АСТРОФИЗИКА

ТОМ 19 НОЯБРЬ, 1983 ВЫПУСК 4

УДК 52—55

РАВНОВЕСИЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ШАРА И ДИСКА

З. Я. ТУРАКУЛОВ

Поступила 28 октября 1982
Принята к печати 4 августа 1983

Получены самосогласованные решения кинетического уравнения в собственном поле тяжести, зависящие от интегралов движения: энергии и углового момента. Для шара и диска построены однопараметрические семейства точных решений в случаях, когда гравитационный потенциал $\Psi(r)$ удовлетворяет следующим двум условиям: $\Psi(r)$ — монотонная функция и известна функция $r(\Psi)$, обратная к $\Psi(r)$. Параметр решения характеризует анизотропность функции распределения в импульсном пространстве. Определена область значений этого параметра, соответствующая положительно-определенным функциям распределения.

1. *Введение.* Построение моделей галактик приводит к постановке задачи о нахождении равновесных состояний бесстолкновительных гравитирующих систем. Решение этой задачи составляют следующие три функции: пространственная или поверхностная плотность числа частиц системы $n(\vec{r})$, соответствующий ей гравитационный потенциал $\Psi(\vec{r})$ и функция распределения частиц $f(\vec{p}, \vec{r})$. Предполагается, что каждая частица системы движется в гравитационном потенциале $\Psi(\vec{r})$, не испытывая столкновений с другими частицами, поэтому функция распределения удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению

$$\frac{df}{dt} = \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

решением которого является произвольная функция интегралов движения частиц в потенциале $\Psi(\vec{r})$ [1—6]. Функция распределения и плотность числа частиц связаны соотношением

$$n(\vec{r}) = \int d\vec{p}\, f(\vec{p}, \vec{r});$$

связь между $\Psi(\vec{r})$ и $n(\vec{r})$ задана уравнением Пуассона

$$\Delta\Psi(\vec{r}) = 4\pi G m n(\vec{r}),$$

где m — масса частиц, а G — гравитационная постоянная.

Известны два существенно различных метода решения этой задачи [2]. Первый состоит в том, чтобы по заданной функции распределения f после интегрирования по импульсам найти две остальные функции. При этом интегрирование ведется только в некоторой области импульсного пространства, определяемой для каждой точки системы условием невылетания частиц за пределы системы, т. е. значением $\Psi(\vec{r})$ в данной точке. Поэтому результат интегрирования не зависит явно от $\vec{r}$ и является функцией $\Psi(\vec{r})$. Окончательно решение можно найти только решив нелинейное уравнение

$$\Delta\Psi(\vec{r}) = 4\pi G m n(\Psi(\vec{r}))$$

[1, 2]. Второй метод состоит в следующем. Задав $n(r)$ и соответствующий ей $\Psi(r)$ таким образом, чтобы была известна функция $r(\Psi)$, обратная к $\Psi(r)$ (здесь r — это сферический или цилиндрический радиус, расстояние от центра шара или диска), можно найти функцию распределения, как решение интегрального уравнения

$$n(r(\Psi)) = \int d\vec{p} f.$$

Этот метод был применен Эддингтоном [3] для нахождения равновесных состояний сферически-симметричных бесстолкновительных гравитирующих систем.

В настоящей работе показано, что второй из перечисленных методов позволяет получить непрерывные семейства точных решений для произвольных $n(r)$ и $\Psi(r)$, если функция $r(\Psi)$ известна. Построены наиболее простые семейства с функциями распределения вида $f(2mE - \gamma M^2 a^{-2} - 2m^2\Psi(a))$, где M — угловой момент частицы, E — энергия частиц; a — радиус системы, γ — параметр.

