АСТРОФИЗИКА

ТОМ 19 НОЯБРЬ, 1983 ВЫПУСК 4

УДК 52—6

К ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. ЯВНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ ФУНКЦИИ

Э. Х. ДАНИЕЛЯН

Поступила 25 января 1983
Принята к печати 20 июня 1983

В статье приводится решение основного интегрального уравнения (1) теории анизотропного рассеяния света в однородном плоско-параллельном слое конечной оптической толщины. Используя полученное явное выражение для резольвентной функции Соболева $\Phi^m(\tau, \tau_0)$ (посредством обобщенных функций Амбарцумяна—Чандрасекара—$X^m(\eta, \tau_0)$ и $Y^m(\eta, \tau_0)$), находятся также явные выражения для неких вспомогательных функций f^m и $\bar{f}^m$, позволяющих, в частности, находить приведенную функцию источника и приведенную интенсивность излучения в среде конечной оптической толщины освещенной параллельными лучами, без интегрирований по оптической глубине.

1. *Введение*. Одной из фундаментальных величин в теории анизотропного рассеяния света является резольвентная функция Соболева — $\Phi^m(\tau, \tau)$, удовлетворяющая хорошо известному [1] линейному интегральному уравнению

$$\Phi^m(\tau, \tau_0) = K^m(\tau) + \int_0^{\tau_0} K^m(|\tau - t|)\, \Phi^m(t, \tau_0)\, dt, \tag{1}$$

ядро которого имеет следующий вид:

$$K^m(\tau) = \int_0^1 e^{-\tau/\mu}\Psi^m(\mu)\, \frac{d\mu}{\mu}, \tag{2}$$

причем функцию $\Psi^m(\mu)$ можно найти, если известно разложение индикатрисы рассеяния $x(\gamma)$ в ряд по полиномам Лежандра. Отметим, что такое разложение впервые было осуществлено В. А. Амбарцумяном [2] и впоследствии сыграло основополагающую роль в теории анизотропного рассеяния.

Нахождение решения уравнения (1) в явном виде представляет определенный интерес для теории и является основной целью настоящей работы. Решение аналогичного уравнения для полубесконечной ($\tau_0 = \infty$) среды в случае изотропного ($\Psi^m(\mu) = 1/2$) рассеяния было получено И. Н. Мининым [3], а для ядер несколько более общего вида Д. И. Нагирнером [4] (также при $\tau_0 = \infty$). Сравнительно недавно Н. Н. Роговцовым и А. Н. Самсоном [5] было найдено явное выражение функции источника при произвольных первичных источниках в среде конечной оптической толщины для случая изотропного рассеяния. На основе приводимых в [5] явных выражений для резольвенты $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ и резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ нами были получены явные выражения для наиболее важных характеристик светового поля в среде конечной оптической толщины [6], использование которых приводит к сильному сокращению объема вычислений по сравнению с известными ранее способами. Ясно, что получение решения уравнения (1), а также его резольвенты приведет к аналогичным упрощениям и в теории анизотропного рассеяния. Эти упрощения обусловлены тем, что в явных выражениях резольвенты и резольвентной функции зависимость от аргумента τ весьма простая, и при нахождении более сложных характеристик поля излучения интегрирование по этой переменной (обычно с неким экспоненциальным множителем) удается провести аналитически.

Ниже будет получено решение уравнения (1) в явном виде посредством неких вспомогательных функций $a^m(\mu, \tau_0)$ и $b^m(\mu, \tau_0)$, связанных с обобщенными функциями Амбарцумяна—Чандрасекара X^m и Y^m. На основе этого решения получаются явные выражения для новых вспомогательных функций f^m и $\bar{f}^m$, позволяющих без интегрирования по оптической глубине получить решение задачи о нахождении интенсивности и функции источника в плоскопараллельном слое конечной оптической толщины, освещенном параллельными лучами, т. е. основной задачи теории рассеяния света в планетных атмосферах.

