

УДК 52—6—64

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ
В ЛИНИИ ПРИ ЧАСТИЧНОМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ
ПО ЧАСТОТЕ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 27 января 1982

Принята к печати 27 июля 1982

Рассматривается многократное рассеяние излучения в спектральной линии, расширение которой обусловлено только движением атомов в бесконечной среде при однородных и изотропных источниках. Непрерывное поглощение не учитывается. Найдено точное выражение для интенсивности излучения при произвольной зависимости мощности первичных источников от частоты. Из него получена интенсивность при нестационарных источниках, излучающих в центре линии, если задержка фотонов определяется только временем, которое они проводят в поглощенном состоянии. Изучено асимптотическое поведение интенсивности в крыле линии и на больших временах.

1. *Введение.* В последнее время большое развитие получила теория образования спектральных линий при частичном (не полное) перераспределении по частоте (ЧПЧ) при каждом акте рассеяния. Предложены и широко применяются численные методы решения задач [1, гл. 13], получены общие уравнения и соотношения между функциями, описывающими поля излучения (см., например, [2, 3]), и асимптотические оценки различных величин [4—6]. Вместе с тем точное решение известно лишь для одной задачи [7] (стационарной, с ним связано решение нестационарной задачи, см. ниже). В настоящей работе точное решение (также стационарное и нестационарное) получено еще для одного случая.

2. *Стационарное свечение бесконечной среды.* Точные решения удается получить лишь для идеализированной задачи об изотропном и однородном поле излучения при чисто доплеровском уширении линии в бесконечной среде в линейном приближении.

Пусть в такой среде равномерно распределены атомы с двумя дискретными уровнями и континуумом и в каждой точке все время изотропно излучаются фотоны безразмерной частоты x , (расстояние от центра линии в доплеровских ширинах). Тогда уравнение, определяющее интенсивность излучения I произвольной частоты x , имеет вид

$$[\Phi(x) + \beta] I - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} R(x, x') I(x', x_1) dx' = \delta(x - x_1), \quad (1)$$

где $\Phi(x)$ — профиль коэффициента поглощения, нормированный так, что интеграл от него по x равен 1; β — отношение коэффициента поглощения в континууме к полному поглощению в линии, деленному на ее ширину; λ — вероятность выживания фотона при рассеянии в линии; $R(x, x')$ — функция перераспределения (ФП). Интенсивность $I(x, x_1)$ является функцией Грина нашей задачи, и интенсивность излучения при произвольной зависимости мощности источников от частоты x_1 выражается через интеграл по x_1 от произведения этой мощности на $I(x, x_1)$.

Уравнение (1) легко решается, если имеется полное перераспределение по частоте (ППЧ), то есть $R(x, x') = \Phi(x)\Phi(x')$. Приведем это решение для сравнения с решением в случае ЧПЧ. Оно имеет вид

$$I(x, x_1) = \frac{\delta(x - x_1)}{\Phi(x_1) + \beta} + \frac{\Phi(x)}{\Phi(x) + \beta} \frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_1) + \beta} \frac{\lambda}{1 - \lambda + \lambda\Delta(\beta)}, \quad (2)$$

где

$$\Delta(\beta) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) [\Phi(x) + \beta]^{-1} dx. \quad (3)$$

Выражение (2) является решением (1) при ППЧ с произвольным профилем $\Phi(x)$.

Чисто доплеровскому профилю $\Phi(x) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}$, строго говоря, соответствует не ППЧ, а ФП (см., например, [1], гл. 13, [8]),

$$R(x, x_1) = \int_{\frac{x}{\bar{x}}}^{\infty} \Phi(y) dy, \quad (4)$$

где $\bar{x} = \max(|x|, |x_1|)$. Точные решения (1) получаются для этого случая, когда либо $\lambda = 1$, либо $\beta = 0$.

Отметим, что в работе [9] решение уравнения (1) с ФП (4) сведено к решению дифференциального уравнения второго порядка с начальными условиями, а в [10] это уравнение решено численно при $\lambda = 0.7$; $\beta = 10^{-3} \pi^{-1/2}$.

3. Точные решения ЧПЧ с ФП (4). а) Случай $\lambda = 1$. Легко показать, что когда фотоны гибнут только в континууме, а в линии происходит чистое рассеяние ($\lambda = 1$), то

$$I(x, x_1) = \delta(x - x_1) [\Phi(x_1) + \beta]^{-1} + \int_{\frac{x}{\beta}}^{\infty} \Phi(y) [\Phi(y) + \beta]^{-2} dy. \quad (5)$$

При $x_1 = 0$ такое решение получено в [7].

