АСТРОФИЗИКА

ТОМ 19 МАЙ, 1983 ВЫПУСК 2

УДК 52—6—64

К ТЕОРИИ ИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

Э. Х. ДАНИЕЛЯН

Поступила 6 июня 1982

Принята к печати 27 января 1983

В работе показано, что при изотропном рассеянии любую характеристику светового поля в слое конечной оптической толщины, вплоть до функции Грина, зависящей от пяти аргументов, можно вычислить всего лишь однократным или двукратным интегрированием по угловой переменной, если имеются численные значения неких вспомогательных функций $a(\eta, \tau_0)$ и $b(\eta, \tau_0)$. Такая возможность связана с использованием полученных в работе явных выражений для вспомогательных функций f и $\bar{f}$, а также вероятности $p(\tau, \tau', \tau_0, \eta)$ появления кванта на оптической глубине τ после его поглощения и переизлучения на оптической глубине τ'. Явные выражения для этих функций получены с помощью известных [12] выражений для резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ и резольвенты $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ уравнения переноса излучения. Для функций $a(\eta, \tau_0)$ и $b(\eta, \tau_0)$ получена система линейных интегральных уравнений.

1. *Введение.* В настоящей работе предлагается относительно простой способ нахождения характеристик светового поля в плоскопараллельной однородной среде. Такая возможность связана с проведением некоторых интегрирований по пространственной координате (оптической глубине) аналитически. При этом объем вычислений, как будет показано ниже, значительно сокращается. Для иллюстрации сказанного рассмотрим хорошо изученную задачу о нахождении углового распределения интенсивности излучения на некоторой глубине τ в полубесконечной среде, освещенной параллельными лучами при изотропном рассеянии. Для, например, восходящей интенсивности теория переноса дает следующее выражение:

$$I_1(\tau, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t-\tau}{\eta}} S(t, \zeta)\frac{dt}{\eta}, \tag{1}$$

а для функции источника —

$$S(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\varphi(\zeta)\left[e^{-\frac{\tau}{\zeta}} + \int_{0}^{\tau} e^{-\frac{\tau-t}{\zeta}}\Phi(t)\,dt\right], \tag{2}$$

следующее из уравнения, полученного В. А. Амбарцумяном [1]. Здесь $\varphi(\zeta)$ — функция Амбарцумяна, а $\Phi(\tau)$ — резольвентная функция Соболева, для которой И. Н. Мининым [2] было найдено явное интегральное представление

$$\Phi(\tau) = \frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi(1/k)} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{e^{-\tau/\mu}\,d\mu}{\varphi(\mu)\,\mu R(\mu)}, \tag{3}$$

где

$$C = \frac{k(1-k^2)}{k^2-1+\lambda}, \quad R(\mu) = a^2(\mu) + \left(\frac{\lambda\pi\mu}{2}\right)^2, \quad a(\mu) = 1 - \frac{\lambda}{2}\mu\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}, \tag{4}$$

а k есть корень характеристического уравнения $a(1/k)=0$. Таким образом, конкретное вычисление интенсивности излучения сводится к предварительному нахождению φ-функции и трем интегрированиям — одному по угловой переменной по формуле (3) для множества значений τ из интервала $[0, \infty)$ и двух по оптической глубине по формулам (2) и (1).

Объем вычислений можно существенно сократить, проводя некоторые простые аналитические преобразования. Так, подставляя (2) в (1) и интегрируя по частям, получим

$$(\eta+\zeta)I_1(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\zeta\varphi(\zeta)[F(\tau, \zeta) + \bar{F}(\tau, \eta)], \tag{5}$$

где обозначено:

$$F(\tau, \eta) = e^{-\tau/\eta} + \int_0^\tau e^{-\frac{\tau-t}{\eta}}\Phi(t)\,dt, \quad \bar{F}(\tau, \eta) = \int_\tau^\infty e^{-\frac{t-\tau}{\eta}}\Phi(t)\,dt. \tag{6}$$

Результат (5) не нов и был получен различными способами в работах [3—7]. Входящие туда вспомогательные функции F и $\bar{F}$ проще всего вычислять из интегральных представлений посредством φ-функции, получающихся подстановкой (3) в (6) с последующим аналитическим интегрированием по оптической глубине. Такие формулы получены в работах [8] и [9], причем в последней на их основе даны довольно обширные таблицы. Таблицы этих функций приводятся также и в [7].