2. *Условие невылетания.* Ниже рассматриваются равновесные состояния бесстолкновительных гравитирующих систем двух видов: имеющих форму шара и бесконечно-тонкого круглого диска. Предполагается, что первые из них имеют сферическую симметрию, а вторые, в которых рассматривается только двумерное движение частиц, симметрию относительно вращений в плоскости диска вокруг его центра. Известны следующие

интегралы движения частиц в этих системах: энергия E, полный угловой момент M и для шара — некоторая компонента углового момента M_z, полностью характеризующие траекторию частицы с точностью до конечного вращения. Интегралы движения E и M позволяют выразить квадрат радиальной компоненты скорости частицы $\dot{r}$ как функцию координаты r:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - m\Psi(r) - \frac{M^2}{2mr^2}.$$

Если все частицы системы содержатся в области $r \leqslant a$, где сфера (или окружность) $r = a$ определяют границу системы, то для них выполняется неравенство

$$E - m\Psi(a) - \frac{M^2}{2ma^2} \leqslant 0.$$

Равенство имеет место только для частиц, достигающих границы системы. Это неравенство сопоставляет каждому значению r некоторую область в импульсном пространстве, в которой содержатся импульсы всех частиц, траектории которых не пересекают границы системы:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + m\Psi(r) - m\Psi(a) - \frac{M^2}{2ma^2} \leqslant 0.$$

Далее всюду будет использоваться смещенный потенциал $V(r)$, определенный формулой

$$V(r) = \Psi(r) - \Psi(a) \leqslant 0,$$

так что условие невылетания можно записать в виде

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + mV(r) - \frac{M^2}{2ma^2} \leqslant 0. \tag{1}$$

3. *Импульсное пространство и интегрирование в нем.* В каждой точке системы можно определить импульсное пространство со своим локальным декартовым базисом: для шара — $\{p_r, p_\theta, p_\varphi\}$

$$p_r = m\dot{r}; \quad p_\theta = r^{-1}\sqrt{M^2 - \sin^{-2}\theta M_z^2}; \quad p_\varphi = (r\sin\theta)^{-1}M_z,$$

а для диска — $\{p_r, p_\varphi\}$

$$p_r = m\dot{r}; \qquad p_\varphi = r^{-1}M.$$

Элемент импульсного пространства можно записать в виде

$$d^3p = dp_r dp_\theta dp_\varphi; \quad d^2p = dp_r dp_\varphi.$$

Условие невылетания (1), записанное в этом базисе, имеет вид для шара

$$p_r^2+(1-r^2/a^2)(p_\theta^2+p_\varphi^2)\leqslant-2m^2V(r),$$

а для диска

$$p_r^2+(1-r^2/a^2)\,p_\varphi^2\leqslant-2m^2V(r).$$

Область в импульсном пространстве, ограниченная этим условием, представляет собой сфероид (для диска—эллипс), сжатый в локальном направлении p_r. Его полуосями являются

$$\sqrt{-2m^2V(r)}\quad\text{и}\quad\sqrt{-2m^2V(r)(1-r^2/a^2)}\,.$$

в радиальном и угловом направлениях соответственно.

Интегрирование функции распределения по импульсам будет проводиться только в этой области или в некоторой ее части, т. к. вне ее функция распределения равна нулю. Ограничиться при интегрировании частью этой области можно, например, задав знак p_φ или определив ее условием

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+mV(r)+\frac{M^2}{2mr^2}-\frac{\gamma M^2}{2ma^2}\leqslant 0, \tag{2}$$

не противоречащим условию (1) для $\gamma\leqslant 1$. Это означает, что область (2) принадлежит области (1). Она также представляет собой сфероид (эллипс), но его полуоси в радиальном и угловом направлениях равны, очевидно, $\sqrt{-2m^2V(r)}$ и $\sqrt{-2m^2V(r)(1-\gamma r^2/a^2)^{-1}}$ соответственно. Для шара можно ввести еще один параметр и рассматривать вместо сфероида трехосный эллипсоид, однако эта возможность будет в дальнейшем опущена.