б) Случай $\beta = 0$. Когда гибель фотонов происходит только вследствие истинного поглощения в линии, а поглощения в континууме нет ($\beta = 0$, $\lambda < 1$), то функция Грина получается более сложной и имеет вид

$$I(x, x_1) = \delta(x - x_1) / [\Phi(x_1) + \lambda F_1(x)] W(x). \quad (6)$$

Здесь $x = \min(|x|, |x_1|)$, $F_1(x) = \pi^{1/2} F(1/2 - \lambda/2, 1/2, x^2)$, где F — вырожденная гипергеометрическая функция, а функция $W(x)$ определяется через $F_1(x)$ и $F_2(x) = |x| F(1 - \lambda/2, 3/2, x^2)$ или через функцию Уиттекера:

$$\begin{aligned} W(x) &= \Gamma(1/2 - \lambda/2) F_1(x) / 2\Gamma(1 - \lambda/2) \pi^{1/2} - F_2(x) = \\ &= \Gamma(1/2 - \lambda/2) \pi^{-1/2} 2^{-1} e^{x^2/2} |x|^{-1/2} W_{-1/4+\lambda/2, 1/4}(x^2) = \\ &= \pi^{-1/2} 2^{-1} \int_0^{\infty} e^{-ux^2} u^{-1/2-\lambda/2} (1+u)^{-1+\lambda/2} du. \end{aligned} \quad (7)$$

Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ при $\lambda \leq 1$ и $|x| \rightarrow \infty$ экспоненциально возрастают, а $W(x)$ убывает (см. ниже).

Убедиться, что (6) действительно является решением (1) при $\beta = 0$, можно прямой подстановкой, воспользовавшись свойствами вырожденных гипергеометрических функций ([11], формулы 9.212 (1), 9.213) и следующими из них соотношениями ($x \geq 0$):

$$F_3(x) = \int_0^x F_1(x') dx' = \pi^{1/2} x F(1/2 - \lambda/2, 3/2, x^2) = [2xF_1(x) - F_1'(x)]/2\lambda. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \int_0^x F_2(x') dx' = [1 - F(-\lambda/2, 1/2, x^2)]/2\lambda = \\ &= [2xF_2(x) - F_2'(x) + 1]/2\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

а также

$$\int_x^{\infty} \Phi(x') F_3(x') dx' = \Phi(x) F_1(x)/2\lambda, \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x') F_4(x') dx' = [R(x, 0) + \Phi(x) F_2(x)]/2\lambda. \quad (11)$$

При этом понадобятся также вронскиан функций F_1 и F_2

$$F_1(x) F_2'(x) - F_1'(x) F_2(x) = 1/\Phi(x) \quad (12)$$

и определитель, составленный из четырех функций $F_i(x)$ и равный согласно (8), (9) и (12)

$$F_1(x) F_4(x) - F_2(x) F_3(x) = [F_1(x) - 1/\Phi(x)]/2\lambda. \quad (13)$$

Функция F_1 является решением однородного уравнения, соответствующего (1). Заметим, что собственной функцией (с. ф.) уравнения (1) функция F_1 будет лишь тогда, когда при $x \rightarrow \infty$ она не возрастает экспоненциально. Поэтому собственные значения (1) равны $\lambda_n = 2n + 1$, а с. ф. суть $F(-n, 1/2, x^2)$. Они с точностью до численного множителя совпадают с многочленами Эрмита $H_{2n}(x)$. По этим с. ф. можно разложить ФП (4) (см. [12] или [13]) и решение (6):

$$I(x, x_1) = \frac{\delta(x - x_1)}{\Phi(x_1)} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(x) H_{2n}(x_1)}{2n + 1 - \lambda} \frac{1}{2^{2n} (2n)!}. \quad (14)$$

Из (14) можно получить выражения для вкладов рассеяний различных кратностей, если разложить дробь $[2n + 1 - \lambda]^{-1}$ по степеням λ .

