

УДК 52—337

ИНВАРИАНТНЫЕ СТРУКТУРЫ МАГНИТНОГО ЖГУТА

А. А. СОЛОВЬЕВ

Постулила 29 мая 1981

Принята к печати 18 марта 1982

В работе обсуждаются основные свойства экранированного магнитного жгута, обладающего конечным радиусом кривизны. Анализируются условия равновесия по сечению и по радиусу изгиба. Подробно рассмотрен вопрос об изменении структуры бессилового поля внутри магнитного жгута, связанном с изменением его (жгута) геометрических размеров. При этом в отличие от соответствующей работы Паркера, рассмотрено не только расширение или сжатие жгута по сечению, но и растяжение (сокращение) его в длину. Показано существование инвариантных структур магнитного поля, сохраняющих свой вид при изменении геометрических параметров жгута. Найдено, что при квазиравновесном переходе жгута из одного состояния в другое длина и шаг спирали жгута меняются пропорционально радиусу его поперечного сечения.

1. *Введение.* В работах Паркера ([1, 2] и др.) обсуждался вопрос об основных свойствах экранированных магнитных жгутов с бессильным внутренним полем. Цель данной работы состоит в том, чтобы дополнить и уточнить некоторые результаты, полученные Паркером. Речь идет о магнитоплазменных конфигурациях с цилиндрически симметричным магнитным полем $\vec{h}(0, h_\theta, h_z)$, экранированным на расстоянии a от оси цилиндра z однородной бесконечно проводящей плазмой с газовым давлением $P_{г\text{п}}$. Давление плазмы внутри цилиндра обозначим $P_{г\text{ж}}$ (r). Вдоль жгута сохраняется поток продольного поля:

$$\Phi = \int_0^a h_z(r) 2\pi r dr. \quad (1)$$

Строго говоря, учитывая вихревой характер магнитного поля, следует рассматривать не бесконечно длинный прямой цилиндр, а магнитный тороид или часть тороида, т. е. структуру конечной длины l . Однако, если радиус изгиба магнитной силовой трубки ρ значительно превосходит радиус ее поперечного сечения ($\rho \gg a$), то можно считать, что распределение поля в любой выделенной части магнитного тороида пренебрежи-

мо мало отличается от цилиндрически симметричного. В дальнейшем мы будем иметь дело именно с такими тонкими магнитными жгутами.

Паркером рассматривался также случай, когда параметры жгута слабо меняются вдоль его оси, но мы в данной работе ограничимся только рассмотрением однородных по длине жгутов: $d/dz = 0$.

2. Условия равновесия, устойчивости к изгибу и колебания скрученности. В качестве одного из основных свойств магнитного жгута Паркер [2] правильно отмечает тот факт, что средний по сечению квадрат напряженности продольного поля в жгуте не зависит от степени скрученности и определяется только разностью давлений между жгутом и окружающей средой: $\langle h_z^2 \rangle = 8\pi \Delta p$. Однако в работах Паркера это условие получено лишь для магнитных жгутов с бессиловым внутренним полем. Между тем ранее было найдено [3—5], что условие поперечного равновесия в форме

$$\frac{\langle h_z^2 \rangle}{8\pi} = P_{ex} - \langle P_{in} \rangle \quad (2)$$

справедливо для экранированных магнитных жгутов с любым распределением поля в жгуте, удовлетворяющим уравнениям Максвелла. Бессиловая структура внутри жгута соответствует условию $P_{in} = \text{const}$ и используется обычно лишь как наиболее простой, модельный случай, наглядно иллюстрирующий какие-либо общие выводы. Подчеркнем, что при этом жгут в целом не является бессиловым, так как $P_{ex} \neq P_{in}$ и на грани же перепад газового давления уравнивается перепадом магнитного давления. Это обстоятельство нам хотелось бы особо отметить, потому что в литературе нередко такие магнитные жгуты называются просто бессиловыми, и подобная терминология приводит иной раз к недоразумениям.