Итак, область интегрирования по импульсам ограничена для шара сфероидом

$$p_r^2+(1-\gamma r^2/a^2)(p_\theta^2+p_\varphi^2)\leqslant-2m^2V(r),$$

а для диска—эллипсом

$$p_r^2+(1-\gamma r^2/a^2)\,p_\varphi^2\leqslant-2m^2V(r).$$

Прежде чем интегрировать функцию распределения в этой области, удобно отобразить ее в шар (круг), введя в импульсных пространствах новые координаты

$$P_r=p_r;\quad P_\perp=p_\perp\sqrt{1-\gamma r^2/a^2}\,,$$

где $p_\perp$ и $P_\perp$ означает соответственно старую и новую поперечную к p_r компоненту импульса. Меры интегрирования для шара и диска теперь выглядят так:

$$d^3p = dP_r\, dP_\theta\, dP_\varphi (1-\gamma r^2/a^2)^{-1};\quad P_r^2+P_\theta^2+P_\varphi^2 \leqslant -2m^2V(r);$$

$$d^2p = dP_r\, dP_\varphi (1-\gamma r^2/a^2)^{-1/2};\quad P_r^2+P_\varphi^2 \leqslant -2m^2V(r).$$

Поскольку интегрирование в шаре и в круге удобнее проводить в полярных координатах, которые можно определить следующим образом: для шара

$$P = \sqrt{P_r^2+P_\theta^2+P_\varphi^2};\qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{P_\theta^2+P_\varphi^2}}{P_r};\qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{P_\varphi}{P_\theta},$$

а для диска

$$P = \sqrt{P_r^2+P_\varphi^2};\quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{P_\varphi}{P_r},$$

удобнее и функцию распределения искать в виде $f(P^2+2m^2V(r))$, т. к. $P^2+2m^2V(r)$ является интегралом движения:

$$P^2+2m^2V(r) = 2mE - \frac{\gamma M^2}{a^2} - 2m^2\Psi(a),$$

в то время как α и β интегралами движения не являются. Мера интегрирования по импульсам теперь следующая: для шара

$$d^3p = \frac{dPP^2d\alpha\sin\alpha\, d\beta}{1-\gamma r^2/a^2},\quad 0\leqslant P\leqslant\sqrt{-2m^2V(r)};\ 0\leqslant\alpha\leqslant\pi;\ 0\leqslant\beta<2\pi,$$

а для диска

$$d^2p = \frac{dPPd\alpha}{\sqrt{1-\gamma r^2/a^2}},\qquad 0\leqslant P\leqslant\sqrt{-2m^2V(r)};\quad 0\leqslant\alpha<2\pi.$$

4. *Плотность числа частиц*. Плотность числа частиц $n(r)$ выражается через функцию распределения следующим образом: для шара

$$n(r) = \int d^3pf(\vec{p}, r) = \left(1-\frac{\gamma r^2}{a^2}\right)\int_0^\pi d\alpha\sin\alpha\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{\sqrt{-2m^2V(r)}} dPP^2f(P^2+$$

$$+2m^2V(r)) = \frac{4\pi}{1-\frac{\gamma r^2}{a^2}}\int_0^{\sqrt{-2m^2V(r)}} dPP^2f(P^2+2m^2V(r));$$

а для диска (здесь имеется в виду поверхностная плотность)

$$n(r)=\left(1-\frac{\gamma r^2}{a^2}\right)^{-1/2}\int\limits_0^{2\pi}d\alpha\int\limits_0^{\sqrt{-2m^2V(r)}}dPPf(P^2+2m^2V(r))=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{\gamma r^2}{a^2}}}\int\limits_0^{\sqrt{-2m^2V(r)}}dPPf(P^2+2m^2V(r)).$$

После очевидных преобразований эти выражения принимают вид для шара

$$\left(1-\frac{\gamma r^2}{a^2}\right)\frac{n(r)}{2\pi}=\int\limits_{2m^2V(r)}^{0}dx\sqrt{x^2-2m^2V(r)}\,f(x), \tag{3}$$

а для диска

$$\sqrt{1-\frac{\gamma r^2}{a^2}}\,\frac{n(r)}{\pi}\int\limits_{2m^2V(r)}^{0}dxf(x), \tag{4}$$

