

УДК 52—64—726—337

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ С СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

А. Д. КАМИНЕР, Г. Г. ПАВЛОВ, Н. А. СИЛАНТЬЕВ, Ю. А. ШИБАНОВ

Поступила 25 мая 1981

Принята к печати 18 марта 1982

Предлагаются два приближенных метода решения задач переноса излучения в оптически толстой плазме с произвольно направленным, однородным магнитным полем. Оба метода исходят из диффузионных уравнений и отличаются способом продолжения диффузионного решения из глубины среды к излучающей границе. С помощью этих методов получены простые аналитические формулы, удобные как для вычислений, так и для качественного исследования спектральных, угловых и поляризационных характеристик выходящего из среды излучения. Результаты хорошо согласуются с более точными численными решениями [7], полученными для случая, когда магнитное поле нормально к границе.

1. Введение. Для интерпретации наблюдательных данных и построения моделей рентгеновских и гамма-источников, связанных с нейтронными звездами, важной является задача о переносе излучения в плазме с очень сильным магнитным полем $B \sim 10^{11} - 10^{13}$ Гс. При $\omega_{ce} \gg \omega \gg (\hbar \omega / mc^2) (e^2 / \hbar c)$, где $\omega_{ce} = eB / mc$ — циклотронная частота, ω — частота фотона, в плазме выполняются условия сильной фарадеевской деполаризации и свойства излучения полностью определяются [1] интенсивностями I_j ($j = 1, 2$ соответствуют необыкновенной и обыкновенной волнам) двух различно поляризованных нормальных волн (НВ).

В стационарных условиях они подчиняются системе уравнений переноса (см., например, [2])

$$(\vec{n} \nabla) I_j(\vec{n}) = -k_j(\vec{n}) I_j(\vec{n}) + \sum_{i=1,2} \int d\vec{n}' I_i(\vec{n}') k_{ij}(\vec{n}', \vec{n}) + Q_j(\vec{n}), \quad (1)$$

где $k_j(\vec{n}) = k_j^s(\vec{n}) + k_j^a(\vec{n})$ — полный коэффициент поглощения (экстинкции) j -ой НВ, $k_j^s(\vec{n}) = \sum_i \int d\vec{n}' k_{ji}(\vec{n}, \vec{n}')$ и $k_j^a(\vec{n})$ — интегральный коэф-

коэффициент рассеяния и коэффициент истинного поглощения, $k_{ij}(\vec{n}', \vec{n})$ — коэффициент рассеяния i -ой волны в j -ую из направления $\vec{n}'$ в $\vec{n}$, Q_i — излучательная способность плазмы. Для простоты изложения мы ограничимся практически важным случаем $Q_i(\vec{n}) = k_{ii}(\vec{n})q$, где q не зависит от $\vec{n}$ (в частном случае локального термодинамического равновесия (ЛТР) $q = B_*(T)/2$, где $B_*(T)$ — планковская интенсивность). Уравнения (1) справедливы, если поляризуемость плазмы много меньше единицы, т. е. $\omega_p^2 \ll \omega(|\omega - \omega_p| + \gamma)$, где $\omega_p = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2}$ — электронная плазменная частота, γ — характерная ширина циклотронного резонанса. Кроме того, в (1) подразумевается, что изменением частоты фотона при многократном рассеянии можно пренебречь (для этого необходимо $\hbar\omega \ll mc^2$, $kT_e \ll mc^2$ — подробнее см. [3, 4]).

В предельном случае малых полей ($\omega_p \ll \omega$) решения (1) были получены в [5]. Для очень больших полей ($\omega_p \gg \omega$) задача переноса (с учетом только обыкновенной волны) рассматривалась Баско [6]. Для произвольных ω_p/ω одним из авторов был разработан [7] метод численного решения (1) с помощью обобщенных тензорных функций Амбарцумяна—Чандрасекара (H -функций). Метод [7] позволяет достичь высокой точности решений, но приводит к значительным вычислительным трудностям, когда магнитное поле не нормально к границе излучающей области. Кроме того, он не позволяет записать решения в простой и наглядной форме, что затрудняет качественный анализ получаемых результатов. Поэтому, наряду с более точными численными методами, имеет смысл разрабатывать также приближенные методы, приводящие к выражениям, удобным для качественного анализа и не требующим большого объема вычислений. При разработке таких методов для оптически толстой плазмы с магнитным полем естественно использовать [8, 1, 2] тот факт, что в глубоких слоях среды применимо диффузионное приближение. Нагель [9] и Месарош, Нагель и Вентура [10] с помощью диффузионных уравнений для плотности квантов НВ вычисляли спектр потока излучения, выходящего из изотермической однородной плазмы. В [9] и [10], однако, использовались коэффициенты диффузии, отличные друг от друга, и не рассматривались угловые и поляризационные характеристики излучения. Канно [11] вычислял угловое распределение интенсивности излучения плазмы для чистого рассеяния ($k_{ii}^* = 0$, $Q_i = 0$), предполагая, что плотности диффундирующих квантов в двух НВ равны между собой вплоть до самой границы.

В настоящей работе предлагаются два приближенных метода (разделы 3 и 4) решения задач переноса излучения в плазме с магнитным полем. При этом, как и в [5—7, 9—11] мы ограничимся приближением хо-

лодной плазмы: $|\omega - s\omega_n| \gg \omega (kT_e/mc^2)^{1/2}$, где $s=1, 2, \dots$ — номер циклотронной гармоники. Оба предлагаемых метода исходят из диффузионных уравнений, полученных в разделе 2 при произвольной анизотропии коэффициентов переноса, и отличаются способом продолжения диффузионного решения из глубины среды к излучающей границе. При помощи этих методов получены сравнительно простые аналитические формулы, удобные как для вычислений, так и для качественного исследования спектральных, угловых и поляризационных характеристик выходящего излучения при произвольном направлении магнитного поля. В случае, когда поле параллельно нормали к границе излучающей области, полученные результаты сравниваются (раздел 5) с более точными численными решениями [7]. Необходимые для вычислений формулы для коэффициентов переноса приведены в Приложении.