Что касается равновесия жгута по другому геометрическому параметру r (или l), то этот вопрос Паркер решает следующим образом. Он рассматривает в качестве исходного состояния системы прямой бесконечный цилиндр $r = \infty$, $l = \infty$. Баланс натяжений в жгуте таков, что при $\langle h_z^2 \rangle > 1/2 \langle h_r^2 \rangle$ доминирует натяжение продольного поля, стягивающее жгут вдоль оси. При выполнении обратного неравенства жгут подвержен растяжению и потому оказывается неустойчив к изгибу: любое сколь угодно малое искривление цилиндра приводит к тому, что в области искривления возникает сила, направленная по радиусу изгиба и стремящаяся увеличить этот изгиб, т. е. отклонение системы от исходного состояния. Так обстоит дело именно с прямым цилиндром. Но, как уже отмечалось выше, в реальных условиях исходной является все-таки замкнутая (тороид) или полузамкнутая (петля) конфигурация магнитного поля. В первом приближении это можно учесть, вводя сразу в рассмотрение

конечный, хотя и достаточно большой ($\rho \gg a$) радиус изгиба силовой трубки. Для такой системы вопрос о равновесии и устойчивости решается уже иначе, чем для прямого, бесконечно длинного цилиндра.

Если рассчитать отнесенную к единице объема силу, сопряженную параметру ρ , то получим [3—5]

$$f_{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\langle h_{\rho}^2 \rangle}{8\pi} (2 - x^*), \quad (3)$$

где x^* — параметр скрученности, определенный как отношение $\frac{\langle h_{\rho}^2 \rangle}{\langle h_{\rho}^2 \rangle}$.

Отметим попутно, что выражения (2), (3) могут быть получены из соответствующих выражений, найденных Шафрановым [8] для тонкого плазменного шнура с током, который удерживается от контакта с кожухом внешним по отношению к шнуру азимутальным полем $h_{\rho, \text{вн}}$. Для этого надо учесть, что в нашем случае поле $h_{\rho, \text{вн}}$ обращается в нуль вне жгута — условие экранировки. Действительно, из указанной работы следует

$$P_{\rho, \text{вн}} - \langle P_{\rho, \text{вн}} \rangle = \frac{\langle h_{\rho}^2 \rangle}{8\pi} - \frac{h_{\rho, \text{вн}}^2(a)}{8\pi}, \quad (2a)$$

$$F_{\rho} = \frac{V}{\rho} \left\{ P_{\rho, \text{вн}} - \langle P_{\rho, \text{вн}} \rangle - \frac{h_{\rho, \text{вн}}^2(a)}{4\pi} \left| \ln \frac{8\rho}{a} - 1 + \frac{l_{\text{ин}}}{2} \right| + \frac{\langle h_{\rho}^2 \rangle}{8\pi} \right\}. \quad (3a)$$

Во второй формуле логарифмический член отчетливо показывает, что вне шнура $h_{\rho, \text{вн}} \sim 1/r$ (поле прямого тока. Для $l_{\text{ин}}$ — коэффициента самоиндукции внутри шнура — можно получить $l_{\text{ин}} = \frac{\langle h_{\rho}^2 \rangle}{h_{\rho, \text{вн}}^2(a)}$. Подставляя это выражение в (3a) и устремляя в обеих формулах наружное азимутальное поле к нулю, мы приходим к формулам (2) и (3).

Из формулы (3) прежде всего автоматически следует описанный выше вывод о равновесии и устойчивости прямого цилиндра. Действительно, исходному состоянию равновесия соответствует случай: $f_{\rho} = 0$, $\rho = \infty$. При проявлении слабого изгиба $\rho \neq \infty$ и $f_{\rho} > 0$, если $\langle h_{\rho}^2 \rangle < 1/2 \langle h_{\rho}^2 \rangle$.

Но в общем случае существует еще одно, кроме указанного, состояние равновесия: $x^* = 2$, $\rho \neq \infty$. Если $x^* \neq 2$, то следует говорить не об отсутствии устойчивости, а просто об отсутствии равновесия в системе.

Так если $x^* < 2$, то жгут под действием силы f_{ρ} будет стягиваться к центру кривизны. В пределе при $x^* = 0$ мы получаем $f_{\rho} = -1/4\pi\rho \langle h_{\rho}^2 \rangle$ — результат, хорошо известный для нескрученной силовой трубки поля.

