АСТРОФИЗИКА

ТОМ 19 НОЯБРЬ, 1983 ВЫПУСК 4

УДК 52—65—726

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

Л. С. КУЗЬМЕНКОВ, П. А. ПОЛЯКОВ

Поступила 21 сентября 1982
Принята к печати 4 августа 1983

Найдены дисперсия и декременты затухания (инкременты неустойчивости) для волн в релятивистской плазме в ряде новых асимптотических пределах. Обнаружены циклотронные колебания на частоте $\omega \sim \omega_B mc^2/T$.

Согласно современным астрофизическим представлениям магнитосфера пульсара представляет собой электрон-позитронную плазму. Распределение электронов и позитронов по скоростям в магнитном поле пульсара является сильно анизотропным и в пределе может рассматриваться как одномерное [1—3]. Физическкй механизм «высвечивания» поперечных степеней свободы частиц неоднократно обсуждался в литературе (см., например, [2, 3]). Математическое обоснование таких распределений можно получить на основании бесстолкновительного релятивистского кинетического уравнения, учитывающего радиационное торможение частиц во внешнем магнитном поле [4, 5]. Чтобы не иметь дела с громоздкими выражениями мы рассмотрим эволюцию невозмущенной функции распределения с момента, когда продольная и поперечная скорости электрона связаны условием $v_\perp^2 \ll v_\parallel^2$. В этом случае выражение для трехмерной силы торможения излучением [6, стр. 274] значительно упрощается, и мы приходим к кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{B}]\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \frac{\varkappa}{c^2}\frac{\partial}{\partial \vec{p}}(\vec{v}_\perp f),$$

где $\varkappa = 2e^4B^2/3m^2c^3$.

Общее решение этого уравнения, обеспечивающее отсутствие макроскопических токов, имеет вид

$$f(t, \vec{p}_\parallel, \vec{p}_\perp) = e^{\frac{2\varkappa}{\varepsilon_\parallel}t} f\left(p_\perp^2 e^{\frac{2\varkappa}{\varepsilon_\perp}t}, p_\parallel^2\right)$$

$$(\varepsilon_{\parallel}^2 = m^2c^4 + p_{\parallel}^2 c^2).$$

Если начальное распределение по поперечным импульсам было максвелловским, то

$$f(t, \vec{p}_{\parallel}, \vec{p}_{\perp}) = f(p_{\parallel}) \frac{1}{4\pi T_{\perp}(t)} \exp\left\{-\frac{p_{\perp}^2}{T_{\perp}(t)}\right\}. \qquad (1)$$

Из полученного решения следует, что поперечная температура убывает по закону $T_{\perp} = T_0 \exp(-t/\tau)$ с характерным временем $\tau = 3m^2c^3\varepsilon_{\parallel}/4e^4B^2$, тем меньшим, чем больше плотность энергии магнитного поля. Для малых τ функция распределения по поперечным импульсам (1), или любая другая колоколообразная функция, быстро вырождается в дельта-функцию, и мы получаем одномерное распределение.

Проблема распространения и возбуждения волн в такой плазме в связи с астрофизическими приложениями рассматривалась в работах [7—11]. Одной из центральных проблем, связанной с механизмом турбулентности пульсарной плазмы, является, как указывалось в работе [7], проблема выявления и иерархии неустойчивостей. Эта проблема приобретает особый интерес в связи с тем, что циклотронная раскачка альвеновских волн в электрон-позитронной плазме невозможна [7].

Однако наряду с этим важным физическим фактом справедливо также утверждение, что циклотронная раскачка волн в электрон-позитронной плазме существует на более высокой релятивистской циклотронной частоте $eB/(T/c)$. Инкременты такой неустойчивости вычислены ниже.

Рассмотрим сначала электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Дисперсионное уравнение для таких волн имеет вид [7]

$$1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2c^2} \int\limits_L \left[1 \mp \frac{\Omega}{\omega u_0 - kcu \pm \Omega}\right] f_0(u) \frac{du}{u_0} = 0, \qquad (2)$$

где ω_p, Ω — плазменная и циклотронная частоты, $u^k = p_{\parallel}^k/mc$, верхний знак относится к волнам с левой круговой поляризацией, а нижний — к волнам с правой круговой поляризацией, суммирование относится к электронной и позитронной компонентам.