Эффективность последнего способа расчета поля диффузного излучения в рассмотренном примере очевидна, поскольку требует всего лишь одного интегрирования по угловой переменной (лишь для одного значения τ) и алгебраических операций. Расширить по возможности круг задач, в которых имеют место аналогичные упрощения, и является целью настоящей работы.

2. *Резольвентная функция* $\Phi(\tau, \tau_0)$ *и вспомогательные функции* $f(\tau, \tau_0, \eta)$ *и* $\tilde{f}(\tau, \tau_0, \eta)$ *для слоя конечной оптической толщины.* Алгебраические выражения, аналогичные (5), для слоя конечной оптической толщины впервые были получены в работе Г. Г. Кагивада и Р. Е. Калаба [10], а также другим путем нами в [11]. В первой для нахождения вспомогательных функций применяется метод инвариантного погружения. Во второй эти функции находятся совершенно иным способом, существенной особенностью которого является отсутствие каких бы то ни было интегрирований по пространственной переменной. Здесь же на основании идеи, изложенной выше, для функций f и $\tilde{f}$ будут получены явные выражения посредством функций Амбарцумяна φ и ψ. Введенные в [11] вспомогательные функции f и $\tilde{f}$ выражаются посредством резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ аналогично (6)

$$f(\tau, \tau_0, \eta) = e^{-\tau/\eta} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-t}{\eta}} \Phi(t, \tau_0)\, dt, \quad \tilde{f}(\tau, \tau_0, \eta) = \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-\frac{t-\tau}{\eta}} \Phi(t, \tau_0)\, dt. \tag{7}$$

Явное выражение для $\Phi(\tau, \tau_0)$ обобщающее известную формулу И. Н. Минина (3), было получено Н. Н. Роговцовым и А. М. Самсоном [12] формальным путем. В сущности оно содержится и в формуле, полученной В. В. Ивановым (см., например, [13], стр. 381, формула 1.26) из физических соображений. Перепишем явное выражение для $\Phi(\tau, \tau_0)$ в виде

$$\Phi(\tau, \tau_0) = C\left[e^{-k\tau} a\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) - e^{-k(\tau_0-\tau)} b\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{e^{-\tau/\mu} a(\mu, \tau_0) - e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\mu}} b(\mu, \tau_0)}{\mu R(\mu)}\, d\mu. \tag{8}$$

Здесь обозначено

$$a(\mu, \tau_0) = 1 - \frac{\lambda}{2}\mu\int_0^1 \frac{\varphi(\zeta, \tau_0)}{\zeta+\mu}\, d\zeta; \quad b(\mu, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}\mu\int_0^1 \frac{\psi(\zeta, \tau_0)}{\zeta+\mu}\, d\zeta, \tag{9}$$

а остальные обозначения те же, что и в (4), причем, введенные таким образом функции $a(\mu, \tau_0)$ и $b(\mu, \tau_0)$ связаны соотношением

$$a(\mu, \tau_0)\,\varphi(\mu, \tau_0) + b(\mu, \tau_0)\,\psi(\mu, \tau_0) = 1, \tag{10}$$

следующим из первого нелинейного уравнения Амбарцумяна для φ и ψ.