где

$$x=P^3+2m^2V(r).$$

Эти уравнения можно решить относительно $f(x)$ в обоих случаях, если известна функция $r(V)$, обратная к $V(r)$. Действительно, используя V вместо r, можно получить для f уравнения более простого вида: для шара

$$\left(1-\frac{\gamma r^2(V)}{a^2}\right)\frac{n(r(V))}{2\pi}=\int\limits_{2m^2V}^{0}dx\sqrt{x^2-2m^2V}f(x), \tag{5}$$

и для диска

$$\sqrt{1-\frac{\gamma r^2(V)}{a^2}}\,\frac{n(r(V))}{\pi}=\int\limits_{2m^2V}^{0}dxf(x). \tag{6}$$

Уравнение (5) при $\gamma=0$ было получено Эддингтоном [3].

Продифференцировав уравнение (4) по r, можно для $f(x)$ получить равенство

$$f(x)\big|_{x=2m^2V}=-\frac{\frac{d}{dr}\left[n(r)\sqrt{1-\frac{\gamma r^2}{a^2}}\right]}{2m^2V'(r)\pi},$$

из которого следует, что для монотонно возрастающих $V(r)$ и $\gamma \geqslant 0$ функция распределения для диска неотрицательна во всей области определения. Такой же результат для шара можно получить, решив уравнение (3) относительно $f(x)$.

5. *Точные решения для диска.* Точных решений для бесстолкновительного гравитирующего диска с конечной дисперсией скоростей частиц известно немного [1]: в основном они относятся к дискам с квадратичным потенциалом [4, 5] и со степенным распределением поверхностной плотности [6]. Изложенный выше метод позволяет получить точные решения с любым монотонным потенциалом $V(r)$, если обратная к нему функция $r(V)$ известна. Такие потенциалы и соответствующие им поверхностные плотности $n(r)$ можно получить, используя известное представление в полиномах Лежандра [7]. В результате довольно сложных вычислений можно получить плотности $n(r)$, соответствующие потенциалам вида

$$V_{2k}(r) = -V_0\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{2k} - 1\right], \quad k \geqslant 1, \quad V_0 > 0,$$

где V_0 — значение $V(r)$ в центре диска. Они имеют вид

$$n_{2k}(r) = \frac{V_0}{ma\pi G}\,\frac{2(k!)^2(2k+1)}{(3/2)_k(3/2)_{k-1}}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\,P_{k-1}^{(1/2,\,3/2-k)}\left(2\frac{r^2}{a^2}-1\right),$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}$ — полиномы Якоби [8], $(\alpha)_k = \dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$ Функция $a^{-2}r^2(V)$, очевидно, имеет вид

$$\frac{r^2(V)}{a^2} = \left(1+\frac{V}{V_0}\right)^{1/k}.$$

Уравнение (6) решается тривиально; в результате получается

$$f_{2k}(2m^2V) = -\frac{1}{2m^2}\,\frac{2(k!)^2(2k+1)}{(3/2)_k(3/2)_{k-1}}\,\frac{V_0}{\pi aGm}\times$$

$$\times\frac{d}{dV}\left\{\sqrt{\left[1-\gamma\left(1+\frac{V}{V_0}\right)^{1/k}\right]\left[1-\left(1+\frac{V}{V_0}\right)^{1/k}\right]}\times\right.$$

$$\left.\times P_{k-1}^{(1/2,\,3/2-k)}\left(2\left(1+\frac{V}{V_0}\right)^{1/k}-1\right)\right\},$$

где V — независимая переменная. Функция распределения получается подстановкой вместо $2m^2V$ величины

$$2mE - \frac{\gamma M^2}{2ma^2} - 2m^2\Psi(a), \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

Можно получить и более сложные решения, например, с потенциалом вида

$$V(r) = -V_0 \cos\frac{\pi r}{2a}; \quad \frac{r}{a} = \frac{2}{\pi}\arccos\left(-\frac{V}{V_0}\right), \quad V_0 > 0.$$