Распределение по продольным импульсам можно выбрать максвелловским

$$f_0 = \exp(-\alpha u^0)/K_1(\alpha),$$

где $K_n(\alpha)$ — функция Макдональда, $\alpha = mc^2/T$. К максвелловскому распределению, согласно [12, 13], с течением времени стремится любое распределение при малых отклонениях от равновесия. Тогда в ультрарелятивистском пределе ($\alpha \ll 1$) уравнение (2) можно представить в виде аналитического выражения, содержащего интегральную показательную функцию комплексного аргумента $Ei(x)$:

$$1-\sum\frac{\omega_p^2}{\omega^2-k^2c^2}\,\frac{1}{K_1(\alpha)}\left\{K_0(\alpha)\mp\frac{\Omega}{(\omega^2-k^2c^2)(a^+-a^-)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[J(a^+)-J(a^-)\right]\right\}=0, \qquad (3)$$

где введены обозначения

$$J(z)=(\omega z+\Omega)e^{\mp\alpha z}\left\{\frac{\ln(\sqrt{z^2-1}\mp z)}{\sqrt{z^2-1}}\mp\frac{1}{z}\ln(\mp 2z)\mp\right.$$

$$\left.\mp 1/z\,[Ei(\pm\alpha z)+K_0(\alpha)e^{\pm\alpha z}]\mp\theta(\mp\operatorname{Im}z)\theta(\pm\operatorname{Re}z-1)\frac{2\pi i}{\sqrt{z^2-1}}\right\}, \qquad (4)$$

$$a^{\pm}=[\omega\Omega\mp kc(\Omega^2+k^2c^2-\omega^2)^{1/2}]/(k^2c^2-\omega^2). \qquad (5)$$

Решение уравнения (3) в длинноволновой области $kc\ll\Omega$ и области низких частот $\omega\ll\Omega$ описывает дисперсию альвеновских мод [7]. Эти моды являются затухающими с декрементом, равным при $2\omega_p^2\ll\alpha\Omega$

$$\gamma=-(\pi\alpha\omega_p^2/2kc)\exp(-\alpha\Omega/2kc).$$

Геликоидальные моды могут существовать только при разных температурах электронов и позитронов. В частности, при $\alpha_e\gg\alpha_i$ и $kc\ll\Omega$, $-\omega_0\alpha_i\ln\alpha_i\ll\omega\ll\Omega$ из (3), (4) находим

$$\omega=k^2c^2\Omega/\omega_p^2,$$

$$\gamma=-(\pi/2)\alpha_e\exp(-\alpha_e\Omega/kc).$$

Неустойчивыми могут оказаться только волны с правой круговой поляризацией. Если фазовая скорость таких волн близка к скорости света:

$$\alpha\omega_p^2\gg|\omega^2-k^2c^2|,\quad \alpha\Omega\gg|\omega-kc|,$$

действительная часть дисперсионного уравнения имеет решение

$$\omega=0.57\,\alpha\Omega. \qquad (6)$$

При условии $(\omega_p^2/\alpha)\ll\Omega^2$ мнимая часть комплексной частоты мала и положительна:

$$\gamma = (3\pi\omega_p^2/2\alpha\Omega^2)(0.88)^2 \exp(-0.88)\,\omega.$$

Это и свидетельствует о раскачке поперечных волн с правой круговой поляризацией на частоте (6).

Интересно отметить, что для значений плотности магнитосферы $\sim 10^8$ см$^{-3}$, магнитного поля $\sim 10^{12}$ Гс и температур $\alpha \sim 0.1$ частота усиливающихся в плазме волн лежит в радиодиапазоне $\omega \sim 10^8$ с$^{-1}$, что соответствует наблюдаемым частотам для большинства радиопульсаров [1]. Раскачка волн для данных значений параметров происходит с большим инкрементом $\gamma \sim 10^7$ с$^{-1}$.

Аналогичным путем могут быть рассмотрены волны, распространяющиеся поперек магнитного поля. В этом случае дисперсионные уравнения могут быть представлены в виде

$$1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int_L \left[1 + \frac{a^2}{u_0^2 - a^2}\right] f_0(u)\, \frac{du}{u_0} = 0, \tag{7}$$

$$1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2c^2} \int_L \left[1 + \frac{a^2}{u_0^2 - a^2}\right] f_0(u)\, \frac{du}{u_0} = 0, \tag{8}$$

$$1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2c^2} \int_L \left[\frac{1}{u_0} + \frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{a^2 - 1}{u_0^2 - a^2}\right)\right] f_0(u)\, \frac{du}{u_0} = 0, \tag{9}$$

соответственно для волн с продольной поляризацией, с поляризацией, перпендикулярной волновому вектору и магнитному полю, и с поляризацией вдоль магнитного поля. Каждое из дисперсионных уравнений содержит нетривиальную зависимость от частоты и волнового вектора через интеграл

$$J_1(a) \equiv K_1(\alpha) \int_L \frac{a^2}{u_0^2 - a^2} f_0(u)\, \frac{du}{u_0},$$