Подставляя (8) в (7) и интегрируя по оптической глубине, для функций f и $\bar{f}$ получим несколько громоздкие на вид, но в сущности простые, легко поддающиеся счету, выражения:

$$f(\tau, \tau_0, \eta) = e^{-\tau/\eta} + C\left[a\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) A\left(\tau, \eta, \frac{1}{k}\right) - \right.$$
$$\left. - b\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) A\left(\tau, \eta, -\frac{1}{k}\right) e^{-k\tau_0}\right] + \tag{11}$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{a(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, \mu) - b(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, -\mu) e^{-\tau_0/\mu}}{\mu R(\mu)} d\mu,$$

$$\bar{f}(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta) = C\left[a\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) A\left(\tau, \eta, -\frac{1}{k}\right) e^{-k\tau_0} - \right.$$
$$\left. - b\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) A\left(\tau, \eta, \frac{1}{k}\right)\right] + \tag{12}$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{a(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, -\mu) e^{-\tau_0/\mu} - b(\mu, \tau_0) A(\tau, \eta, \mu)}{\mu R(\mu)} d\mu.$$

В этих выражениях A — элементарная функция, имеющая следующий вид:

$$A(\tau, \eta, \mu) = \frac{\eta\mu}{\eta - \mu}\left(e^{-\tau/\eta} - e^{-\tau/\mu}\right). \tag{13}$$

Заметим, что выражения (11) и (12) переходят друг в друга заменой функции $A(\tau, \eta, \mu)$ на $A(\tau, \eta, -\mu)\, e^{-\tau_0/\mu}$ и наоборот (именно поэтому в (12) аргумент τ мы заменили на $\tau_0 - \tau$). Легко видеть также, что эти выражения не содержат никаких сингулярностей. Функции $\bar{f}$ и f позволяют находить как величину $p(\tau, \tau_0, \eta)$ — вероятность выхода кванта из среды, так и интенсивность излучения на глубине τ в слое конечной толщины τ_0, освещенной параллельными лучами, посредством алгебраических операций. Это следует из результатов, полученных в работах [10] и [11]. В дальнейшем мы покажем, что посредством этих функций выражаются и решения более сложных задач — таких, как отыскание характеристик светового поля в среде, содержащей внутренние первичные источники энергии.

3. *Поле излучения в среде, содержащей источники энергии.* В упоминавшейся выше работе [12] приводится также и явное интегральное представление для резольвенты $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ посредством выходящего излуче-

ния (двукратным интегрированием по угловой переменной). Выходящее излучение в данном случае представляет собой ни что иное, как $p(\tau, \tau_0, \eta)$ и $p(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta)$ — вероятности выхода кванта по разные стороны слоя, которые авторы рекомендуют находить из некоторой системы быстросходящихся линейных интегральных уравнений. Однако нам представляется более целесообразным несколько иной путь. Вводя величину

$$B(\tau, \tau_0, \zeta) = 2\pi\zeta \int_0^1 \frac{p(\tau, \tau_0, \mu)}{\mu + \zeta}\, d\mu,$$

выражение, полученное в [12], можно записать так:

$$\Gamma(\tau, \tau', \tau_0) = C\left[e^{-k|\tau'-\tau|} - e^{-k\tau} B\left(\tau', \tau_0, \frac{1}{k}\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-k(\tau_0-\tau)} B\left(\tau_0 - \tau', \tau_0, \frac{1}{k}\right)\right] + \tag{14}$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{|\tau'-\tau|}{\mu}} - e^{-\tau/\mu} B(\tau', \tau_0, \mu) - e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\mu}} B(\tau_0 - \tau', \tau_0, \mu)}{\mu R(\mu)}\, d\mu.$$

Пользуясь же формулами (26) и (27) работы [11], легко видеть, что

$$B(\tau, \tau_0, \zeta) = a(\tau, \tau_0) \tilde{f}(\tau, \tau_0, \zeta) + b(\zeta, \tau_0) f(\tau_0 - \tau, \tau_0, \zeta). \tag{15}$$

Таким образом, имея функции $a(\zeta, \tau_0)$ и $b(\zeta, \tau_0)$, мы можем, двукратным интегрированием по угловой переменной, найти резольвенту. Численные же значения функций $a(\zeta, \tau_0)$ и $b(\zeta, \tau_0)$, на наш взгляд, все же получить легче, чем численные значения $p(\tau, \tau_0, \zeta)$ и $p(\tau_0 - \tau, \tau_0, \zeta)$ даже при облегченном способе вычисления этих последних.

