АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 18 ФЕВРАЛЬ, 1982 ВЫПУСК 1

УДК 52—33

НЕОДНОРОДНОСТЬ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ И ОБРАЗОВАНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Н. А. ЗАБОТИН, А. С. МАРОЧНИК, П. Д. НАСЕЛЬСКИЙ

Поступила 30 декабря 1980
Принята к печати 5 декабря 1981

Рассчитан процесс образования черных дыр во Вселенной вследствие коллапса начальных адиабатических неоднородностей. Основным объектом исследования является случайное поле возмущений $\vec{\varphi}(\vec{r})$, обладающее нормальным законом распределения и спектром $g(k) = b_0 k^{n}$, $b_0 = \text{const}$. Задача определения спектра масс образующихся объектов формулируется в терминах выбросов случайного поля $f(\vec{x}, R)$, являющегося усредненным значением поля $\vec{\varphi}(\vec{r})$ в объеме радиуса R. Нахождение концентрации выбросов гауссовского случайного поля $f(\vec{x}, R)$ в единице пространственного объема и интервале $R \div R + dR$ проводится с учетом корреляционных свойств поля $f(\vec{x}, R)$. В качестве необходимого условия образования отдельной черной дыры используется критерий Карра—Хоукинга. Предлагаются три возможные модификации этого критерия, основанные на исследовании свойств высокоамплитудных выбросов поля $f(\vec{x}, R)$. Найдена связь между параметрами спектра масс первичных черных дыр и амплитудой и показателем спектра неоднородностей $g(k)$.

1. *Введение.* Образование структуры Вселенной, проявляющейся в форме галактик и их скоплений, связывается обычно с первичными адиабатическими, вихревыми или энтропийными возмущениями, развивающимися на фоне фридмановского расширения мира [1—3]. Спектральные характеристики возмущений рассматриваются при этом как начальные условия расширения Вселенной, наряду с зарядовой асимметрией и удельной энтропией на барион.

Одним из следствий существования адиабатических неоднородностей в распределении материи и гравитационного поля в ранней Вселенной является возможность образования первичных черных дыр (ПЧД) [4]. Ин-

терес к изучению космологической роли этого класса объектов стимулируется их исключительными свойствами. Во-первых, первичные черные дыры с $M \ll 10^{15}$ г могут влиять на величину удельной энтропии и зарядовой асимметрии Вселенной [5, 6] вследствие рождения пар механизмом Хоукинга [7]; во-вторых, черные дыры представляют собой нерелятивистский бесстолкновительный «газ», плотность которого убывает в процессе расширения Вселенной медленнее, чем материи, из которой формируются ПЧД. Это делает возможной ситуацию, когда первичные черные дыры определяют динамику расширения среды.

В космологической модели со «стандартной» удельной энтропией даже незначительного по плотности содержания ПЧД достаточно, чтобы повлиять на синтез легких элементов [8—10] и кинетику рекомбинации водорода [11, 12]. Являясь динамически активной подсистемой, черные дыры малой массы могут вследствие статистического скучивания приводить к образованию массивных ПЧД [13, 14], которые в состоянии инициировать формирование структуры на поздних этапах расширения мира [15, 16].

В настоящей работе мы остановимся на анализе динамической роли первичных черных дыр, ограничиваясь рассмотрением процесса их образования и характером распределения по массам. Основным объектом исследования при этом является поле первичных возмущений плотности, распределенных в соответствии с нормальным законом. Гипотеза о гауссовском характере случайного поля неоднородностей подразумевает существование высокоамплитудных отклонений, которые, при малой дисперсии, являются статистически редкими событиями. Такие высокоамплитудные выбросы являются «зародышами» первичных черных дыр. В качестве необходимого (но не достаточного) условия образования ПЧД нами используется критерий Карра—Хоукинга [17], который не учитывает особенностей протекания коллапса в неоднородной ситуации. Очевидно, что количество выбросов нормального случайного поля в единице объема определяется спектром начальных возмущений. Основная задача, таким образом, заключается в определении связи спектра образующихся объектов со статистическими характеристиками первичных возмущений. Эта задача была впервые сформулирована Карром [18]. Основным отличием настоящей работы от [18] является математически последовательный учет влияния корреляционных свойств случайного поля неоднородностей на вид функции распределения образующихся ПЧД по массам.

Дальнейший материал статьи организован следующим образом: в разделе 1 обсуждается критерий образования ПЧД; раздел 2 посвящен исследованию статистики высокоамплитудных выбросов случайного поля возмущений; в третьем разделе получены спектры масс формирующихся ПЧД, в заключении кратко обсуждаются результаты настоящей работы.