который для максвелловского распределения по продольным импульсам и в пределе ультрарелятивистских температур точно так же, как и в интеграле (4) может быть представлен в виде

$$J_1(a) = \frac{a}{2}\left\{ e^{-\alpha a}\left(\frac{\ln(\sqrt{a^2-1} - a)}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{1}{a}\left[Ei(\alpha a) + K_0(\alpha)\, e^{\alpha a} - \ln(-2a)\right]\right) - e^{\alpha a}\left(\frac{\ln(\sqrt{a^2-1} + a)}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{1}{a}\left[\mathrm{Ei}(-\alpha a) + K_0(\alpha)\, e^{-\alpha a} - \ln(2a)\right]\right)\right\} + i\pi \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\, \theta(-\operatorname{Im} a)\, \theta(\operatorname{Re} a - 1)\, e^{-\alpha a}. \tag{10}$$

Дисперсионные уравнения (7)—(9) в этом пределе имеют вид

$$\omega^2 = 2\alpha\omega_p^2[K_0(\alpha) + J_1(a)], \tag{11}$$

$$\omega^2 = k^2c^2 + 2\alpha\omega_p^2[K_0(\alpha) + J_1(a)], \tag{12}$$

$$\omega^2 = k^2c^2 + 2\alpha\omega_p^2\left[1 + \frac{k^2c^2}{\omega^2}\,\frac{a^2-1}{a^2}\,J_1(a)\right]. \tag{13}$$

Проанализируем эти уравнения в наиболее важных физических случаях. Для этого заметим, что при $|\alpha a| \ll 1$ (10) можно упростить, так что

$$J_1(a) = \frac{a}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2-1}-a}{\sqrt{a^2-1}+a}\right) + \frac{i\pi a e^{-\alpha a}}{\sqrt{a^2-1}}\,\theta(-\operatorname{Im} a)\,\theta(\operatorname{Re} a - 1). \tag{14}$$

Если при этом частота ленгмюровских колебаний больше циклотронной, то $|J(a)| \ll K_0(\alpha)$, и дисперсия таких волн в соответствии с (11) определяется формулой

$$\omega^2 = 2\alpha\omega_p^2\left[K_0(\alpha) + \frac{b}{2\sqrt{b^2-1}}\ln\frac{\sqrt{b^2-1}-b}{\sqrt{b^2-1}+b}\right], \tag{15}$$

где $b = \Omega\,(2\alpha\omega_p^2 K_0(\alpha))^{-1/2}$.

Решение (15) соответствует случаю слабых магнитных полей и плотной плазмы

$$\Omega^2/2\alpha\omega_p^2 K_0(\alpha) < 1. \tag{16}$$

Для знака «много меньше» в (16) частота колебаний не зависит от магнитного поля и совпадает с частотой ленгмюровских колебаний в свободной плазме [5].

В том случае, если частота колебаний меньше циклотронной частоты, выражение (10) принимает вид

$$J_1(a) = -\frac{1}{2}\operatorname{Ei}(\alpha a)\,e^{-\alpha a} - \frac{1}{2}\operatorname{Ei}(-\alpha a)\,e^{\alpha a} - K_0(\alpha) +$$
$$+ i\pi\theta(-\operatorname{Im} a)\,\theta(\operatorname{Re} a - 1)\exp(-\alpha a). \tag{17}$$

Отсюда и из дисперсионного уравнения для ленгмюровских волн (11) видно, что колебания с малой мнимой частью частоты могут существовать лишь при условии, если либо $|\alpha a| \gg 1$, либо $|\alpha a| \ll 1$. В первом случае решение дисперсионного уравнения (11) не существует. Во втором случае имеем

$$\omega^2 = 2\alpha\omega_p^2[-\ln(\alpha a) + i3\pi/2],$$

или, отделяя мнимую и действительную части,

$$\omega^2 = 2\alpha\omega_p^2 \ln\frac{\omega}{\alpha\Omega}; \qquad \gamma = \frac{\omega}{\ln(\omega/\alpha\Omega)}\,\frac{3}{2}\,\pi.$$

Отсюда видно, что колебания в этом случае являются неустойчивыми.