2. Уравнения диффузии фотонов. Естественно ожидать, что в глубоких слоях среды четная по $\vec{n}$ часть $I_j(\vec{n})$ близка к изотропной функции координат R_j , которая определяет плотность $(4\pi/c) R_j$ лучистой энергии в j -ой НВ. Тогда нечетная по $\vec{n}$ часть $I_j(\vec{n})$ получается из (1) при учете симметрии $k_{ij}(\vec{n}', \vec{n})$ и $k_j^a(\vec{n})$ (см. (П16)). В итоге для интенсивности и потока $\vec{F}_j = \int d\vec{n} \vec{n} I_j(\vec{n})$ в j -ой НВ имеют место приближенные выражения:

$$I_j \simeq I_j^{(0)} = R_j - \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}}{k_j(n)} R_j, \quad F_j^{(0)} = -4\pi \sum_a D_{ab}' \nabla_b R_j. \quad (2)$$

Величину

$$D_{ab}' = \frac{1}{4\pi} \int d\vec{n} \frac{n_a n_b}{k_j(n)} \quad (3)$$

будем называть тензорным коэффициентом диффузии j -ой волны. Если магнитное поле $\vec{B} = 0$, то $D_{ab}' \rightarrow \alpha_{ab} [3(N\alpha_j + k^2)]^{-1}$, где α_j и k^2 — томсоновское сечение и коэффициент истинного поглощения. Если в качестве I_j в уравнение (1) подставить $I_j^{(0)}$ из (2), проинтегрировать полученное выражение по $\vec{n}$ и использовать (П16), то получается система уравнений диффузии

$$\sum_a \nabla_a D_{ab}' \nabla_b R_j - S(R_j - R_{j-1}) = \alpha_j(R_j - q), \quad (4)$$

где

$$x_j = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n} k_j^*(\mathbf{n}), \quad S = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n} d\mathbf{n}' k_{j, 3-f}(\mathbf{n}, \mathbf{n}'). \quad (5)$$

Величина S представляет собой усредненный коэффициент трансформации одного типа НВ в другой. Система уравнений (4) была написана Нагелем [9] из феноменологических соображений. Подчеркнем, что приведенный выше вывод показывает, что уравнения (4), в отличие от диффузионных уравнений работы [10], справедливы не только при малой анизотропии коэффициентов переноса.

В очень глубоких слоях, где излучение неполяризовано [1], т. е. $R_1 = R_2 = R/2$, из (4) следует уравнение диффузии для R [2, 8]:

$$\sum_{ab} \nabla_a D_{ab} \nabla_b R = \kappa (R - 2q), \quad (4a)$$

где $D_{ab} = (D_{ab}^1 + D_{ab}^2)/2$, $\kappa = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением излучения полубесконечной плоскопараллельной среды с однородным магнитным полем.

В этом случае удобно ввести оптическую глубину $\tau = z_T \int_0^z N dz$ (z —

геометрическая глубина) по отношению к томсоновскому рассеянию, а все величины, имеющие размерность длины или обратной длины,

измерять в единицах $(N_e z_T)^{-1}$ или $N_e z_T$. Тогда $\vec{n} \nabla = -\mu N_e z_T (d/dz)$, $\mu = \cos \theta$, θ — угол между внешней нормалью к поверхности и волновым вектором; а в (4) и (4a) $\sum_{ab} \nabla_a D_{ab} \nabla_b = (d/dz)$, $D_j = (d/dz)$, $D_i = D_{ii}$.

Если θ_B — угол между нормалью и магнитным полем, то [12] $D_i = D_j^1 \cos^2 \theta_B + D_j^2 \sin^2 \theta_B$, где $D_j^{1, 2}$ — главные компоненты тензора диффузии

$$D_j^1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{k_j(\mathbf{n})} d\theta, \quad D_j^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{k_j(\mathbf{n})} d\theta, \quad (6)$$

θ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{B}$.

3. Метод связанной диффузии НВ с обобщенными граничными условиями Маршака. Если в интегральный член исходной системы (1) вместо I_j подставить $I_j^{(0)}$ из (2), то, используя (П16), получим для интенсивности НВ на границе $\tau = 0$:

$$I_j^{(1)} = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\mu} \left[q k_j^* + \sum_i k_{ji} R_i \right] \exp \left(- \int_0^\tau k_j \frac{d\tau'}{\mu} \right). \quad (7)$$

где k_j^* , k_j и $k_{j,l} = k_{j,l}(\theta) = \int d\vec{n} k_{j,l}(\vec{n}, \vec{n}^*)$ зависят от угла θ (см. (П6), (П12)). Формулу (7) можно рассматривать как первую итерацию решения (1) (при нулевой итерации $f_j^{(0)}$ из (2)).