Для них

$$n(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V^{(2k)}(0)}{V_0 (2k)!} n_{2k}(r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V^{(2k)}(0)}{V_0} \frac{k!\, 2^{-2k}(2k+1)}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)_k\right]^2 \left(\frac{3}{2}\right)_k} \frac{V_0}{a\pi G} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\, P_{k-1}^{(1/2,\ 3/2-k)}\left(2\frac{r^2}{a^2} - 1\right),$$

где $V^{(2k)}(0)$ — четные производные $V(r)$ при $r = 0$:

$$V_{(0)}^{(2k)} = (-1)^k V_0,$$

так что

$$n(r) = \frac{2V_0}{\pi G a} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \sum_{k-1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{-2k}(2k+1)}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)_k\right]^2 \left(\frac{3}{2}\right)_k} P_{k-1}^{(1/2,\ 3/2-k)}\left(2\frac{r^2}{a^2} - 1\right).$$

Функция распределения получается следующей:

$$f\left(2mE - \frac{\gamma M^2}{a^2} - 2m^2\Psi(a)\right) = -\frac{2V_0}{m\pi G a\, 2m^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{-2k}(2k+1)}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)_k\right]^2 \left(\frac{3}{2}\right)_k} \times$$

$$\times \frac{d}{dV}\left[\sqrt{\left[1 - \frac{4\gamma}{\pi^2}\arccos^2\left(-\frac{V}{V_0}\right)\right]\left[1 - \frac{4}{\pi^2}\arccos^2\left(-\frac{V}{V_0}\right)\right]} \times \right.$$

$$\left. \times P_{k-1}^{(1/2,\ 3/2-k)}\left(\frac{8}{\pi^2}\arccos^2\left(-\frac{V}{V_0}\right) - 1\right)\right]$$

при $2m^2 V = 2mE - \frac{\gamma M^2}{a^2} - 2m^2\Psi(a)$.

Решения для дисков неограниченного радиуса со степенным потенциалом, получающиеся с использованием этого метода, совпадают с изотропными решениями, изложенными в работе [6].

6. *Точные решения для шара.* Продифференцировав уравнение (5) по V, можно получить для $f(x)$ уравнение Абеля [9]

$$g'(V) = -2m^2\left[f(x)\sqrt{x-2m^2V}\Big|_{x=2m^2V} + \frac{1}{2}\int\limits_{2m^2V}^{0} \frac{dx f(x)}{\sqrt{x-2m^2V}} \right] =$$

$$= m^2\int\limits_{2m^2V}^{0} \frac{dx f(x)}{\sqrt{x-2m^2V}},$$

где

$$g(V) = \left(1 - \frac{\gamma r^2(V)}{a^2}\right)\frac{n(r(V))}{2\pi}.$$

Решив это уравнение, можно найти функцию распределения:

$$f(x) = m^{-2}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{0}\frac{dV}{\sqrt{2m^2V-x}}\frac{d}{dV}\left[\left(1-\frac{\gamma r^2(V)}{a^2}\right)\frac{n(r(V))}{2\pi}\right] \qquad (7)$$

где, как и для диска,

$$x = 2mE - \frac{\gamma M^2}{a^2} - 2m^2\Psi(a).$$

Зададимся потенциалами вида

$$V_k(r) = -V_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^k, \quad k \geqslant 1,$$

для которых, очевидно,

$$\frac{r^2(V)}{a^2} = 1 - \left(-\frac{V}{V_0}\right)^{1/k}.$$

Соответствующие плотности вычисляются из уравнения Пуассона:

$$4\pi m G n_k(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)V(r) =$$

$$= \frac{2V_0k}{a^2}\left[2(k-1)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{2-k} - 2(k+1)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{k-1}\right].$$