2. *Решение основного интегрального уравнения.* Для решения уравнения (1) применим метод, предложенный в упоминавшейся выше работе [5]. Умножая (1) на $e^{-p\tau}d\tau$ и интегрируя в пределах от 0 до τ_0, после небольших преобразований, можно получить следующее интегральное соотношение:

$$T^m\left(\frac{1}{p}\right)\overline{\Phi}^m(p, \tau_0) = \int_0^1 \left[\frac{1}{p\mu+1} - \frac{1}{p\mu-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{X^m(\mu, \tau_0)}{p\mu-1} - e^{-p\tau_0}\frac{Y^m(\mu, \tau_0)}{p\mu+1}\right]\Psi^m(\mu)\,d\mu, \tag{3}$$

в котором обозначено

$$\bar{\Phi}^m(p, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{-p\tau} \Phi^m(\tau, \tau_0)\, d\tau, \qquad T^m\left(\frac{1}{p}\right) = 1 - \int_{-1}^{1} \frac{\Psi^m(\mu)}{p\mu + 1}\, d\mu, \tag{4}$$

а X^m и Y^m — функции Амбарцумяна — Чандрасекара [7], которые выражаются посредством функции $\Phi^m(\tau, \tau_0)$ следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} X^m(\mu, \tau_0) &= 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\tau/\mu} \Phi^m(\tau, \tau_0)\, d\tau; \\ Y^m(\mu, \tau_0) &= e^{-\tau_0/\mu} + \int_0^{\tau_0} e^{-(\tau_0-\tau)/\mu} \Phi^m(\tau, \tau_0)\, d\tau. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее, заменяя p на $i\omega$, умножая (3) на $e^{i\omega\tau}\, d\omega/2\pi\, T^m(1/i\omega)$ и интегрируя в пределах от $-\infty$ до ∞, получим

$$\begin{aligned} \Phi^m(\tau, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \Psi^m(\mu)\, d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{T^m(1/i\omega)} \Bigg[& \frac{1 - e^{-i\omega\tau_0} Y^m(\mu, \tau_0)}{i\omega\mu + 1} - \\ & - \frac{1 - X^m(\mu, \tau_0)}{i\omega\mu - 1} \Bigg] d\omega. \end{aligned} \tag{6}$$

Вводя в (6) обозначения

$$\begin{aligned} a^m(\eta, \tau_0) &= 1 - \eta \int_0^1 \frac{X^m(\mu, \tau_0)}{\mu + \eta} \Psi^m(\mu)\, d\mu, \\ b^m(\eta, \tau_0) &= \eta \int_0^1 \frac{Y^m(\mu, \tau_0)}{\mu + \eta} \Psi^m(\mu)\, d\mu \end{aligned} \tag{7}$$

и $i\omega = z$, а также считая, что $\tau \neq 0$, с учетом четности функции T^m, после небольших преобразований получим, что

$$\Phi^m(\tau, \tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{z\tau} a^m(-1/z, \tau_0) - e^{z(\tau_0 - \tau)} b^m(-1/z, \tau_0)}{T^m(1/z)}\, dz. \quad (\tau > 0) \tag{8}$$

Легко видеть, что числитель в полученном подынтегральном выражении является аналитической функцией в левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, z < 0$).

Знаменатель же — функция $T^m(1/z)$ имеет в левой полуплоскости линию ветвления $-\infty \leqslant x \leqslant -1$ $(z = x + iy)$. Кроме того, функция $T^m(1/z)$ может обращаться в нуль. Считая (см., например, [8], гл. 5, стр. 144—145), что при $m = 0$ функция T^0 имеет лишь один вещественный, простой корень; а при $m > 0$ корней нет, то переходя в (8) от интегрирования по мнимой оси к интегрированию по предельным контурам вдоль линии ветвления $-\infty \leqslant x \leqslant -1$, с учетом предельных теорем для интегралов типа Коши, и заменяя переменную x на $1/\mu$, для резольвентной функции получим окончательно следующее явное выражение:

$$\Phi^m(\tau, \tau_0) = C\left[e^{-k\tau} a^m\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) - e^{-k(\tau_0-\tau)} b^m\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right)\right]\delta_{0m} + \int_0^1 \frac{[e^{-\tau/\mu} a^m(\mu, \tau_0) - e^{-(\tau_0-\tau)/\mu} b^m(\mu, \tau_0)]\, \Psi^m(\mu)}{\mu R^m(\mu)}\, d\mu. \tag{9}$$