Для вычисления $f_j^{(1)}$ необходимо найти R_j из (4), задав граничные условия. Выбор условий при $\tau = 0$, как всегда в задачах диффузии, неоднозначен. В частности, их можно получить из требования непрерывности нормальной компоненты F_{jN} потока $\vec{F}_j$, используя формулы (2). Приравнявая на границе $\tau = 0$ выражение $F_{jN}^{(1)}$ интегралу $\int_{\Omega_+} d\vec{n} \cdot \vec{f}_j^{(0)}(\tau = 0)$, где Ω_+ — область телесных углов $\mu \geq 0$, получаем обобщение условия Маршака [13]:

$$2D_j \frac{dR_j}{d\tau} = R_j \text{ при } \tau = 0. \quad (8)$$

Примем, как это часто делается [14], что отношения k_j^*/k_j^* не зависят от τ . Это предположение выполняется, в частности, для плазмы с однородной концентрацией и температурой ($q(\tau) = \text{const}$ в условиях ЛТР) и позволяет получить аналитические решения при произвольной зависимости $q(\tau)$, которые качественно описывают влияние изменения энерговыделения с глубиной. Например, для линейной зависимости $q(\tau) = q_0(1 + \beta\tau)$ из (4), (8) получаем

$$R_j(\tau) = q_0 \left(1 + \beta\tau + \sum_{n=1,2} A_{jn} e^{-p_n \tau} \right), \quad (9)$$

где

$$A_{jn} = \frac{b_j f_{j,3-n} g_{3-n} + a_{j,3-n} f_{3-j,3-n} g_j}{a_{jn} f_{j,3-n} f_{3-j,n} - a_{j,3-n} f_{jn} f_{3-j,3-n}}; \quad A_{jn} = -\frac{b_j}{a_{jn}} A_{3-j,n} \quad (10)$$

$$p_n^2 = \frac{1}{2} [b_1 + c_1 + b_2 + c_2 \mp [(b_1 + c_1 - b_2 - c_2)^2 + 4b_1 b_2]^{1/2}]; \quad (11)$$

$$b_j = \frac{S}{D_j}, \quad c_j = \frac{x}{D_j}, \quad a_{jn} = p_n^2 - b_j - c_j, \quad f_{jn} = 1 + 2D_j p_n, \quad g_j = 1 - 2D_j \beta; \quad (12)$$

$$p_1^2 p_2^2 = b_1 c_1 + b_2 c_1 + c_1 c_2, \quad a_{1n} a_{2n} = b_1 b_2, \quad a_{jn} = -a_{3-j,3-n} \quad (13)$$

С помощью (9), (2), (8) и (7) легко найти на границе $\tau = 0$ нормальные компоненты потоков

$$F_{jN}^{(2)} = 2\pi R_j (z=0) = 2\pi q_0 \left(1 + \sum_{n=1,2} A_{jn}\right) \quad (14)$$

и интенсивности НВ в нулевом и первом приближениях

$$I_j^{(0)} = \frac{F_{jN}^{(2)}}{2\pi} \left(1 + \frac{\mu}{2D_j k_j}\right), \quad (15)$$

$$I_j^{(1)} = q_0 \left(1 + \beta \frac{\mu}{k_j} + \sum_{n=1,2} \frac{k_{jn} A_{jn}}{k_j + \mu p_n}\right). \quad (16)$$

Аналогичным образом получают решения для произвольной $q(z)$. Отличительной особенностью таких решений является наличие двух характерных длин p_n^{-1} , формулы (11) для которых были получены Нагелем [9].

Если пренебречь трансформацией НВ ($S \ll x_{1,2}$), то $p_n^2 = x_n/D_n$, $A_{jn} = -\varepsilon_{jn} z / f_j$ и

$$R_j(z) = q_0 \left(1 + \beta z - \frac{1 - 2\beta D_j}{1 + 2p_j D_j} e^{-p_j z}\right), \quad (17)$$

т. е. $p_{1,2}^{-1}$ имеют смысл обычных диффузионных длин (см., например, [15]) для волн $j = 1, 2$ по отдельности. При этом

$$I_j^{(1)} = q_0 \left| 1 + \beta \frac{\mu}{k_j} - \frac{(1 - 2\beta D_j) k_j^*}{(1 + 2p_j D_j) (k_j + \mu p_j)} \right| \xrightarrow{x_j D_j \ll 1} \frac{F_{jN}}{2\pi} \left(1 + \frac{\mu}{2D_j k_j^*}\right), \quad (18)$$

где $F_{jN} \cong F_{jN}^{(0)} = 4\pi q_0 x_j p_j^{-1} (1 + \beta p_j^{-1})$ — выходящий поток при слабом поглощении (ср. с (19)). Положив в (17) и (18) $k_j^* = 1$, $k_j^0 = x = \bar{\varepsilon}$, $k_j = 1 + \bar{\varepsilon}$, $D_j = [3(1 + \bar{\varepsilon})]^{-1}$, $p_j = [3\bar{\varepsilon}(1 + \bar{\varepsilon})]^{-1/2}$, переходим к решению при $\bar{B} = 0$. При этом выходящее излучение получается неполяризованным ($I_1 = I_2$), что связано с пренебрежением фазовыми связями между НВ (см. Введение). Если $\bar{\varepsilon} \ll 1$ (слабое поглощение), то выражение для выходящего потока при $\beta = 0$, $F_{jN} = 4\pi q_0 |\bar{\varepsilon}|/3$, в изотропном случае совпадает с результатом точной теории (см., например, [15]), а угловое распределение $I(\mu) \propto 1 + 3\mu/2$ оказывается таким же, как и в приближении Эддингтона [14].

В отсутствие рассеяния, $k_j^* = 0$, (18) переходит в известный результат [16]

$$I_j = q_0 \left(1 + \beta \frac{\mu}{k_j^*}\right), \quad F_{jN} = \pi q_0 (1 + 2\beta D_j). \quad (19)$$

