П. Цвейфель, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
13. K. M. Case, Ann. Phys., 9, 1, 1960.
14. J. R. Mika, Nucl. Sci. Eng., 11, 415, 1961.
15. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев, Обобщенные функции, вып. 1, Физматгиз, М., 1958.