Здесь обозначено

$$R^m(\mu) = [T^m(\mu)]^2 + [\pi\mu\Psi^m(\mu)]^2, \qquad C = \left[\int_{-1}^{1} \frac{\mu\Psi^m(\mu)}{(1-k\mu)^2}\, d\mu\right], \tag{10}$$

а δ_{0m} — символ Кронекера

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Дискретная (внеинтегральная) часть решения в (9) обусловлена наличием в выражении (8) полюса первого порядка из-за того, что функция $T^0(\mu)$ в точке $\mu = 1/k$ имеет простой нуль. Если функция $T^m(\mu)$ имеет другие нули (см., например, [15, 16]), то непрерывная (интегральная) часть решения сохраняет свою форму, а в дискретной части появляются дополнительные слагаемые, которые легко найти с помощью теории вычетов (см., например, [4]).

В случае консервативного рассеяния ($\lambda = 1$) непрерывная часть решения сохраняет прежнюю форму, в дискретной же части появляется неопределенность типа $0 \cdot \infty$ ($C \to \infty$, а величина в квадратных скобках к нулю). Раскрывая неопределенность, получим следующее выражение:

$$\Phi^m(\tau, \tau_0) = C_1[X_1^0(\tau_0) - \tau Y_0^0(\tau_0)]\delta_{0m} + \int_0^1 \frac{[e^{-\tau/\mu} a^m(\mu, \tau_0) - e^{-(\tau_0-\tau)/\mu} b^m(\mu, \tau_0)]}{\mu R^m(\mu)} \Psi^m(\mu)\, d\mu, \tag{12}$$

в котором $X_k^0(\tau_0)$ и $Y_k^0(\tau_0)$ — угловые моменты нулевой гармоники обобщенных функций Амбарцумяна — Чандрасекара с весом $\Psi^0(\mu)$, т. е.

$$X_k^0(\tau_0)=\int_0^1\mu^k X^0(\mu,\tau_0)\,\Psi^0(\mu)\,d\mu,\quad Y_k^0(\tau_0)=\int_0^1\mu^k Y^0(\mu,\tau_0)\,\Psi^0(\mu)\,d\mu, \tag{13}$$

а

$$C_1=\left[\int_{-1}^{1}\Psi^0(\mu)\,\mu^2 d\mu\right]^{-1}. \tag{14}$$

При получении выражения (12) было использовано также следующее, легко доказуемое тождество:

$$\lim_{k\to 0}\frac{1-X_0^0(\tau_0)-Y_0^0(\tau_0)}{k}=0\quad(\tau_0\neq\infty). \tag{15}$$

Аналогичным способом можно было бы найти, разумеется, и явное выражение для резольвенты $\Gamma^m(\tau,\tau',\tau_0)$ уравнения (1), но здесь мы на этом останавливаться не будем. К тому же, если воспользоваться идеей В. В. Иванова [9] о сведении, в известном смысле, задач с анизотропным рассеянием к аналогичным задачам с изотропным рассеянием, то с помощью явных выражений для $\Gamma(\tau,\tau',\tau_0)$, приводимых в [5] или [6], можно сразу записать и явное выражение для $\Gamma^m(\tau,\tau',\tau_0)$.

3. *К задаче о нахождении интенсивности излучения в атмосферах планет.* При изотропном рассеянии угловое распределение диффузного излучения в плоскопараллельном слое, освещенном параллельными лучами, зависит от двух угловых переменных. Для нахождения этих величин известны [10, 11] алгебраические соотношения, в которые входят некие вспомогательные функции, зависящие лишь от одной угловой переменной. Аналогичный результат для случая анизотропного рассеяния в полубесконечной среде был впервые получен Э. Г. Яновицким [12] и впоследствии был обобщен на случай среды конечной оптической толщины в работах А. Л. Файмата и Р. Е. Калаба [13] и несколько позже Э. Г. Яновицкого [14]. Правда, при этом разделение угловых переменных осуществляется не для самих величин интенсивностей, а для, так называемых, приведенных интенсивностей, через которые непосредственно выражаются азимутальные гармоники интенсивности излучения. Приведем одну из основных формул (в несколько других обозначениях), полученную в работе [13],