Если трансформация НВ превышает их поглощение, $S \gg \kappa_{1,2}$ (фактически это имеет место при минимальном из $k_{1,2}^2 \gg$ максимального из $k_{1,2}^2$), то

$$p_1^2 = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{D_1 + D_2} = \frac{\kappa}{D} = p_j^2; \quad p_2^2 = S \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) = p_e^2; \quad p_1 \gg p_2; \quad (20)$$

$$A_{11} = -1 + 2(p_d + \beta) D \left(1 + \frac{G^2}{1+w} \right), \quad (21)$$

$$A_{12} = (-1)^{j+1} 2(p_d + \beta) \frac{G}{1+w} D_{2-j},$$

где $G = (D_1 - D_2)/2D$, $D = (D_1 + D_2)/2$, $w = 4S_j p_e$. Длина p_d^{-1} является диффузионной длиной для неполяризованного излучения (см. (4а) и раздел 4). Длина p_e^{-1} является длиной деполаризации из-за трансформации НВ, т. к. в этом случае, согласно (9) и (21), при $\tau \gg p_e^{-1}$ имеем $K_1 = K_2$ (A_{11} не зависит от j). Для потоков и интенсивностей при $\tau = 0$ имеем

$$F_{jN}^{(0)} = \frac{F_N^{(0)}}{2} \left| 1 - (-1)^j \frac{G}{1+w} \right|, \quad F_N^{(0)} = F_{1N}^{(0)} + F_{2N}^{(0)} = 8\pi q_0 \kappa p_d^{-1} (1 + \beta p_d^{-1}), \quad (22)$$

$I_j^{(1)}$ дается формулой (15) с $F_{jN}^{(0)}$ из (22);

$$I_j^{(1)} = \frac{F_N^{(0)}}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{\mu}{2Dk_j} + \frac{G}{1+w} \frac{\mu p_e G - (-1)^j (k_j - k_{j,2-j})}{k_j + \mu p_e} \right\}. \quad (23)$$

Если в исходном уравнении (1) положить $k_j^a = 0$, $Q_j = 0$ (задача Милна), то решение соответствующего диффузионного уравнения ((4) при $\kappa_j = 0$) с граничными условиями (8) дает

$$R_j(\tau) = \frac{F_N}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{G^2}{1+w} + \frac{\tau}{2D} - (-1)^j \frac{D_{2-j}}{D} \frac{G}{1+w} e^{-p_e \tau} \right\}, \quad (24)$$

где F_N — заданная нормальная компонента суммарного по поляризациям потока, сохранение которой следует из (1): $\nabla \cdot \vec{F} = dF_N/d\tau = 0$. Формула (24) получается также, если подставить (21) в (9), положить $\tau \ll p_d^{-1}$ и заменить $F_N^{(0)}$ (определен в (22)) на F_N . Для $F_{jN}^{(0)}$, $I_j^{(0)}$ и $I_j^{(1)}$ при $\tau = 0$ подстановкой (24) в (2) и (7) получаются формулы (22), (15) и (23), в которых $F_N^{(0)} \rightarrow F_N$. Такое совпадение объясняется тем, что при $S \gg \kappa$ поток интенсивности формируется на глубине $\sim p_d^{-1}$ много большей, чем глубина $\sim p_e^{-1}$, на которой формируется поляризация.

Отметим, что получившаяся формула для $I_j^{(1)}$ приводит, в отличие от $I_j^{(0)}$, к выходящему потоку, не совпадающему с F_N . Поэтому в (23) заменим $F_N^{(0)}$ не на F_N , а на нормировочный поток Φ_N , определяемый из условия: $\sum_j \int_{\Omega_+} d\vec{n} \mu I_j^{(1)} = F_N$. Вычисления показывают, что отличие

Φ_N от F_N , являющееся мерой неточности рассматриваемого метода, не превышает нескольких процентов.

Если в (23) положить $G = 0$ ($D_1 = D_2$), то (23) переходит в решение задачи без рассеяния с градиентом температуры [16] (см. (19)) при $\beta \rightarrow (2D)^{-1}$, $q_0 = F_N/4\pi$. Такое же решение было получено Канно [11] для задачи Милна в предположении, что $R_1 = R_2 = (F_N/2\pi) \times (1 + \pi/2D)$ для произвольного соотношения между D_1 и D_2 .

4. Метод подбора постоянных в диффузионном решении с помощью интегральной формы уравнения переноса. Используя свойства коэффициентов $k_{ij}(\vec{n}, \vec{n}')$ и $k_{ij}^*(\vec{n})$, приведенные в Приложении, уравнения переноса (1) для плоскопараллельной среды можно записать в виде

$$\mu \frac{dI_j(\vec{n}, \tau)}{d\tau} = k_j(\vec{n}) I_j(\vec{n}, \tau) - \sum_{i=1}^2 a_{ij}^*(\vec{n}) J_{ij}(\tau), \quad (25)$$

где

$$J_{ij}(\tau) = t, t_0 \left\{ \frac{3}{8\pi} \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_+} d\vec{n} a_{ij}^*(\vec{n}) I_i(\vec{n}, \tau) + \xi_{ij} q(\tau) \right\}, \quad (26)$$

величины $a_{ij}^*(\vec{n})$, t , t_0 , ξ_{ij} даются формулами (П5, П12).

Для тензора $J_{ij}(\tau)$ из (25) получается система интегральных уравнений [7, 8]

$$J_{ij}(\tau) = \xi_{ij} \beta_{ij} q(\tau) + \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_+} d\tau' K_{ij,i}(|\tau - \tau'|) J_{i,i}(\tau') \quad (27)$$

с ядром

$$K_{ij,i}(\tau) = t, t_0 \frac{3}{8\pi} \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_+} \frac{d\vec{n}}{\mu} a_{ij}^*(\vec{n}) a'_{i,i}(\vec{n}) \exp \left[-\frac{\tau k_i(\vec{n})}{\mu} \right], \quad (28)$$

где Ω_+ — область телесных углов с $\mu > 0$. Предлагаемый здесь метод основан на нахождении приближенного выражения для $J_{ij}(\tau)$, которое

при больших τ описывает режим неполяризованной диффузии (см. (4а)), а на границе удовлетворяет уравнению (27) при $\tau = 0$.