2. *Критерий образования ПЧД.* Рассмотрим фридмановскую в среднем Вселенную, заполненную материей с уравнением состояния $P = \gamma\rho c^2$ ($0 \leqslant \gamma < 1$). Будем считать, что распределение плотности в каждой точке определяется функцией $\delta(\vec{r}) = (\rho(\vec{r}) - \langle\rho\rangle)/\langle\rho\rangle$, которая представляет собой случайное гауссонское поле. Описание статистических свойств поля $\delta(\vec{r})$ мы будем проводить в начальный момент времени t_0, когда задан пространственный спектр

$$g(k) = \begin{cases} b_0 k^m; & kR_0 \leqslant 1 \\ 0; & kR_0 > 1 \end{cases} \qquad (1)$$

где $b_0 = \text{const}$, $R_0 = ct_0$. Выбор спектра в форме (1) соответствует предположению об отсутствии возмущений, масштаб которых в начальный момент t_0 меньше горизонта частиц ct_0. Спектр (1) полностью характеризует статистические свойства неоднородностей в ранней Вселенной, а при задании критерия образования ПЧД — и характер их распределения по массам. В случае произвольного неоднородного распределения вещества вряд ли существует простой критерий формирования черной дыры. В настоящей работе рассматривается космологическая модель с низким уровнем начальных возмущений. В этом случае оказывается возможным использование результатов точного расчета модельной задачи о коллапсе однородной сферически симметричной области [17]. Зона повышенной плотности будет отставать от фона в процессе расширения и может обособиться в момент t_*. Дальнейшая судьба этой области существенным образом зависит от соотношения между ее размером в момент остановки R_*, радиусом Джинса $R_\text{ж}(t_*)$ и горизонтом частиц ct_*. Если $R_* < R_\text{ж}$, то силы давления приведут к разбрасыванию уплотнения. При

$$R_\text{ж}(t_*) \leqslant R_* \leqslant ct_*, \qquad (2)$$

согласно Карру и Хоукингу [17], возмущенная область коллапсирует в ПЧД, а если $R_* > ct_*$ то формируется отдельная замкнутая Вселенная.

Критерий Карра—Хоукинга (2) может быть следующим образом переформулирован на величину контраста плотности $\xi = \Delta\rho/\rho(t_0)$ [18]:

$$\alpha(R) \equiv \beta^2\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2} < \xi < \alpha^2\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2} \equiv b(R) \qquad (3)$$

где R — радиус возмущенной области в начальный момент t_0; $R_0 = ct_0 < R$; $\beta^2 = \alpha^{-2}$; и α^2 — численный коэффициент порядка единицы. В настоящей работе мы будем предполагать, что при случайно-неоднородном распределении материи конечный результат эволюции возмущенной области, аналогично параметру ξ в однородном случае, определяет средняя ве-

личина контраста плотности $\langle \Delta\rho/\rho(t_0) \rangle$ в объеме неоднородности. Это предположение подкрепляется тем, что динамика коллапса, как известно, определяется крупномасштабным распределением вещества и не зависит от мелкомасштабных флуктуаций.

Воспользуемся для описания распределения плотности в пространстве усредненной характеристикой

$$f(\vec{x}, R) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int e^{-\left(\frac{\vec{r}-\vec{x}}{R}\right)^2} \delta(\vec{r})\, d^3\vec{r}, \tag{4}$$

где R, $\vec{x}$ — радиус и положение центра сферической области усреднения, а $f(\vec{x}, R)$ имеет наглядный смысл среднего контраста плотности $\langle \Delta\rho/\rho(t_0) \rangle$ в объеме радиуса R. Быстро спадающая при $|\vec{r}-\vec{x}| > R$ функция $\exp[-((\vec{r}-\vec{x})/R)^2]$ введена в (4) с целью устранения влияния случайного положения мелкомасштабных неоднородностей вблизи границы области усреднения на статистические свойства величины $f(\vec{x}, R)$ (подробное обсуждение этой процедуры см. в [19, 20]).

В дальнейшем мы будем считать условие

$$a(R) < f(\vec{x}, R) < b(R) \tag{5}$$

необходимым для формирования черной дыры в объеме радиуса R.