$$\left(1-\frac{\eta}{\zeta}\right)a_+^m(\tau,\ \eta,\ \zeta,\ \tau_0)=D^m(\tau,\ \zeta,\ \tau_0)-$$
$$-\frac{\lambda S}{4}[X^m(\zeta,\ \tau_0)f^m(\tau,\ \tau_0,\ \eta)-Y^m(\zeta,\ \tau_0)\tilde{f}^m(\tau_0-\tau,\ \tau_0,\ \eta)],\tag{16}$$

в которой a_+^m — приведенная интенсивность, через которую выражаются азимутальные гармоники нисходящей интенсивности (если на единицу поверхности верхней границы атмосферы падает поток солнечного излучения, равный $\pi S\zeta$), D^m — приведенная функция источника, введенная В. В. Соболевым (см. [8], гл. 6, стр. 158), а X^m и Y^m — функции Амбарцумяна—Чандрасекара. Вспомогательные же функции f^m и $\tilde{f}^m$ определяются следующими формулами:

$$f^m(\tau,\ \tau_0,\ \eta)=e^{-\tau/\eta}+\int_0^{\tau}e^{-(\tau-t)/\eta}\Phi^m(t,\ \tau_0)\,dt;$$
$$\tilde{f}^m(\tau,\ \tau_0,\ \eta)=\int_{\tau}^{\tau_0}e^{-(t-\tau)/\eta}\Phi^m(t,\ \tau_0)\,dt.\tag{17}$$

Из (16), в частном случае при $\eta=\zeta$ (как это отмечают авторы работы [13]), видно, что функция D^m также алгебраически выражается через вспомогательные функции f^m и $\tilde{f}^m$. Для них, используя полученное выше выражние (9), из (17) легко получить явные выражения

$$f^m(\tau,\ \tau_0,\ \eta)=e^{-\tau/\eta}+C\left[a^m\left(\frac{1}{k},\ \tau_0\right)A\left(\tau,\ \eta,\ \frac{1}{k}\right)-\right.$$
$$\left.-e^{-k\tau_0}b^m\left(\frac{1}{k},\ \tau_0\right)A\left(\tau,\ \eta,\ -\frac{1}{k}\right)\right]\delta_{0m}+\tag{18}$$
$$+\int_0^1\frac{[a^m(\mu,\ \tau_0)A(\tau,\ \eta,\ \mu)-e^{-\tau_0/\mu}b^m(\mu,\ \tau_0)A(\tau,\ \eta,\ -\mu)]}{\mu R^m(\mu)}\Psi^m(\mu)\,d\mu$$

и

$$\tilde{f}(\tau_0-\tau,\ \tau_0,\ \eta)=C\left[e^{-k\tau_0}a^m\left(\frac{1}{k},\ \tau_0\right)A\left(\tau,\ \eta,\ -\frac{1}{k}\right)-\right.$$
$$\left.-b^m\left(\frac{1}{k},\ \tau_0\right)A\left(\tau,\ \eta,\ \frac{1}{k}\right)\right]\delta_{0m}+\tag{19}$$

$$+\int_0^1 \frac{[e^{-\tau_0/\mu} a^m(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, -\mu) - b^m(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, \mu)]}{\mu R^m(\mu)} \Psi^m(\mu)\, d\mu.$$

В этих выражениях A — элементарная функция, имеющая следующий вид:

$$A(\tau, \eta, \mu) = \frac{\eta\mu}{\eta - \mu}\left[e^{-\tau/\eta} - e^{-\tau/\mu}\right], \tag{20}$$

а остальные обозначения прежние.