Решение уравнения диффузии (4а) имеет вид

$$R(\tau) = C e^{-p_d \tau} + R_p(\tau), \quad R_p(\tau) = p_d \int_0^\infty d\tau' q(\tau') \exp(-p_d |\tau - \tau'|), \quad (29)$$

где $p_d^{-1} = |D|/\kappa$ — диффузионная длина, $R_p(\tau)$ — частное решение уравнения (4а). Подставляя в (26) $I_i(n, \tau) \simeq R(\tau)/2$, получим

$$J_{\alpha\beta}(\tau \rightarrow \infty) = \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} p_d^2 \left[\frac{R(\tau)}{2} + \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} q(\tau) \right]. \quad (30)$$

Для произвольных τ будем искать приближенное выражение $J_{\alpha\beta}(\tau)$ в форме (30), заменив тензор $C_{\alpha\beta} p_d^2$ на $2C_{\alpha\beta}$:

$$J_{\alpha\beta}(\tau) \simeq C_{\alpha\beta} e^{-p_d \tau} + \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} p_d^2 \left[\frac{R_p(\tau)}{2} + \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} q(\tau) \right]. \quad (31)$$

При $\tau \gg p_d^{-1}$ (31) переходит в (30). Подставив (31) в правую часть (26) и положив $\tau = 0$, получим систему алгебраических уравнений для тензора $C_{\alpha\beta}$:

$$C_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^3 b_{\alpha\beta i} C_{i1}, \quad (32)$$

$$d_{\alpha\beta} = \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} \left\{ -\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} \frac{\tilde{R}_p}{2} + \frac{3}{8\pi} \sum_{i=1,2} \int_{\tilde{\Omega}_+} \frac{d\tilde{n}}{\mu} \tilde{a}_{i\alpha}^{\prime}(\tilde{n}) \left[\frac{k_i^2(\tilde{n})}{2} \tilde{R}_p + k_i^2(\tilde{n}) \tilde{q} \right] \right\}, \quad (33)$$

$$b_{\alpha\beta i} = \frac{3}{8\pi} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} \sum_{i=1,2} \int_{\tilde{\Omega}_+} d\tilde{n} \frac{\tilde{a}_{i\alpha}^{\prime}(\tilde{n}) \tilde{a}_{i\beta}^{\prime}(\tilde{n})}{k_i(\tilde{n}) + \mu p_d}, \quad (34)$$

где $\tilde{f} = f((k_i(\tilde{n}))/\mu)$ означает лапласовское преобразование функции $f(\tau)$. Интенсивности выходящих из среды НВ получаются из (25) с помощью (31):

$$I_i \simeq \frac{\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \tilde{a}_{i\alpha}^{\prime}(\tilde{n})}{k_i + \mu p_d} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{k_i^2}{2} \tilde{R}_p + k_i^2 \tilde{q} \right). \quad (35)$$

В случае непоглощающей среды ($\tilde{\epsilon}_\infty = 0$, $p_d = 0$; задача Милна) решение уравнения диффузии $R(\tau)$ и соответствующее ему выражение для $J_{\alpha\beta}(\tau)$ имеют вид

$$R(\tau) = \frac{F_N}{4\pi D} (C + \tau), \quad J_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{F_N}{8\pi D} \delta_{\alpha\beta} t_\alpha^2 (C + \tau), \quad (36)$$

где F_N — заданное значение нормальной компоненты потока. Приближенное выражение для $J_{\alpha\beta}(\tau)$ ищем в виде

$$J_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{\Phi_N}{8\pi D} (C_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} t_\alpha^2 \tau). \quad (37)$$

Для коэффициентов $C_{\alpha\beta}$ из уравнения (27), при $\tau = 0$, получается система (31) в которой

$$\begin{aligned} d_{\alpha\beta} &= \frac{3}{8\pi} t_\alpha t_\beta \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_+} d\vec{n} \frac{\mu \vec{a}_{\alpha\beta}^i(\vec{n})}{k_i^2(\vec{n})}, \\ b_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{3}{8\pi} t_\alpha t_\beta \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_+} d\vec{n} \frac{\vec{a}_{\alpha\beta}^i(\vec{n}) \cdot \vec{a}_{\gamma\gamma}^i(\vec{n})}{k_i^2(\vec{n})}. \end{aligned} \quad (38)$$

Интенсивности выходящих НВ даются формулой

$$I_j \approx \frac{\Phi_N}{8\pi D} \frac{1 + \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^j(\vec{n})}{k_j^2(\vec{n})}, \quad (39)$$

где нормировочный поток Φ_N (см. раздел 3) находится из условия:

$F_N = \sum_j \int_{\Omega_+} d\vec{n} \mu I_j$. Отметим, что в данном методе отличие Φ_N от F_N оказы-

вается существенно большим (десятки процентов), чем в методе связанной диффузии.

Из четности подинтегральной функции в (38) (см. П15, П16)) следует, что система уравнений (32) распадается на три независимых подсистемы с $|\alpha - \beta| = 0, 1, 2$, а сумма диагональных компонентов $C_{\alpha\alpha}$ равна $3/2$ ($\sum d_{\alpha\alpha} = 3/4$, $\sum b_{\alpha\alpha\alpha} = \delta_{\alpha\alpha}/2$). Наконец, заметим, что формула

(39) в случае $\vec{B} \rightarrow 0$ приводит к угловой зависимости $I_j = I_0 [1 + 2\mu - (5/152)(1 - \mu^2)]$, которая ближе к точному решению задачи Милна, с рэлеевской индикатрисой рассеяния [17], чем зависимость $I_j \sim 1 + (3/2)\mu$, получаемая методом связанной диффузии (раздел 3).