Отметим, что (6) сильно упрощается при $x_1 = 0$, а именно:

$$I(x, 0) = \pi^{1/2} \delta(x) + \lambda \pi^{1/2} W(x). \quad (15)$$

Если $\lambda \rightarrow 1$, то интенсивность излучения стремится к бесконечности. Легко показать, что тогда при фиксированных x и x_1 интенсивность $I(x, x_1) \sim (1 - \lambda)^{-1}$. В крыле линии ($|x| \rightarrow \infty$) поведение интенсивности излучения определяется функцией $W(x)$, для которой

$$W(x) \sim \Gamma(1/2 - \lambda/2) |x|^{-(1-\lambda)/2} \pi^{1/2}. \quad (16)$$

4. *Нестационарное свечение бесконечной среды.* Если мощность источников в бесконечной среде зависит от частоты и от времени, то нестационарная интенсивность определяется уравнениями

$$\begin{aligned} t_2 \partial I / \partial t &= -[\Phi(x) + \beta] I + \Phi(x) S(x, t), \\ t_1 \partial S / \partial t &= -S + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} R(x, x') I(x', t) dx' / \Phi(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь согласно обозначениям [8] t_1 — среднее время, проводимое фото-нами в поглощенном состоянии, а t_2 — в пути между рассеяниями, S — функция источников, пропорциональная энергии, излучаемой на частоте x , деленной на $\Phi(x)$. К уравнениям (17) необходимо добавить начальные условия для I (если только $t_2 \neq 0$) и для S (кроме случая $t_1 = 0$).

Как известно (см., например, [14]), применение преобразования Лапласа по времени к нестационарным уравнениям переноса сводит их к стационарным, в которых λ заменено на $\lambda/(1 + st_1)$ и β на $\beta + st_2$ где s — аргумент преобразования. Легко убедиться, что и (17) сводится к (1) с теми же заменами, причем источниковый член оказывается равным $[t_2 I + t_1 \Phi(x) S / (1 + st_1)]_{t=0}$. Следовательно, нужно, воспользовавшись решениями стационарных задач, обратить преобразование Лапласа.

В случае ППЧ решение (17) получено при $\lambda = 1$, $\beta = 0$, $t_1 = 0$ и доплеровском профиле поглощения в [15], а при любых профилях, $\lambda \leq 1$, β , t_1 и t_2 — в [16]. Заметим, что при $t_2 = 0$, $t_1 = 1$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$ и начальном условии $I(x, x_1, 0) = S = \delta(x - x_1) / \Phi(x_1)$ решение имеет вид (здесь, как и в (2), $\Phi(x)$ — произвольно)

$$I(x, x_1, t) = \delta(x - x_1) e^{-t} / \Phi(x) + 1 - e^{-t}. \quad (18)$$

При ЧПЧ решение, как и стационарное, удастся получить также при ФП вида (4) в двух крайних случаях: $\lambda = 1$, $t_1 = 0$ и $\beta = 0$, $t_2 = 0$.

5. Нестационарные решения при ЧПЧ.

а) Случай $\lambda = 1$, $t_1 = 0$. Не ограничивая общности можно считать, что $t_2 = 1$, а $\beta = 0$. Для отличного от нуля β решение получается домножением решения, соответствующего $\beta = 0$, на $e^{-\beta t}$. Из (5) при начальном условии $I(x, x_1, 0) = \delta(x - x_1)$ легко вывести

$$I(x, x_1, t) = \delta(x - x_1) e^{-t\Phi(x_1)} + t \int_{x_1}^{\infty} \Phi(y) e^{-t\Phi(y)} dy. \quad (19)$$

Это решение было найдено Филдом [7]. Хотя он считал, что $x_1 = 0$, но и в случае произвольных x_1 решение получается так же.

б) Случай $t_2 = 0$, $\beta = 0$. Здесь тоже можно положить $t_1 = 1$, $\lambda = 1$. Если $\lambda < 1$, то (см. [17] или [14]) в решении при $\lambda = 1$ надо заменить t на λt и умножить результат на $\lambda e^{-(1-\lambda)t}$. Хотя в принципе можно выписать решение при любом x_1 , мы ограничимся случаем $x_1 = 0$, то есть начальным условием $I(x, 0, 0) = S = \pi^{1/2} \delta(x)$. Исходя из (9) и пользуясь формулами 5.5 (31, 35) из таблиц [18], получим

$$I(x, 0, t) = \pi^{1/2} \delta(x) e^{-t} + \\ + (t/2)^{1/2} e^{-t} \int_0^{\infty} \exp[-x^2/(e^y - 1)] dy I_1((2ty)^{1/2}) [y(e^y - 1)]^{-1/2}. \quad (20)$$

Решение для любого x_1 легко получить из (14). Оно имеет вид

$$I(x, x_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n}(x) H_{2n}(x_1) \exp[-2nt/(2n+1)] / 2n^{2n} (2n)! \quad (21)$$