Если $x^* > 2$, то в жгуте-тороиде доминирует азимутальное поле и он начинает растягиваться, увеличивая и радиус кривизны, и длину. Наглядно это можно представить как результат взаимного отталкивания „колец“ азимутального магнитного поля h_ϕ , нанизанных на магнитную ось жгута z . Вопрос об устойчивости равновесного состояния $x^* = 2$, $\rho \neq \infty$ следует решать, рассматривая непосредственно силу, возникающую при тех или иных отклонениях системы от равновесия.

Оказывается, что в условиях сохранения потоков магнитного поля и массы газа в жгуте данное состояние устойчиво. Под влиянием внешних воздействий система способна испытывать колебания скрученности около состояния $x^* = 2$. При этом вместе с x^* меняются и геометрические размеры a и l , и h_0 — поле на оси жгута [6, 7].

Очевидно тот факт, что магнитный жгут, т. е. скрученная магнитная петля, арка, способны, как целое, испытывать упругие колебания около некоторого равновесного состояния, следует рассматривать как одно из самых важных и интересных свойств этих структур. Это свойство, в частности, может быть использовано в теории солнечных вспышек.

3. *Инвариантные структуры бесслового магнитного жгута.* Паркером [2] были рассмотрены равновесные по сечению конфигурации, которые получаются при расширении (сжатии) прямого аксиально симметричного магнитного жгута в упругой, бесконечно проводящей среде. Характерной чертой этой работы является то, что рассматривалось лишь поперечное расширение или сжатие прямолинейного участка жгута и не учитывалось его растяжение (сокращение) в длину. Паркером предполагалось, что сохраняется поток азимутального поля на единицу длины. В данном разделе мы рассмотрим процесс расширения (сжатия) магнитного жгута, обладающего конечным радиусом кривизны ($\rho \gg a$) и конечной длиной, т. е. рассмотрим магнитный тороид или длинную магнитную петлю с закрепленными концами $0'$ и $0''$ (см. рис. 1), для которой можно пренебречь краевыми эффектами.

Для такой системы в условиях высокой проводимости солнечной плазмы сохраняется полный поток азимутального поля.

$$\Phi_z = l \int_0^{\rho} h_\phi(r) dr = \text{const.} \quad (4)$$

Вводить условие сохранения азимутального потока на единицу длины

$$\int_0^{\rho} h_\phi dr = \text{const} \quad (5)$$

в общем случае нет оснований, поскольку изменение поперечных размеров жгута приводит к растяжению или сокращению его в длину.

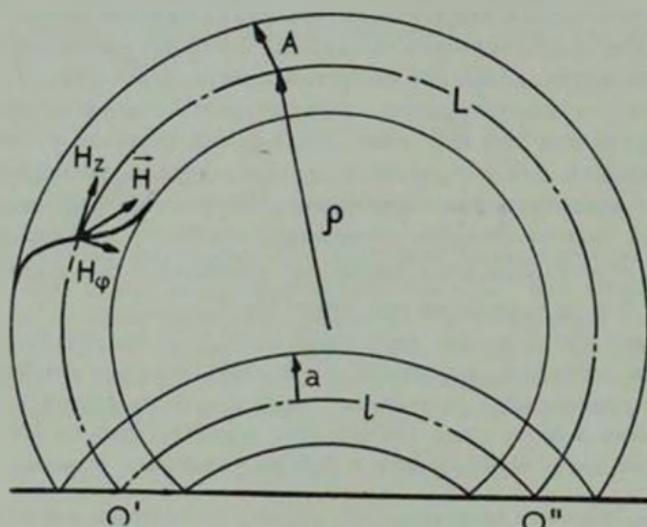


Рис. 1

Один из результатов Паркера [1, 2] состоит в том, что при расширении или сжатии жгута изменяет свой вид и функция, описывающая распределение магнитного поля в жгуте, т. е. изменяется вид так называемой производящей функции. Фактически это означает, что в данной постановке задачи мы вообще не можем говорить о наличии определенной структуры магнитного поля в жгуте: каждому значению a соответствует своя геометрия поля. Этот вывод есть следствие слишком жесткого модельного предположения (5).