Выражая их через переменную V и подставляя в (7), можно получить функции распределения:

$$f(x) = -\frac{kV_0}{4\pi^3 Gma^2}\frac{d}{dx}\int\limits_{x/2m^2}^{0}\frac{dV}{\sqrt{2m^2V-x}}\frac{d}{dV}\left\{\left[1-\gamma-\left(-\frac{V}{V_0}\right)^{1/k}\right]\times\right.$$

$$\times\left(-\frac{V}{V_0}\right)^{1-2/k}\left[2(k-1)-(2k+1)\left(-\frac{V}{V_0}\right)^{1/k}\right]\Bigg\},$$

где $x = 2mE - \frac{\gamma M^2}{a^2} - 2m^2\Psi(a)$. Окончательно:

$$f(x) = \frac{kV_0}{4\pi^3 Gma^2}\,\frac{1}{2m^2V_0\sqrt{x}}\times$$

$$\times\left[2k+1-\gamma\frac{(2k+1)\Gamma(2-1/k)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)}\left(\frac{2m^2V_0}{x}\right)^{1/k}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(k-1)(1-\gamma)\Gamma\left(2-\frac{2}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{k}\right)}\sqrt{\pi}\left(\frac{2m^2V_0}{x}\right)^{2/k}\right].$$

7. *Заключение*. Параметр γ, очевидно, определяет анизотропию решения в импульсном пространстве для систем, имеющих ограниченный радиус. В случаях, когда радиус бесконечен, этот параметр, как видно из условия (2), не играет никакой роли. В этих случаях, как и в случаях $\gamma = 0$ функция распределения изотропна, т. е. зависит только от E.

Анизотропия решения падает с уменьшением γ от 1 до 0: при $\gamma = 1$ область (2) в импульсных пространствах максимально сжата в локальных радиальных направлениях и эта сжатость уменьшается до изотропии при $\gamma = 0$. Решения $\gamma < 0$ тоже возможны, но, как было показано выше, им не всегда соответствуют функции распределения, неотрицательные во всей области определения, т. е. некоторые из них физически бессмысленны. Например, для дисков неотрицательность f во всей области определения требует, чтобы функция $n(r)\sqrt{1-\gamma r^2/a^2}$ была монотонно убывающей, что, очевидно, возможно не для любой монотонно убывающей $n(r)$ при $\gamma < 0$. Системы, у которых это условие оказывается выполненным, имеют вытянутую в локальных радиальных направлениях область (2) и вытянутость растет с дальнейшим падением γ. Предельный случай $\gamma = -\infty$ соответствует системам с чисто радиальным движением частиц. Очевидно, что, например, диск с $\gamma = -\infty$ должен иметь $n(r)$, спадающую не медленнее, чем r^{-1}, а шар — не медленнее, чем r^{-2}.

Автор благодарен Г. С. Бисноватому-Когану за полезные обсуждения.

Институт космических исследований
АН СССР

ON THE EQUILIBRIUM STATES OF THE COLLISIONLESS GRAVITATING SPHERE AND DISK

Z. Y. TURAKULOV

The self-consistent solutions of the kinetic equation in the proper gravitational field are obtained which depend on the integrals of motion: energy and square of angular momentum. For the sphere and disk the uniparametric series of solutions are obtained for gravitational potentials $\Psi(r)$, satisfying the following two conditions: $\Psi(r)$ is a monotone function, and the function $r(\Psi)$, inverse to $\Psi(r)$ is known. The anisotropy of distribution function in momentum space is characterised by the parameter of the solution. The range of this parameter, according to positively-defined distribution functions, is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман*, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М., Наука, 1976.
2. *Ю.-И. К. Велтманн*, в кн. «Итоги науки», сер. астр., Кинематика и динамика звездных систем, ВИНИТИ, М., 1968.
3. *A. S. Eddington*, M. N. RAS, 76, 572, 1916.
4. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 5, 425, 1969.
5. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 6, 387, 1970.
6. *Г. С. Бисноватый-Коган*, Письма АЖ, 1, 3, 1975.
7. *C. Hunter*, M. N. RAS, 126, 299, 1963.
8. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М., 1962.
9. *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, т. 2, ГИФМЛ, М., 1963.