В работе [8] была введена величина $p(\tau, \tau', \tau_0, \eta)$, представляющая собой плотность вероятности того, что квант, поглощенный на глубине τ' в слое толщины τ_0, в результате диффузии пересечет некую плоскость, параллельную границе среды на глубине τ в направлении η, в телесном угле $d\omega$. Там же сказано, что функцию Грина — $G(\tau, \tau', \tau_0, \eta, \zeta)$ можно алгебраически выразить через нее. Это выражение приводится в работе О. В. Пикичяна [14]. Величину $p(\tau, \tau', \tau_0, \eta)$, дающую интенсивность излучения при наличии в среде изотропного источника, можно найти с помощью (14), интегрируя $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ с некоторым экспоненциальным множителем. Например, для случая $\tau' > \tau$, учитывая физический смысл функций $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ и $p(\tau, \tau', \tau_0, \eta)$, легко видеть, что

$$\frac{4\pi}{\lambda} p(\tau, \tau', \tau_0, -\eta) = \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau - t}{\eta}} \Gamma(t, \tau', \tau_0)\, dt \tag{16}$$

и

$$\frac{4\pi}{\lambda} p(\tau, \tau', \tau_0, \eta) = e^{-\frac{\tau' - \tau}{\eta}} + \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-\frac{t - \tau}{\eta}} \Gamma(t, \tau', \tau_0)\, dt \tag{17}$$

(в обеих формулах $\eta > 0$). Подставляя (14) в (16) и (17) и интегрируя по оптической глубине, получим:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\lambda} p(\tau, \tau', \tau_0, -\eta) = {} & \\ = C \Big\{ \Big[e^{-k\tau'} - e^{-k\tau_0} B\Big(\tau_0 - \tau', \tau_0, \frac{1}{k}\Big) \Big] A\Big(\tau, \eta, -\frac{1}{k}\Big) - & \\ - B\Big(\tau', \tau_0, \frac{1}{k}\Big) A\Big(\tau, \eta, \frac{1}{k}\Big) \Big\} + & \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{[e^{-\tau'/\mu} - e^{-\tau_0/\mu} B(\tau_0 - \tau', \tau_0, \mu)] A(\tau, \eta, -\mu) - B(\tau', \tau_0, \mu) A(\tau, \eta, \mu)}{\mu R(\mu)} d\mu, & \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\lambda} p(\tau, \tau', \tau_0, \eta) = e^{-\frac{\tau' - \tau}{\eta}} + C \Big[A\Big(\tau' - \tau, \eta, \frac{1}{k}\Big) + & \\ + e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}} A\Big(\tau_0 - \tau', -\eta, \frac{1}{k}\Big) - A\Big(\tau_0 - \tau, \eta, -\frac{1}{k}\Big) e^{-k\tau_0} B\Big(\tau', \tau_0, \frac{1}{k}\Big) - & \\ - A\Big(\tau_0 - \tau, \eta, \frac{1}{k}\Big) B\Big(\tau_0 - \tau', \tau_0, \frac{1}{k}\Big) \Big] + & \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 [A(\tau' - \tau, \eta, \mu) + e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}} A(\tau_0 - \tau', -\eta, \mu) - & \\ - A(\tau_0 - \tau, \eta, -\mu) e^{-\tau_0/\mu} B(\tau', \tau_0, \mu) - & \\ - A(\tau_0 - \tau, \eta, \mu) B(\tau_0 - \tau', \tau_0, \mu)] \frac{d\mu}{\mu R(\mu)}. & \end{aligned} \tag{19}$$

В этих формулах A — элементарная функция, введенная выше. При получении последнего выражения интеграл, присутствующий в (17), необходимо разбить на два интеграла в пределах от τ до τ' и от τ' до τ_0, ввиду наличия в (14) модуля разности $|\tau-\tau'|$. Для случая же, когда $\tau > \tau'$, величину $p(\tau, \tau', \tau_0, \eta)$ можно найти, если воспользоваться частным случаем выражения, полученного О. В. Пикичяном [14].