Решение (20), как и (18), нормировано таким образом, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) I(x, x_1, t) dx = 1. \quad (22)$$

Методом перевала из (20) можно получить, что при $\ln x \gg 1$ и $\ln x \gg t$

$$I(x, 0, t) \sim (\pi t / \ln x)^{1/2} e^{-t} I_1(2(t \ln x)^{1/2}) / 2x. \quad (23)$$

В противоположном случае $t \gg 1$, $t \gg \ln x$ интенсивность достигает своего асимптотического значения, как и у (18), равного 1. Линия имеет бесконечно узкий пик в центре, сила которого убывает со временем экспоненциально. Этот пик накладывается на плато высоты 1, простирающееся до частот $x \sim e^t$. В более далеком крыле интенсивность убывает с частотой и растет со временем согласно (23). В случае же ППЧ интенсивность (18) вне пика вообще не зависит от частоты.

Так же себя ведет решение задачи, получающееся при условии, что интенсивность имеет δ -образную особенность по t . Интенсивность при любом t в этом случае равна сумме (20) и производной от нее по t . При дифференцировании следует учесть, что в точке $t=0$ функция (20) имеет скачок. В результате получится

$$I(x, 0, t) = \pi^{1/2} \delta(x) \delta(t) + \frac{1}{2} e^{-t} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{e^y - 1}\right] \frac{dy}{(e^y - 1)^{1/2}} I_0((2yt)^{1/2}). \quad (24)$$

При $t \gg \ln x$ выражение (24) близко к 1, как и (20). Асимптотика же (24) при $x \gg e^t$ получается из (23) или непосредственно из (24) и имеет вид

$$I(x, 0, t) \sim \pi^{1/2} e^{-t} I_0(2(t \ln x)^{1/2}) / 2x. \quad (25)$$

Асимптотики функций (20) и (24) можно получить и из асимптотик стационарного решения (15), в частности из (16), путем обращения преобразования Лапласа. Результаты получаются те же. В случае ППЧ соответствующая (24) интенсивность равна внеинтегральному слагаемому (24) плюс 1.

Таким образом, качественное поведение полученных решений при ЧПЧ с ФП (4) очень близко к поведению их при ППЧ. Различия наблюдаются только в очень далеком крыле. Вывод о близости рассеяния с ФП (4) и при ППЧ был сделан еще в [8].

Ленинградский государственный
университет

EXACT SOLUTIONS OF EQUATION OF TRANSFER OF LINE RADIATION WITH PARTIAL FREQUENCY REDISTRIBUTION

D. I. NAGIRNER

Multiple scattering of radiation in Doppler broadened spectral line in infinite medium is considered. The primary sources of radiation are assumed to be space-independent and isotropic. Continuum absorption is neglected. The exact expression is found for the intensity of radiation, frequency dependence of the power of primary sources is arbitrary. The intensity is also obtained for the case of time dependent primary sources assuming that the velocity of light is infinite. The time ($t \rightarrow \infty$) and frequency (line wings) asymptotic behaviour of the intensity is also studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Михалас, *Звездные атмосферы*, Мир, М., 1982.
2. N. B. Yengibarjan, A. G. Nikoghossian, J. Quant. Spectroscop. Radiat. Transfer, 13, 787, 1973.
3. A. G. Nikoghossian, H. A. Haruthuntan, Astrophys. Space Sci., 64, 269, 1979.
4. М. М. Баско, ЖЭТФ, 75, 1278, 1978.
5. H. Frisch, Astron. Astrophys., 83, 166, 1980.
6. H. Frisch, Astron. Astrophys., 87, 357, 1980.
7. G. B. Field, Ap. J., 129, 551, 1959.
8. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
9. Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, 9, 79, 1973.
10. H. A. Haruthuntan, A. G. Nikoghossian, J. Quant. Spectroscop. Radiat. Transfer, 19, 135, 1978.

11. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
12. W. Уппо, Ар. J., 129, 388, 1959.
13. D. G. Hummer, M.N.R.A.S., 125, 21, 1962.
14. Д. И. Нагирнер, Астрофизика, 10, 446, 1974.
15. V. V. Ivanov, Bull. Astron. Inst. Netherlands, 19, 192, 1967.
16. Д. И. Нагирнер, Вестн. ЛГУ, № 7, 138, 1977.
17. Д. И. Нагирнер, Астрофизика, 5, 31, 1969.
18. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. 1, Наука, М., 1969.