5. Результаты и обсуждения. На рис. 1—3 представлены результаты расчета различными методами интенсивности излучения, выходящего из полубесконечной среды (плазмы) с однородным магнитным полем, по раз-

ному наклоненным к нормали. Видно, что результаты предлагаемых методов связанной диффузии (СД) и подбора постоянных (ПП) качественно совпадают с более точными расчетами [7]. Степени линейной и циркулярной поляризации определяются формулами $P_L = Q/I$ и $P_C = V/I$, где

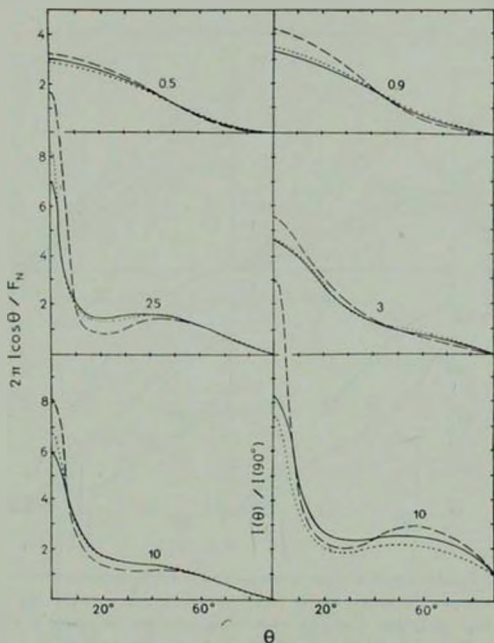


Рис. 1. Зависимость интенсивности I излучения полубесконечной плазмы с магнитным полем, параллельным нормали ($\theta_B = 0$) от угла θ . На всех рисунках пунктирной и штриховой линиями изображены результаты методов СД (раздел 3) и ПП (раздел 4), сплошной линией — более точные результаты работы [7]. За исключением правой нижней части рисунка, представлены кривые $I \cos \theta$ в единицах $F_N/2\pi$. Цифры у кривых обозначают отношение $\omega_B/\omega = 1$ и $\sqrt{2}$.

Q , V и интенсивности I выражаются через интенсивности НВ согласно (ПЗ). Результаты расчетов величин P_L и P_C при $\theta_B = 0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$ приведены нами в [18]. При $\theta_B = 0^\circ$, для угловых зависимостей

$P_L(\theta)$, $P_C(\theta)$ также имеет место хорошее согласие с результатами [7]. При $\omega_B \geq \omega$ метод СД оказался заметно точнее, чем ПП, тогда как при $\omega \geq 3\omega_B$ точнее оказывается метод ПП. Метод ПП приводит к наибольшим ошибкам при $\omega \ll \omega_B$ и $|\omega - \omega_B| \ll \omega_B$, когда k_1 сильно

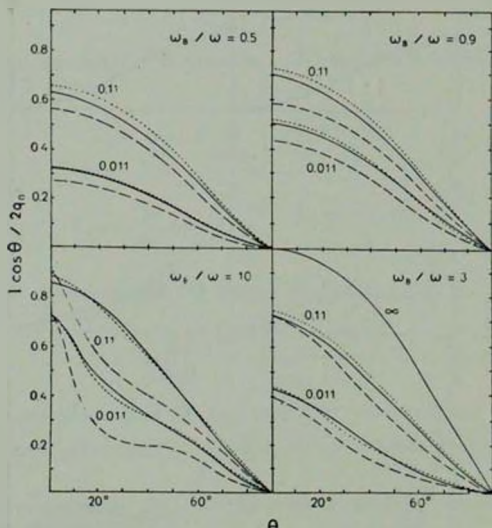


Рис. 2. Угловое распределение интенсивности I излучения полубесконечной плазмы с равномерно распределенными источниками ($q = q_c = \text{const}$) при различных ω_B/ω для $\theta_B = 0$. Цифры у кривых обозначают величину параметра $\xi = k_1^2/k_2^2$. В расчетах принято $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ (см. Приложение). В правой нижней части рисунка приведена кривая для случая, когда рассеяние отсутствует ($\xi = \infty$, $I = 2q_0$ для любых $\theta_B(\omega)$).

отличается от k_2 . Достоинством его является то, что он допускает (и отличии от СД) простое обобщение [8] на случай сравнительно слабых магнитных полей, когда интенсивностей НВ недостаточно для описания излучения (см. Введение). Ошибки обоих методов максимальны, когда луч зрения мало отклоняется от поверхности излучающей плазмы ($\theta \simeq 90^\circ$), так как при этом главный вклад в излучение дают

тонкие приповерхностные слои, где диффузионный подход особенно неточен. Поэтому для отношений $I(H)/I(90^\circ)$ (рис. 1) совпадение с решениями [7] заметно хуже, чем для наблюдаемых величин $I/\cos H$, нормированных в случае задачи Милна (рис. 1, 3) на сохраняющийся поток F_N .

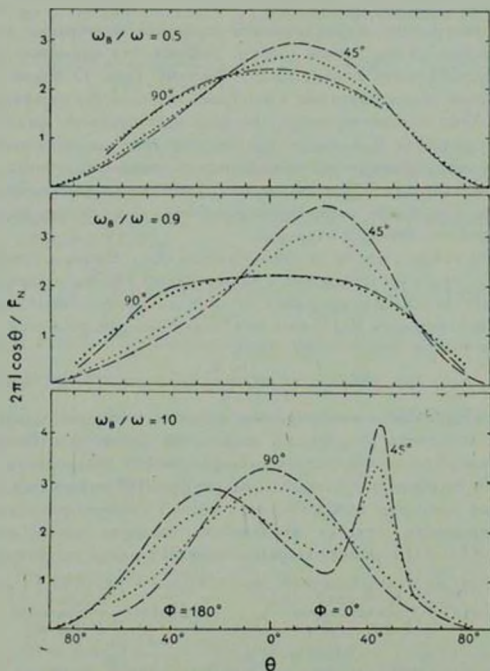


Рис. 3. Угловое распределение интенсивности в плоскости (N, B) для $H_B = 45^\circ$, 90 и различных ω_B/ω (цифры около кривых) в задаче Милна.