$$\begin{gathered} p(\tau', \tau, \tau_0, -\zeta) = p(\tau, \tau', \tau_0, \zeta) - \\ -\frac{\zeta}{2\pi}\left[U(\tau', \tau_0, \zeta)\, V(\tau, \tau_0, \zeta) - U(\tau_0-\tau', \tau_0, \zeta)\, V(\tau_0-\tau, \tau_0, \zeta)\right]. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь $U(\tau, \tau_0, \zeta)$ и $V(\tau, \tau_0, \zeta)$ — вспомогательные функции, введенные в работе [14], определены как для положительных, так и для отрицательных значений аргумента ζ и просто выражаются через вспомогательные функции f и $\tilde{f}$ (подробнее об этом см. [8]). Таким образом, считая заданными функции $a(\zeta, \tau_0)$ и $b(\zeta, \tau_0)$, можно двукратным интегрированием по угловой переменной найти также характеристики поля излучения, как резольвенту — $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$, а также $p(\tau, \tau', \tau_0, \eta)$ и $G(\tau, \tau', \tau_0, \eta, \zeta)$ — величины, дающие интенсивность излучения на глубине τ, если на глубине τ' имеется изотропный или мононаправленный первичный источник (выше говорилось о том, что функция Грина — G выражается алгебраически через p).

4. *Частные задачи.* В работах [15] и [11] для величины вероятности выхода кванта — $p(\tau, \tau_0, \eta)$ приводится следующая формула:

$$\frac{4\pi}{\lambda}\, p(\tau, \tau_0, \eta) = \varphi(\eta, \tau_0)\, f(\tau, \tau_0, \eta) - \psi(\eta, \tau_0)\, \tilde{f}(\tau_0-\tau, \tau_0, \eta). \tag{21}$$

Устремляя в последней η к бесконечности и учитывая, что

$$\varphi(\infty, \tau_0) = \psi(\infty, \tau_0) = \frac{1}{1-\lambda/2\,[\varphi_0(\tau_0) - \psi_0(\tau_0)]},$$

$$\frac{4\pi}{\lambda}\, p(\tau, \tau_0, \infty) = \overline{N}(\tau, \tau_0),$$

для среднего числа рассеяний фотона, получим следующее выражение:

$$\begin{gathered} \overline{N}(\tau, \tau_0)\left[1-\frac{\lambda}{2}\varphi_0(\tau_0) - \frac{\lambda}{2}\psi_0(\tau_0)\right] = 1 + \\ +\frac{C}{k}\left[a\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) + b\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right)\right]\left(1-e^{-k\tau} - e^{-k(\tau_0-\tau)} + e^{-k\tau_0}\right) + \\ +\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{[a(\mu, \tau_0) + b(\mu, \tau_0)]\left(1-e^{-\tau/\mu} - e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\mu}} + e^{-\tau_0/\mu}\right)}{R(\mu)}\, d\mu. \end{gathered} \tag{22}$$

Частный случай консервативного рассеяния ($\lambda = 1$) приходится рассматривать особо, поскольку при этом в полученных явных выражениях появляются неопределенности типа $0 \cdot \infty$ (множитель C во внеинтегральном члене стремится к бесконечности, а величина в скобках стремится к нулю). Опуская несложные выкладки, приведем лишь некоторые окончательные выражения для этого важного частного случая:

$$\psi_0(\tau_0)\overline{N}(\tau, \tau_0) = 1 + \frac{3}{2}\tau(\tau_0 - \tau)\psi_0(\tau_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{[a(\mu, \tau_0) + b(\mu, \tau_0)](1 - e^{-\tau/\mu} - e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\mu}} + e^{-\tau_0/\mu})}{R(\mu)} d\mu, \tag{23}$$

$$f(\tau, \tau_0, \eta) = e^{-\tau/\eta} + \frac{3}{2}\eta(1 - e^{-\tau/\eta})[\psi_1(\tau_0) + (\tau_0 + \eta)\psi_0(\tau_0)] -$$

$$- \frac{3}{2}\eta\tau\psi_0(\tau_0) + \tag{24}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{a(\mu, \tau_0)A(\tau, \eta, \mu) - b(\mu, \tau_0)A(\tau, \eta - \mu)e^{-\tau_0/\mu}}{\mu R(\mu)} d\mu,$$

