

УДК 52—64

# ВЫСОКОТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ АМБАРЦУМЯНА

Функция Амбарцумяна  $\varphi(\mu)$ , т. е. решение уравнения

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{2} \mu \varphi(\mu) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu') d\mu'}{\mu + \mu'}, \quad (1)$$

играет фундаментальную роль в задачах об изотропном рассеянии излучения (см., например, [1—4]). Подробное исследование ее свойств проведено в [2, 4]. Она неоднократно табулировалась (см., например, [2, 5]). Однако в различных задачах вычислительного характера, реализуемых на ЭВМ, иногда бывает удобным не отводить значительного места под таблицы  $\varphi(\mu)$ , а пользоваться приближенными формулами, позволяющими быстро вычислить эту функцию с достаточной точностью. Формулы такого рода приводятся, например, в [6]. Однако обеспечиваемая ими точность при консервативном рассеянии ( $\lambda = 1$ ) не превосходит нескольких единиц четвертой цифры после запятой. В настоящей заметке предлагается для случая консервативного рассеяния следующая аппроксимация функции Амбарцумяна (подобные аппроксимации обычно используются для расчета значений функций в стандартных программах современного математического обеспечения ЭВМ):

$$\varphi(\mu) \approx \varphi_N(\mu) = \sum_{j=0}^N A_j T_j^*(\beta), \quad \mu \in [0, 1], \quad (2)$$

где  $\beta = b\mu \ln \mu + \mu$ , а  $T_j^*(\beta) = T_j(2\beta - 1) = \cos(j \arccos(2\beta - 1))$  — сдвинутый полином Чебышева  $j$ -ого порядка. Коэффициенты  $A_j$  разложения  $\varphi(\mu)$  по полиномам  $T_j^*(\beta)$  определяются формулами:

$$A_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N \varphi(\mu_k) \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right), \quad j=0, 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $\mu_k$  — корни уравнения  $\beta_k - b\mu_k \ln \mu_k - \mu_k = 0$ , в котором  $\beta_k = 1/2(1 + \cos(\pi k/N))$ . Два штриха у знака суммы означает, что при суммировании первое и последнее слагаемые домножаются на  $1/2$ . Величина параметра  $b$  выбиралась таким образом, чтобы обеспечивалось минимальное значение максимума модуля относительной погрешности  $r(\mu) = (\varphi(\mu) - \varphi_N(\mu))/\varphi(\mu)$  представления (2). Значения  $\varphi(\mu_k)$ , необходимые для вычисления коэффициентов  $A_j$  по (3), находились

с помощью интерполяции по предварительно детально табулированной (с девятью значащими цифрами) функции  $\varphi(\mu)$ . Табулирование  $\varphi(\mu)$  проводилось путем итеративного решения нелинейного интегрального уравнения (1) по алгоритму, используемому в [7]. Значения коэффициентов  $A_j$  и параметра  $b$  при  $N=7$  даны в табл. 1. При

Таблица 1  
КОЭФФИЦИЕНТЫ  $A_j$  И  
ПАРАМЕТР  $b$  ПРИ  $N=7$

| $j$ | $A_j$      |
|-----|------------|
| 0   | 1825956+1  |
| 1   | 9382737+0  |
| 2   | 1253050-0  |
| 3   | 1511753-1  |
| 4   | 2547468-2  |
| 5   | 4908992-3  |
| 6   | 9633836-4  |
| 7   | 2312970-4  |
| $b$ | -4583602-0 |

(запись — 5000000-3 следует понимать как  $-0.5 \cdot 10^{-3}$ )

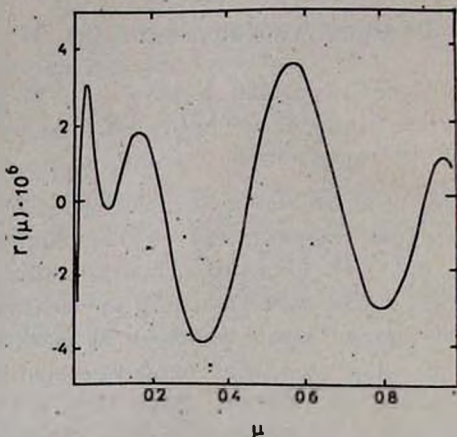


Рис. 1. Относительная погрешность представления (2) в зависимости от  $\mu$  при  $N=7$ .

$N=5, 6$ , и  $7$   $\max |r(\mu)|$  не превосходит  $5 \cdot 10^{-5}$ ,  $3 \cdot 10^{-5}$  и  $4 \cdot 10^{-6}$  соответственно. Поведение  $r(\mu)$  в зависимости от  $\mu$  изображено на рис. 1. Суммирование в (2) удобно выполнять, используя известный метод Кленшоу (см. например, [8], стр. 123). Отметим, что при точности, обеспечиваемой (2) с  $N=7$ , дробно-рациональное приближение  $\varphi(\mu)$  полиномами Чебышева по аргументу  $\mu$ , по-видимому, не позволяет добиться существенного уменьшения времени счета по сравнению с (2).

Автор искренне признателен В. В. Иванову за полезные обсуждения.

*A High Accuracy Approximation of Ambartsumian's Function.*  
The coefficients of high accuracy approximation of the Ambartsumian's function for the case of conservative scattering are given.

26 июля 1982

Ленинградский государственный  
университет

А. Б. ШНЕЙВАЙС

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
2. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГТТИ, М., 1956.
4. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
5. D. W. N. Stibbs, R. E. Wier, M. N. RAS, 119, 512, 1959.
6. S. Karanjai, M. Sen, P.A.S. Japan, 22, 235, 1970.
7. В. М. Лоскутов, Труды АО АГУ, 29, 35, 1973.
8. D. G. Hummer, G. Rybicki, Methods in Computational Physics, 7, 53, 1967.

УДК 523.877

## К УРАВНЕНИЮ СОСТОЯНИЯ ВЫРОЖДЕННОГО ЗВЕЗДНОГО ВЕЩЕСТВА

Уравнение состояния вырожденного сверхплотного вещества исследовалось в работах [1—3] и в ряде других. Для области плотностей ниже ядерной и выше порога формирования кварковой фазы имеется более или менее ясная картина. Однако в области адронной плазмы по известным причинам ситуация сложнее и пока не имеется адекватного представления. В [2, 3] для этой области были найдены не совсем удачные аппроксимации, приводящие к нефизической зависимости скорости звука от давления. В настоящем сообщении найдены аппроксимации, лишенные указанных недостатков. Уточнено также уравнение состояния для соседних областей плотности.

При исследовании равновесного состояния плазмы удобно исходить из следующих общих термодинамических соотношений для вырожденного вещества:

$$\frac{1}{n} = \frac{d\mu}{dP}, \quad \rho c^2 = \mu n - P, \quad \frac{c^2}{v^2} = \frac{d\rho c^2}{dP} = -\mu n^2 \frac{d^2\mu}{dP^2}. \quad (1)$$

Здесь  $P$  — давление,  $\mu$  — химический потенциал нейтрона или электро-нейтральной комбинации частиц с барионным зарядом 1 в кварковой фазе плазмы;  $n$  — барионный заряд единицы объема,  $\rho c^2$  — плотность полной энергии,  $v$  — скорость звука.

В Ае-плазме (атомные ядра и вырожденный электронный газ) давление [1]:

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} [x(2x^2 - 3)\sqrt{1+x^2} + 3 \ln(x + \sqrt{1+x^2})], \quad (2)$$