В случае консервативного рассеяния для функций f^m и $\bar{f}^m$ можно получить следующие выражения:

$$f^m(\tau, \tau_0, \eta) = e^{-\tau/\eta} + C_1\eta\{(1 - e^{-\tau/\eta})[X_1^0(\tau_0) + \eta Y_0^0(\tau_0)] - \tau Y_0^0(\tau_0)\}\delta_{0m} +$$

$$+\int_0^1 \frac{[a^m(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, \mu) - e^{-\tau_0/\mu} b^m(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, -\mu)]}{\mu R^m(\mu)} \Psi^m(\mu)\, d\mu \tag{21}$$

и

$$\bar{f}^m(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta) = C_1\eta\{(1 - e^{-\tau/\eta})[Y_1^0(\tau_0) - \eta Y_0^0(\tau_0)] + \tau Y_0^0(\tau_0)\}\delta_{0m} +$$

$$+\int_0^1 \frac{[e^{-\tau_0/\mu} a^m(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, -\mu) - b^m(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, \mu)]}{\mu R^m(\mu)} \Psi^m(\mu)\, d\mu. \tag{22}$$

Следует заметить, что если при численных расчетах по формулам (9) и (12) появляется небольшое затруднение (лишь при очень малых значениях τ), влияющее на точность и связанное с наличием в знаменателе подынтегральных выражений множителя $1/\mu$, то аналогичное затруднение не возникает при вычислениях по формулам (18), (19) и (21), (22) ввиду отсутствия в них сингулярностей.

4. *Заключение*. Таким образом, если даны функции X^m и Y^m, то после нахождения функций $a^m(\mu, \tau_0)$ и $b^m(\mu, \tau_0)$ по формулам (5) нахождение приведенной интенсивности приведенной функции источника, как и резольвентной функции, сводится к однократному интегрированию по угловой переменной. Между тем, обычный путь нахождения этих величин состоит прежде всего в численном решении интегрального уравнения (1) (или других интегральных уравнений, приводимых в [8], а также в [14]), после чего численным интегрированием резольвентной функции по оптической глубине по формулам типа (17) находятся остальные характеристики поля излучения. Из сказанного становится ясно, что эффективность предложенного выше способа расчета поля излучения в плоскопараллельной среде во многом зависит от усилий, затраченных на нахождение функ-

ций X^m, Y^m и a^m, b^m. Нахождение X^m и Y^m-функций, как известно, сводится к численному решению систем интегральных (линейных или нелинейных) или интегро-дифференциальных уравнений. Используя некоторые из полученных выше результатов, для них (а также для функций a^m и b^m) можно получить новые уравнения. Такие уравнения и сравнение их с известными уравнениями будут приведены в отдельной работе.

В заключение автор выражает благодарность академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение настоящей работы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория

ON THE THEORY OF ANISOTROPICALLY SCATTERED RADIATION. THE EXPLICIT EXPRESSION FOR THE RESOLVENT FUNCTION

E. Kh. DANIELIAN

The solution of the basic integral equation (1) of the anisotropically scattered radiation in the homogeneous plane parallel slab of finite optical thickness is obtained.

With the presented explicit expression for the Sobolev's resolvent function $\Phi^m(\tau, \tau_0)$, the explicit expressions of some auxiliary functions f^m and $\tilde{f}^m$ are found which are in particular unable to find the sources function and the intensity of the radiation in the slab of finite optical thickness, illuminated by the parallel rays without integration over the optical depth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 5, 343, 1969.
2. *В. А. Амбарцумян*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 3, 97, 1942.
3. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
4. *Д. И. Нагирнер*, Астрон. ж., 41, 669, 1964.
5. *Н. Н. Роговцов, А. М. Самсон*, Журнал прикладной спектроскопии, 25, 512, 1976.
6. *Э. Х. Даниелян*, Астрофизика, 19, 335, 1983.
7. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
8. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
9. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 55, 1072, 1978.
10. *M. H. Kagiwada, R. E. Kalaba*, Ap. J., 147, 301, 1967.
11. *Э. Х. Даниелян*, Астрофизика, 12, 579, 1976.
12. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 53, 1063, 1976.
13. *A. L. Fymat, R. E. Kalaba*, Astrophys. Space Sci., 47, 195, 1977.
14. *Э. Г. Яновицкий*, Астрофизика, 16, 363, 1980.
15. *J. R. Mika*, Nucl. Sci. Eng., 11, 415, 1961.
16. *Т. А. Гермогенова*, Препринт ИПМ, № 21, М., 1972.