Учет только обыкновенной НВ при $\omega < \omega_B$ [6] приводит для задачи Милна к угловым зависимостям, качественно отличающимся от изображенных на рис. 1, т. к. излучение выходит в основном в необыкновенной

волне. Упрощающее предположение Канно [11] не слишком искажает угловые зависимости интенсивности, однако для поляризации приводит к зависимостям, качественно отличным от представленных в [18].

На рис. 3 изображены результаты методов СД и ПП при $\Theta_s = 90^\circ$ и 45° , для которых отсутствуют «точные» решения [7]. Совпадение кривых получается не хуже, чем при $\Theta_s = 0$.

Хотя обсуждение астрофизических следствий полученных результатов не является целью данной работы, отметим, что изменение профиля углового распределения с частотой для $\Theta_s = 45^\circ$ (рис. 5) весьма напоминает изменение формы импульсов некоторых рентгеновских пульсаров [19].

В заключение отметим, что с помощью приближенных формул, приведенных в разделах 3, 4, можно получить простые аналитические выражения для всех характеристик выходящего излучения во многих практически важных случаях. С другой стороны, точность предлагаемых методов может быть, в принципе, существенно повышена, если использовать их результаты для последующих итераций.

Следует указать, что когда данная работа была близка к завершению, нам стало известно о готовящейся к печати работе Нагеля, в которой разрабатывается метод, отличающийся от метода СД незначительными деталями. Мы благодарны В. Нагелю за посылку нам рукописи этой работы.

Приложение

Поляризация НВ и коэффициенты переноса в холодной разреженной плазме. В достаточно разреженной и холодной плазме (см. Введение) с высокой точностью можно считать поляризацию НВ поперечными и ортогональными (главные оси эллипсов поляризации НВ перпендикулярны, а направления вращения электрического вектора противоположны). Их удобно определять, задавая циклические проекции ортов поляризации e_i^j ($\alpha = 0, \pm 1$) в системе координат с осью Z вдоль магнитного поля:

$$e_{\pm 1}^j(\vec{n}) = \frac{K_j \pm \cos \vartheta}{\sqrt{2(1 + K_j^2)}} e^{\mp i\varphi}, \quad e_0^j(\vec{n}) = -\frac{\sin \vartheta}{V \sqrt{1 + K_j^2}}, \quad (\text{П1})$$

где ϑ и φ — полярный и азимутальный углы орта $\vec{n}$ волнового вектора

$$K_j = -i \frac{E_y^{(j)}}{E_z^{(j)}} = -\frac{2 \cos \vartheta}{\sqrt{u \sin^2 \vartheta + (-1)^j \sqrt{u \sin^4 \vartheta + 4 \cos^2 \vartheta}}} \quad (\text{П2})$$

— параметр, описывающий степень эллиптичности НВ ($K_j = \pm 1$ для круговой поляризации; $K_j = 0, \infty$ — для линейной; $K_1 K_2 = -1$), $u = \omega_p^2 / \omega^2$. Параметры Стокса излучения, определенные в системе с

осью z вдоль $\vec{n}$, а осью x в плоскости $(\vec{n}, \vec{B})$, выражаются через интенсивности НВ:

$$I = \sum_{j=1,2} I_j, \quad Q = \sum_{j=1,2} p_Q^j I_j, \quad V = \sum_{j=1,2} p_V^j I_j, \quad U = 0, \quad (\Pi 3)$$

где p_Q^j и p_V^j — степени линейной и круговой поляризации НВ:

$$p_Q^j = \frac{1 - K_j^2}{1 + K_j^2}, \quad p_V^j = -\frac{2K_j}{1 + K_j^2}; \quad p_{Q,V}^j = -p_{Q,V}^{j*}, \quad (p_Q^j)^2 + (p_V^j)^2 = 1. \quad (\Pi 4)$$

Электрический вектор обыкновенной НВ колеблется в плоскости $(\vec{n}, \vec{B})$ и вращается в направлении, противоположном направлению ларморовского вращения электрона.

Коэффициенты рассеяния (в единицах $(N_e v_T)^{-1}$) удобно записать в виде (см., например, [2, 20])

$$k_{ij}(\vec{n}, \vec{n}') = \frac{3}{8\pi} \left| \sum_{s=\pm 1} t_s e_s^i(\vec{n}) e_s^j(\vec{n}') \right|^2 = \frac{3}{8\pi} \sum_{s=\pm 1} t_s t_s^* a_{s3}^i(\vec{n}) a_{s3}^j(\vec{n}'), \quad (\Pi 5)$$

где $t_s = (1 + \alpha |\vec{u}|)^{-1}$ — безразмерные циклические компоненты тензора поляризуемости $t_{s3} = \zeta_{s3} t_s$ электрона в магнитном поле, $a_{s3}^j(\vec{n}) = e_s^j(\vec{n}) e_3^j(\vec{n})$. Интегральные (по направлениям рассеянного фотона) коэффициенты рассеяния имеют вид

$$k_{ij} = k_{ij}(\vartheta) = \int d\vec{n}' k_{ij}(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_{s=\pm 1} t_s^2 a_s^i(\vartheta) A_s^j, \quad (\Pi 6)$$

где

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi a_{s3}^j(\vec{n}) = \delta_{s3} a_s^j(\vartheta), \quad a_s^j(\vartheta) = a_{s3}^j(\vec{n}) - |e_s^j(\vec{n})|^2; \quad (\Pi 7)$$

$$\sum_{j=1,2} a_{\pm 1}^j(\vartheta) = \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}, \quad \sum_{j=1,2} a_{\pm 2}^j(\vartheta) = \sin^2 \vartheta, \quad \sum_{s=\pm 1} a_s^j(\vartheta) = 1; \quad (\Pi 8)$$

$$a_s^j(\vartheta) = \frac{\sin^2 \vartheta}{2} (1 + p_Q^j), \quad a_{\pm 1}^j(\vartheta) = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \vartheta \pm 2p_V^j \cos \vartheta - p_Q^j \sin^2 \vartheta); \quad (\Pi 9)$$

$$A_s^j = \frac{3}{4} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta a_s^j(\vartheta); \quad \sum_{j=1,2} A_s^j = 1; \quad \sum_{s=\pm 1} A_s^j = \frac{3}{2}. \quad (\Pi 10)$$