Мы покажем, что существует по крайней мере одна производящая функция, которая сохраняет свой вид при изменении геометрических параметров жгута и в этом смысле является инвариантной.

Рассмотрим этот вопрос подробно. Если поле внутри жгута бессиповое,

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \alpha(r) \vec{h}, \quad \nabla P = 0, \quad (6)$$

то распределение поля в жгуте задается производящей функцией следующим образом [2, 9]:

$$\left. \begin{aligned} h_z^2 &= f(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r} \\ h_\phi^2 &= -\frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что $f(r) = h_z^2 + h_\theta^2$, т. е. имеет смысл плотности магнитной энергии. Условие равновесия (2) можно записать следующим образом:

$$P_{zz} - P_{\theta\theta} = \frac{\langle h_z^2 \rangle}{8\pi} = \frac{h_z^2(a) + h_\theta^2(a)}{8\pi} = \frac{f(a)}{8\pi} \quad (8)$$

т. е. разность газовых давлений равна скачку магнитного давления на границе.

Пусть некоторое начальное состояние магнитного жгута характеризуется параметрами: a, l , производящей функцией $f(r)$ ($f(a) = 8\pi \Delta P$) и степенью скрученности x^* (вообще говоря, $x^* \neq 2$, т. е. первоначальное состояние может быть и неравновесным по ρ). Пусть далее как под действием силы f_1 , так и вследствие изменения внешних условий (P_{zz}) жгут перешел в новое состояние, которое характеризуется геометрическими размерами A, L , степенью скрученности K^* , новой структурной функцией $F(R)$ (причем $F(A) = 8\pi \Delta P$) и соответственно компонентами поля $H_z(R)$ и $H_\theta(R)$. Здесь R — координата той магнитной силовой линии, которая в начальном состоянии имела координату r . Благодаря наличию вмороженности поля, мы можем проследить за поведением силовой линии и найти отображение $r(R)$. Связь между начальным и конечным состояниями жгута может быть найдена из условий сохранения магнитных потоков и уравнения, связывающего между собой x^* и K^* . Условие (1), записанное в дифференциальной форме, имеет вид [2]:

$$h_z(r) r dr = H_z(R) R dR \quad (9)$$

или

$$r^3 \left[f(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] (dr)^2 = R^3 \left[F(R) + \frac{1}{2} R \frac{\partial F(R)}{\partial R} \right] (dR)^2 \quad (10)$$

Это означает, что поток продольного поля, проходивший первоначально через кольцо $(r, r + dr)$, будет проходить в конечном состоянии через кольцо $(R, R + dR)$.

Для показателя скрученности $x^* = \frac{\langle h_\theta^2 \rangle}{\langle h_z^2 \rangle}$ имеем выражение

$$x^* = \frac{2}{a^2 f(a)} \int_a^2 f(r) r dr - 1 \quad (11)$$

Отсюда

$$\int_0^{x^*} r f(r) dr = \mu \int_0^A F(R) R dR, \quad (12)$$

где

$$\mu = \frac{a^2 f(a) (x^* + 1)}{A^2 F(A) (K^* + 1)}. \quad (13)$$

В дифференциальной форме:

$$f(r) r dr = \mu R F'(R) dR. \quad (14)$$

Наконец, связь между l и L определится из условия (4), которое замыкает систему уравнений, необходимую для решения поставленной задачи:

$$\frac{l}{L} = \frac{\int_0^A \sqrt{-\frac{1}{2} R \frac{dF(R)}{dR}} dR}{\int_0^{x^*} \sqrt{-\frac{1}{2} r \frac{df(r)}{dr}} dr}. \quad (15)$$

Заметим, что в зависимости от соотношения конечных и начальных параметров, входящих в выражение для μ , мы можем рассматривать несколько физически различных задач. Так, если $f(a) = F(A)$, $x^* \neq K^*$, то $\mu = \frac{a^2 (x^* + 1)}{A^2 (K^* + 1)}$. Именно этот случай описывает колебания скрученности магнитного жгута в условиях: $P_{out} = \text{const}$, $P_{in} \ll P_{out}$. Если же $x^* = K^* = 2$, но $f(a) \neq F(A)$ и $\Delta p \neq \Delta P$, то $\mu = \frac{a^2 f(a)}{A^2 F(A)}$. В этом случае мы имеем дело с квазиравновесным (по x^*) изменением геометрических параметров жгута вследствие изменения внешних условий ($P_{out} \neq \text{const}$).