$$\overline{f}(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta) = \frac{3}{2}\eta(1 - e^{-\tau/\eta})[\varphi_1(\tau_0) - (\tau_0 + \eta)\psi_0(\tau_0)] + \frac{3}{2}\eta\tau\psi_0(\tau_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{a(\mu, \tau_0)A(\tau, \eta, -\mu)e^{-\tau_0/\mu} - b(\mu, \tau_0)A(\tau, \eta, \mu)}{\mu R(\mu)} d\mu \tag{25}$$

$$p(\tau, \tau', \tau_0, -\eta) = \frac{3}{4}\eta(1 - e^{-\tau/\eta})\Big| P_1(\tau', \tau_0) + P_1(\tau_0 - \tau', \tau_0) +$$

$$+ \tau_0 P_0(\tau_0 - \tau', \tau_0) - 2P_0(\tau', \tau_0)\eta - \frac{\tau'}{2\pi}\Big| + \frac{3}{2}\tau\eta P_0(\tau', \tau_0) + \tag{26}$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\int_0^1 \frac{[e^{-\tau'/\mu} - e^{-\tau_0/\mu}B(\tau_0 - \tau', \tau_0, \mu)]A(\tau, \eta, -\mu) - B(\tau', \tau_0, \mu)A(\tau, \eta, \mu)}{\mu R(\mu)} d\mu,$$

$$\begin{aligned} p(\tau, \tau', \tau_0, \eta) = {} & \frac{3}{2}\eta\left(1 - e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}}\right)\left[P_1(\tau', \tau_0) - (\tau_0 + \eta) P_0(\tau', \tau_0) - \right. \\ & \left. - \frac{\tau_0 - \tau}{4\pi}\right] - \frac{3}{2}\eta(\tau_0 - \tau) P_0(\tau', \tau_0) + e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} + \\ & + \frac{3\eta^2}{4\pi}\left(e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} - e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta}}\right) + \frac{3}{8\pi}(\tau_0 - \tau')\left(1 + e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}}\right) + \\ & + \frac{1}{8\pi}\int_0^1 \left[A(\tau' - \tau, \eta, \mu) + e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} A(\tau_0 - \tau', -\eta, \mu) - \right. \\ & - A(\tau_0 - \tau, \eta, -\mu) e^{-\tau_0/\mu} B(\tau', \tau_0, \mu) - \\ & \left. - A(\tau_0 - \tau, \eta;\ \mu) B(\tau_0 - \tau', \tau_0, \mu)\right] \frac{d\mu}{\mu R(\mu)}. \end{aligned} \tag{27}$$

В формулах (22)—(27), φ_0, ψ_0, P_0 и φ_1, ψ_1, P_1 — соответственно нулевые и первые угловые моменты функций $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta;\ \tau_0)$ и $p(\tau, \tau_0, \eta)$. Выражения для $\Phi(\tau, \tau_0)$ и $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ для случая консервативного рассеяния приводятся в работе [12].

Особенно простые выражения можно получить для аналогичных характеристик излучения в полубесконечной среде, однако здесь мы эти выражения не приводим по причине тривиальности предельного перехода при $\tau_0 \to \infty$.

5. *Интегральные уравнения для функций* $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ и $a(\eta, \tau_0)$, $b(\eta, \tau_0)$. В полученные выше выражения (11), (12), (18), (19), (22)—(27), так же, как и в (8) и (14), входят вспомогательные функции $a(\eta, \tau_0)$ и $b(\eta, \tau_0)$. Численные значения этих функций можно найти по формулам (9), если имеются таблицы φ и ψ-функций Амбарцумяна. Можно указать и другой путь для их нахождения, не прибегая при этом к помощи таблиц φ и ψ-функций. Так, из формул (7) следует, что

$$f(\tau_0, \tau_0, \eta) = \psi(\eta, \tau_0) \text{ и } \tilde{f}(0, \tau_0, \eta) = \varphi(\eta, \tau_0) - 1.$$