Неустойчивыми оказываются также электромагнитные волны с поляризацией, перпендикулярной магнитному полю и направлениию распространения, если частота волн значительно меньше циклотронной и $|\alpha a| \ll 1$. Действительно, для таких волн из (12), (17) находим

$$\omega^2 = k^2c^2 - 2\alpha\omega_p^2 \ln(\alpha\Omega/\omega),$$

$$\gamma = +\frac{3\pi\alpha\omega_p^2 \ln(\alpha\Omega/\omega)}{2\omega} > 0.$$

Для сильных магнитных полей $(\alpha\Omega \gg \omega)$ из дисперсионного уравнения (12) с учетом разложения интегральной показательной функции при больших значениях аргумента [14] находим

$$\omega = kc\,(1 + 2\omega_p^2/\alpha\Omega^2)^{1/2}.$$

Этой формулой представлена дисперсия альвеновской волны, распространяющейся перпендикулярно магнитному полю в одномерной электрон-позитронной плазме.

Как и для электромагнитных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, дисперсионное уравнение (12) имеет решение на релятивистской циклотронной частоте $\omega \sim kc \sim \alpha\Omega$. Реальная часть уравнения (12) при $|a| \gg 1$ имеет решение $\omega = \alpha\Omega/0.88$, мнимая часть частоты для сильных магнитных полей $\Omega^2 \gg 2\omega_p^2/\alpha$ равна

$$\gamma = 0.88\,\pi\omega_p^2 \exp(-0.88)/\Omega.$$

Видно, что снова электромагнитные волны на релятивистской циклотронной частоте оказываются неустойчивыми.

Наконец рассмотрим электромагнитные волны с поляризацией, направленной вдоль магнитного поля (13). Если поле является достаточно слабым $|a| \ll 1$, то $J_1(a) = -1$. Дисперсия таких волн определяется формулой

$$\omega^2 = k^2c^2(1 + 2\alpha\omega_p^2/\Omega^2) + 2\alpha\omega_p^2.$$

В сильном поле, $|\alpha a| \gg 1$

$$\omega^2 = k^2c^2(1 - 2\omega_p^2/\alpha\Omega^2) + 2\alpha\omega_p^2.$$

Отсюда следует, что при $\alpha\Omega^2 < 2\omega_p^2$ и $|k^2c^2(1-2\omega_p^2/\alpha\Omega^2|) > 2\alpha\omega_p^2$ возникает неустойчивость таких волн.

Таким образом, мы исследовали наиболее важные колебательные и неустойчивые моды в электрон-позитронной плазме магнитосферы пульсара.

Волны в релятивистской магнитоактивной плазме рассматривались также и в рамках релятивистской гидродинамики (см., например, [10, 11]). Согласие полученных выше результатов с результатами гидродинамики можно считать удовлетворительными в длинноволновой области спектра, с той лишь особенностью, что в пределе ультрарелятивистских температур релятивистская гидродинамика дает неправильное значение релятивистской плазменной частоты, $(1/4)\,\omega_p^2\alpha$ вместо $(1/3)\,\omega_p^2\alpha$. Причина такой расходимости в результатах обсуждена в работе [15] и состоит в отсутствии локального равновесия плазмы во всех системах отсчета при распространении в ней волн.

Московский государственный
университет

PROPAGATION OF WAVES IN ONE — DIMENSIONAL RELATIVISTIC ELECTRON-POSITRON PLASMA

L. S. KYZ'MENKOV, P. A. POLJAKOV

Dispersion formulae and damping decrement for waves in a magneto — active relativistic one — dimensional plasma are found. In particular, relativistic cyclotronic waves are discovered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *V. L. Ginsburg, V. V. Zheleznyakov*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 13, 511, 1975.
2. *С. А. Каплан, В. Н. Цытович*, Астрофизика, 8, 441, 1972.
3. *M. A. Ryderman, P. G. Sutherland*, Ap. J., 196, 51, 1975,
4. *Л. С. Кузьменков*, ДАН СССР, 241, 322, 1978.
5. *Л. С. Кузьменков, П. А. Поляков*, ЖЭТФ, 82, 139, 1982.
6. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1967.
7. *А. Б. Михайловский*, Письма АЖ, 5, 604, 1979.
8. *Е. В. Суворов, Ю. В. Чугунов*, Астрофизика, 11, 305, 1975.
9. *О. Г. Онищенко*, Препринт ИКИ АН СССР, № 518, 1979.
10. *S. Hyun, C. F. Kennel*, J. Plasma Phys., 20, 281, 1978.
11. *J. Sakai, T. Kawata*, Res. Rept. Inst. Plasma Phys. Nagoya Univ., No. 450, 1980,
12. *A. Lenard*, Ann. Phys. (N. Y.), 10, 390, 1960.
13. *R. Hakim*, J. Math. Phys., 8, 1315, 1967.
14. *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш*, Специальные функции, Наука, М., 1968.
15. *Л. С. Кузьменков, П. А. Поляков, П. Б. Подосёнов*, Вестн. МГУ, сер. 3, физика, астрономия, 23, 12, 1982.