В общем случае геометрические размеры жгута определяются совместным влиянием обоих эффектов и μ задается формулой (13).

Для удобства решения введем обозначения (безразмерные координаты)

$$t = (ar)^2, \quad T = (aR)^2, \quad (16)$$

где a — некоторая константа, имеющая размерность обратной длины. Тогда вместо (10) и (14) будем иметь:

$$\left[f(t) + t \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right] (dt)^2 = \left[F(T) + T \frac{\partial F(T)}{\partial T} \right] (dT)^2 \quad (17)$$

$$f(t) dt = \mu F(T) dT. \quad (18)$$

Совместное решение двух этих уравнений позволяет найти зависимость $t(T)$, а также новую структурную функцию $F(T)$, если известна $f(t)$ — структурная функция в начальном состоянии.

Дифференцируя уравнение (18) по T и исключая из (17) производную dF/dT , после некоторых преобразований приходим к следующему нелинейному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$\left(\frac{dt}{dT}\right)^2 \left[f(t) + \left(t - \frac{T}{\mu}\right) \frac{df(t)}{dt} \right] - \frac{f(t)}{\mu} \frac{dt}{dT} - \frac{d^2t}{dT^2} T \frac{f(t)}{\mu} = 0. \quad (19)$$

Для того, чтобы продвинуться дальше, нам, очевидно, необходимо использовать конкретный вид производящей функции $f(t)$. Мы выберем ее в виде

$$f(t) = \frac{1}{1+t}. \quad (20)$$

Используя (7), легко убедиться, что эта структурная функция описывает хорошо известную бессильную конфигурацию магнитного поля с постоянным шагом спирали — $d \ll 10$].

$$h_x = \frac{1}{1+(xz)^2}; \quad h_z = \frac{xr}{1+(xz)^2}, \quad (21)$$

причем $z = 2z/d$, h_x и h_z измеряются в единицах $h(0)$.

Произведенный нами выбор $f(t)$ оправдан не только тем, что, как мы увидим ниже, он позволяет проинтегрировать (19) в явном виде, но и, что особенно важно, тем, что данная структурная функция сохраняет свой вид в процессе эволюции магнитного жута.

Подставим (20) в (19) и введем новые переменные: $x = T$, $y = 1 + t$. Тогда вместо (19) имеем

$$xy'' + y' - \frac{(y')^2}{y} (\mu + x) = 0. \quad (22)$$

Это уравнение однородно относительно y , y' , y'' , поэтому заменой $z = y'/y$ оно приводится к уравнению Риккарти:

$$\mu z^2 - xz' - z = 0. \quad (23)$$

Частное решение этого уравнения очевидно, $z_1 = 1/\mu$. Поэтому следующей подстановкой будет

$$z = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varphi}. \quad (24)$$

Таким образом мы приходим к уравнению

$$\varphi' + \frac{\varphi}{x} = -\frac{\mu}{x}, \quad (25)$$

общее решение которого имеет вид:

$$\varphi = \frac{C_1}{x} - \mu. \quad (26)$$

Возвращаясь к прежним переменным, запишем

$$t = C_2(-C_1 + \mu T)^{-C_1/\mu^2} - 1, \quad (27)$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования. Для их определения используем очевидные свойства отображения $t(T)$:

$$t(0) = 0, \quad t[(aA)^2] = (aA)^2. \quad (28)$$

С учетом (16) это дает:

$$0 = C_2(-C_1)^{-C_1/\mu^2} - 1; \quad a^2 a^2 = C_2(\mu x^2 A^2 - C_1)^{-C_1/\mu^2} - 1. \quad (29)$$