Полагая в (11) и (12) $\tau = \tau_0$, получим

$$\begin{aligned} \psi(\eta, \tau_0) = e^{-\tau_0/\eta} + C & \left[a\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) A\left(\tau_0, \eta, \frac{1}{k}\right) - \right. \\ & \left. - b\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right) A\left(\tau_0, \eta, -\frac{1}{k}\right) e^{-k\tau_0}\right] + \end{aligned} \tag{28}$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{a(\mu,\tau_0)A(\tau_0,\eta,\mu)-b(\mu,\tau_0)A(\tau_0,\eta,-\mu)e^{-\tau_0/\mu}}{\mu R(\mu)}d\mu.$$

$$\varphi(\eta,\tau_0)=1+C\left[a\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)A\left(\tau_0,\eta,-\frac{1}{k}\right)e^{-k\tau_0}-\right.$$

$$\left.-b\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)A\left(\tau_0,\eta,\frac{1}{k}\right)\right]+ \tag{29}$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{a(\mu,\tau_0)A(\tau_0,\eta,-\mu)e^{-\tau_0/\mu}-b(\mu,\tau_0)A(\tau_0,\eta,\mu)}{\mu R(\mu)}d\mu.$$

Последнее выражение при $\tau_0=\infty$ переходит в уравнение для φ-функции Амбарцумяна,

$$\varphi(\eta)=1+\frac{C\eta}{\varphi(1/k)(1+k\eta)}+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{d\mu}{R(\mu)\varphi(\mu)(\mu+\eta)}, \tag{30}$$

полученное Р. Р. Андреасяном и нами другим путем [16] (для частного случая $\lambda=1$ ранее оно было получено В. Г. Буславским [17]). Это уравнение примечательно тем, что при его численном решении скорость сходимости итерационного процесса очень велика и не зависит от значения параметра λ. Выражения (28) и (29) можно рассматривать, имея ввиду (9), как систему интегральных уравнений для нахождения φ и ψ-функций. При численном решении такой системы, итерационный процесс также сходится быстро (если заданы значения величины $a(1/k,\tau_0)$ и $b(1/k,\tau_0)$ и независимо от λ). Это показано в работе [12], в которой получена система интегральных уравнений для более общего случая определения граничных интенсивностей при произвольных первичных источниках. Умножая (28) и (29) на $\frac{\lambda}{2}\frac{\zeta d\zeta}{\eta+\zeta}$ и интегрируя в пределах от нуля до единицы, получим систему интегральных уравнений для вспомогательных функций $a(\zeta,\tau_0)$ и $b(\zeta,\tau_0)$.

$$b(\zeta,\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\zeta\int_0^1\frac{e^{-\tau_0/\eta}}{\eta+\zeta}d\eta+C\left[a\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)\overline{A}\left(\tau_0,\zeta,\frac{1}{k}\right)-\right.$$

$$\left.-b\left(\frac{1}{k},\tau_0\right)\overline{A}\left(\tau_0,\zeta,-\frac{1}{k}\right)e^{-k\tau_0}\right]+ \tag{31}$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{a(\mu,\tau_0)\overline{A}(\tau_0,\zeta,\mu)-b(\mu,\tau_0)\overline{A}(\tau_0,\zeta,-\mu)e^{-\tau_0/\mu}}{\mu R(\mu)}d\mu.$$

$$a(\zeta, \tau_0) = 1 - \frac{\lambda}{2}\zeta \ln\frac{1+\zeta}{\zeta} -$$

$$- C\left[a\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right)\overline{A}\left(\tau_0, \zeta, -\frac{1}{k}\right)e^{-k\tau_0} - b\left(\frac{1}{k}, \tau_0\right)\overline{A}\left(\tau_0, \zeta, \frac{1}{k}\right)\right] - \tag{32}$$

$$- \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{a(\mu, \tau_0)\overline{A}(\tau_0, \zeta, -\mu)e^{-\tau_0/\mu} - b(\mu, \tau_0)\overline{A}(\tau_0, \zeta, \mu)}{\mu R(\mu)}\, d\mu$$