Для коэффициента поглощения j -ой волны вследствие рассеяния имеем:

$$k_j^* = k_j^*(0) = \sum_{i=1, 2} k_{ji}(0) = \sum_{i=1} l_i^2 a_i^j(0). \quad (\text{П11})$$

Коэффициент «истинного» поглощения из-за свободно-свободных переходов дается формулой [16]

$$k_j^* = k_j^*(0) = \sum l_i^2 \xi_{i,j} a_i^j(0), \quad (\text{П12})$$

где $\xi_i = v_i/v_0$, $v_{i+1} = v_{i-1} = v_0$ и $v_0 = v_1$ — эффективные частоты электрон-ионных столкновений поперек и вдоль магнитного поля, $v_0 = 2e^2\omega^2/3\pi c^3$ — радиационная ширина. Величины $\xi_{i,j}$ можно записать в виде

$$\xi_{i,j} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{mc^2}{kT_i} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{6}} g_i, \quad (\text{П13})$$

где $\omega_p = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2}$ — плазменная частота, g_i — факторы Гаунта, зависящие от магнитного поля, частоты и температуры [21, 22]. Полный коэффициент экстинкции имеет вид

$$k_j = k_j^* + k_j^* = \sum_{i=1} l_i^2 (1 + \xi_{i,j}) a_i^j(0). \quad (\text{П14})$$

Наконец, отметим, что

$$p_Q^j(\vec{n}) = p_Q^j(-\vec{n}), \quad p_1^j(\vec{n}) = -p_1^j(-\vec{n}), \quad a_{i,1}^j(\vec{n}) = a_{i,2}^j(-\vec{n}); \quad (\text{П15})$$

$$k_{i,1}(\vec{n}, \vec{n}') = k_{i,1}(-\vec{n}, \vec{n}') = k_{i,1}(\vec{n}, -\vec{n}'); \quad (\text{П16})$$

$$k_{i,2}(-\vec{n}) = k_{i,2}(-\vec{n}); \quad k_j^* a_j^j(\vec{n}) = k_j^* a_j^j(-\vec{n}).$$

Кроме того, непосредственно из (П5) следует свойство взаимности

$$k_{ij}(\vec{n}, \vec{n}') = k_{ji}(\vec{n}', \vec{n}). \quad (\text{П17})$$

APPROXIMATE METHODS FOR SOLUTION OF RADIATIVE TRANSFER PROBLEMS IN A STRONGLY MAGNETIZED COLD PLASMA

A. D. KAMINKER, G. G. PAVLOV, N. A. SILANT'EV, Yu. A. SHIBANOV

Two approximate methods are developed for the solution of the equations of radiative transfer in an optically thick plasma for any orientation of uniform magnetic field. Being based on diffusion approximation the methods use two different ways of continuation of the diffusion solution from deep layers of plasma to the emitting boundary. Using the approaches developed the simple formulae are derived convenient for calculations as well as for qualitative analysis of spectral, angular and polarization characteristics of outgoing radiation. The results are in a good agreement with more accurate numerical calculations [7] which are available for the case when the magnetic field is perpendicular to the emitting boundary.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Гисдин, Г. Г. Павлов, ЖЭТФ, 11, 1806, 1973.
2. А. Э. Долгиков, Ю. Н. Гисдин, Н. А. Силантьев, Распространение и поляризация излучения в космической среде, Наука, М., 1979.
3. А. Ф. Илларионов, Р. А. Сюняев, Астрон. ж., 51, 698, 1974.
4. J. E. Foltén, M. J. Rees, Astron. Astrophys., 17, 226, 1972.
5. Н. А. Силантьев, Астрон. ж., 58, 37, 1979.
6. М. М. Баско, Астрофизика, 12, 273, 1976.
7. Н. А. Силантьев, Перенос излучения в однородной магнитоактивной плазме, Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР № 685, Ленинград, 1980.
8. Н. А. Силантьев, Автореферат канд. диссертации «Перенос поляризованного излучения», ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, 1972.
9. W. Nagel, Ap. J., 236, 904, 1980.
10. P. Meszaros, W. Nagel, J. Ventura, Ap. J., 231, 1066, 1980.
11. S. Kanno, PAS Japen, 32, 105, 1980.
12. Г. Г. Павлов, Л. Г. Яковлев, Астрофизика, 13, 173, 1977.
13. R. Morshak, Phys. Rev., 71, 443, 1947.
14. В. В. Соболев, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1967.
15. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
16. Г. Г. Павлов, Ю. А. Шибанов, Астрон. ж., 55, 373, 1978.
17. С. Чандраскар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
18. A. D. Kaminker, G. G. Pavlov, N. A. Silant'ev, Yu. A. Shibano, Preprint No. 716 of A. F. Ioffe Inst. Phys. Technol. Leningrad, 1981.
19. H. Bradt et al., Ap. J., 204, L57, 1974; S. H. Pravdo et al., Ap. J., 231, 912, 1979; S. H. Pravdo et al., M. N. RAS, 188, 5P, 1973.
20. J. Ventura, Phys. Rev., D19, 1684, 1979.
21. Г. Г. Павлов, А. Д. Каминкер, Письма АЖ, 1, 12, 1975.
22. Г. Г. Павлов, А. Н. Панов, ЖЭТФ, 71, 572, 1976.