Отсюда

$$a^2 a^2 = \left(\frac{\mu x^2 A^2}{-C_1} + 1 \right)^{-C_1/\mu^2} - 1. \quad (30)$$

Для того, чтобы удовлетворить этому равенству, необходимо положить

$$-C_1 = \mu^2 = \left(\frac{A}{a} \right)^4. \quad (31)$$

Тогда

$$C_2 = \frac{1}{\mu^2} \quad \text{и} \quad t = \frac{1}{\mu} (T + \mu) - 1. \quad (32)$$

Теперь из уравнения (18) легко найти новую производящую функцию:

$$F(T) = \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{1 + T/\mu}. \quad (33)$$

Мы видим, что $F(T)$ отличается от $f(t)$ лишь тем, что напряженность поля на оси изменилась в $1/\mu$ раз и шаг винта — $\sqrt{\mu}$ раз. Вид же производящей функции не изменился, что и доказывает ее инвариантность.

Рассмотрим далее, как изменяется длина жгута в процессе его эволюции.

Соотношения (20), (32) и (33) позволяют получить

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{V\mu} \frac{\ln \frac{s^2 A^2 + \mu}{\mu}}{\ln s^2 a^2 + 1}. \quad (34)$$

В качестве примера применения полученных соотношений рассмотрим отмеченный выше случай, когда $x^* = K^*$ и соответственно

$$\mu = \frac{a^2 f(a)}{A^2 F(A)}. \quad (35)$$

Из (31) и (35) следует

$$F(A) = f(a) \left(\frac{a}{A} \right)^4 \quad (36)$$

или

$$\Delta P = \Delta p \left(\frac{a}{A} \right)^4. \quad (37)$$

Как видим, для изменения радиуса поперечного сечения жгута в e раз необходимо, как и в случае нескрученной силовой трубки, чтобы перепад внешнего давления составил почти два порядка.

Для изменения шага спирали и длины жгута получаем

$$D = d \frac{A}{a} \sim A; \quad L = \frac{l}{a} A \sim A. \quad (38)$$

Таким образом, при квазиравновесной ($x^* = K^*$) перестройке магнитного жгута, вызванной изменением внешних условий, имеют место следующие закономерности:

а) бессилевое поле с постоянным шагом винта сохраняет свою структуру, причем $D \sim A$;

б) изменение радиуса поперечного сечения жгута сопровождается изменением его длины $L \sim A$.

В заключение автор приносит свою благодарность В. А. Крату за полезное обсуждение проблемы.

INVARIANT STRUCTURES OF MAGNETIC FLUX ROPES

А. А. SOLOVYEV

The basic properties of the screened magnetic flux rope with finite radius of the curvature are discussed. The analysis of the equilibrium conditions for the rope has been given in terms of the average values.

The variation of the magnetic field structure in the rope caused by the change of its geometrical sizes has been studied. In contrast to the Parker's paper, not only the transverse expansion (compression) but the lengthening (shortening) of the twisted magnetic loop as a whole have been taken into account.

The invariant structure was found, so that the transition of the rope from one equilibrium state to another is followed by variation of the length and pitch of the helix in proportion with the radius of the cross-section.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. N. Parker*, *Ap J.*, 191, 245, 1974.
2. *E. N. Parker*, *Astrophys. Space Sci.*, 44, 107, 1976.
3. *А. А. Соловьев*, *Солнечные данные*, № 5, 86, 1971.
4. *А. А. Соловьев*, *Солнечные данные*, № 10, 93, 1971.
5. *А. А. Соловьев*, *Письма АЖ*, 2, № 1, 39, 1976.
6. *А. А. Соловьев*, *Солнечные данные*, № 11, 73, 1976.
7. *А. А. Соловьев*, *Астрофиз. ж.* 58, № 3, 597, 1981.
8. *В. Д. Шафраков*, в сб. «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, М., № 2, 92, 1963.
9. *R. Lust, A. Schluter*, *Z. Astrophys.*, 34, 263, 1954.
10. *T. Gold, F. Hoyle*, *M. N. RAS*, 120, 89, 1963.