где $\overline{A}$ — уже неэлементарная функция

$$\overline{A}(\tau, \zeta, \mu) = \frac{\lambda}{2}\zeta\int_0^1 \frac{A(\tau, \eta, \mu)}{\eta + \zeta}\, d\eta$$

6. *Заключение*. Явные выражения для функций f, $\tilde{f}$ и $p(\tau, \tau', \tau_0, \eta)$ позволяют, после предварительного нахождения функций $a(\eta, \tau_0)$ и $b(\eta, \tau_0)$, по формулам (9) или из системы (31)—(32) рассчитать любую характеристику поля излучения в рассеивающей среде конечной оптической толщины, вплоть до функции Грина, всего лишь одно или двукратным интегрированием по угловой переменной, в принципе, с любой степенью точности.

Нами совместно с Р. Р. Андреасяном были проведены пробные вычисления величин $\Phi(\tau, \tau_0)$, f, $\tilde{f}$, $\overline{N}$ по формулам (8), (23)—(25), и полученные результаты сравнивались со значениями аналогичных величин, приведенных в работах [18, 19] и [10]. Как и в двух последних работах, была использована квадратурная формула Гаусса седьмого порядка, а значения функций $a(\zeta_i, \tau_0)$ и $b(\zeta_i, \tau_0)$ в узлах были вычислены по формуле Симпсона из выражений (9), значения же φ и ψ-функций Амбарцумяна брались из работы Дж. Л. Карлстеда и Т. В. Малликина [20]. Полученные нами численные значения совпали с вычисленными ранее другими авторами с точностью до нескольких единиц в четвертом, а иногда в пятом знаке.

В заключение автор искренне благодарит академика В. А. Амбарцумяна за руководство и проявленный интерес к настоящей работе, а также Р. Р. Андреасяна и О. В. Пикичяна за помощь и неоднократные обсуждения.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

ON THE THEORY OF ISOTROPIC SCATTERING OF RADIATION IN HOMOGENEOUS PLANE PARALLEL SLAB

E. KH. DANIELIAN

Explicit expressions of the characterizations of the diffuse field radiation are deduced in the homogeneous plane parallel slab of finite optical thickness for the case of isotropic scattering. It has been shown, that any characterization of the radiated field, down to Green's function, depending on five arguments, no more than double integration on angular variable may be found if there are numerical values of some auxiliary functions, depending on two arguments. The numerical values of the last may be found by the table of Ambartsumian functions or independently, from some system of linear integral equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Астрон. ж., 19, 30, 1942.
2. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
3. *T. W. Mullikin*, Proc. Interdisciplinary Conference on Electromagnetic Scattering. Univ. of Massachusets, 1965, p. 697.
4. *С. Д. Гутшабаш*, Вестн. ЛГУ, № 1, 158, 1957.
5. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 101, 1975.
6. *Э. Г. Яновицкий*, ДАН СССР, 227, 1319, 1976.
7. *A. L. Crosbie, T. L. Linsenbardt*, AIAI J., 15, No. 11, 1604, 1977. (русск. пер. Ракетная техника и космонавтика, стр. 84, 1977).
8. *Э. Х. Даниелян, О. В. Пикичян*, Астрофизика, 13, 275, 1977.
9. *Р. Р. Андреасян*, Сообщ. Бюраканской обс., 50, 79, 1978.
10. *H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba*, Ap. J., 147, 301, 1967.
11. *Э. Х. Даниелян*, Астрофизика, 12, 579, 1976.
12. *Н. Н. Роговцов, А. М. Самсон*, Журнал прикладной спектроскопии, 25, 512, 1976.
13. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
14. *О. В. Пикичян*, Астрофизика, 14, 169, 1978.
15. *H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba*, JQSRT, 8, 843, 1968.
16. *Р. Р. Андреасян, Э. Х. Даниелян*, Сообщ. Бюраканской обс., 50, 114, 1978.
17. *В. Г. Буславский*, Изв. Крымской обс., 35, 81, 1966.
18. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 9, 347, 1973.
19. *Ж. Белл, Р. Калаба, С. Уэно*, Астрофизика, 7, 23, 1971.
20. *J. L. Carlsted, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., 12, No. 113, 1966.