Отметим, что случайное поле $f(\vec{x}, R)$ сохраняет свойство нормальности, однородность и изотропию по пространственным координатам $\vec{x}$, но оно неоднородно по переменной R. Корреляционная функция поля $f(\vec{x}, R)$ полностью определяется заданием спектра (1):

$$K(R_1, R_2, x) = C_1 \int_0^\infty g(k)\, e^{-\frac{1}{4}k^2(R_1^2+R_2^2)} \frac{\sin kx}{kx} k^2 dk =$$
$$= \varepsilon^2 \left(\frac{R_1^2+R_2^2}{2R_0^2}\right)^{-n} e^{-x^2/(R_1^2+R_2^2)}\, {}_1F_1\left(-\frac{2n-3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{R_1^2+R_2^2}\right), \tag{6}$$

где: $C_1 = \text{const}$; $x^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (x_1^\alpha - x_2^\alpha)^2$; ${}_1F_1(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; параметры $\varepsilon = \text{const}$ и $n = (m+3)/2$ являются соответственно амплитудой и показателем спектра возмущений

$$\left\langle\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2\right\rangle^{1/2} = K^{1/2}(R, R, 0)\,\sigma_1 = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-n}. \qquad (7)$$

Из (5) и (7) следует, что при низком уровне начальных возмущений ($\sigma_1 \ll a(R)$) образование черных дыр возможно только в областях $(\vec{x}, R)$, находящихся вблизи высоких максимумов случайного поля $f(\vec{x}, R)$ ($f_{max} \gtrsim \sigma_1$) по пространственным координатам (см. рис. 1).

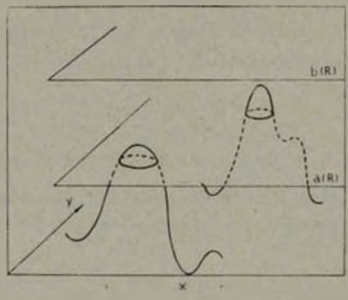

Рис. 1. Структура поля неоднородностей $f(\vec{x}, R) = f_R(\vec{x})$ при фиксированном значении радиуса области усреднения (показана зависимость только от двух координат). Плоскости $a(R)$ и $b(R)$ соответствуют нижней и верхней границам критерия Карра—Хоукинга.

Поскольку случайное поле $f(\vec{x}, R)$ обладает свойством однородности в пространстве, наиболее вероятным является сферически симметричное распределение значений $f(\vec{x}, R)$ в окрестности точки максимума. При $f_{max} \gtrsim \sigma_1$ значительные отклонения от этого распределения маловероятны [22, 23], и из соображений симметрии следует ожидать, что в черную дыру проэволюционирует область, центр которой совпадает с координатами точки максимума $\vec{x}_{max}$. Рассматривая модели с $\gamma < 1$ ($a(R) < b(R)$), мы пренебрегаем вероятностью появления максимума, превышающего $b(R)$*, так как число максимумов $f(\vec{x}, R)$ убывает с ростом f_{max} как $\sim \exp|-f_{max}^2/2\sigma_1^2|$ [24].

Как видно из рис. 2, условие (5) не фиксирует однозначно радиус возмущенной области, эволюционирующей в черную дыру. Это свидетель-

* Модель «предельно-жесткой» Вселенной ($p = \rho c^2$) будет рассмотрена нами отдельно.

ствует об ограниченной применимости критерия Карра—Хоукинга, полученного в [17] в модельной задаче о коллапсе однородного шара. Интересно, однако, выяснить, сколь существенно подобная неоднозначность сказывается на спектре масс формирующихся объектов. Можно указать несколько комплексов дополнительных условий, фиксирующих радиус области—вероятного кандидата в ПЧД. В этой связи нас будут интересовать в дальнейшем точки типа A, B и C (см. рис. 2). Выделенность точек типа A обусловлена следующими причинами. В окрестности максимума $\vec{x}_{max}$ функция $f(\vec{x}_{max}, R)$ убывает, причем между ее производными существует простая взаимосвязь:

$$f_R = \frac{R}{2}(f_{11} + f_{22} + f_{33}), \tag{8}$$

где $f_{ik} = \partial^2 f / \partial x^i \partial x^k$. В областях радиуса R_A величина возмущения $\Delta\rho/\rho = f(\vec{x}_{max}, R_A)$ будет наибольшей по сравнению с областями $R_A < R \leqslant R_B$, и процесс коллапса в этих зонах будет протекать быстрее.

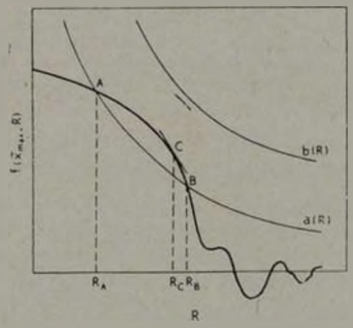

Рис. 2. Типичное поведение профиля высокоамплитудного выброса $f(\vec{x}_{max}, R)$ в окрестности точки максимума по пространственным координатам случайного поля $f(\vec{x}, R)$.

Из множества областей, удовлетворяющих критерию (5), области радиуса R_B могут формировать черную дыру максимальной (без учета аккреции) массы m, что непосредственно следует из результатов работы [18]:

$$m \simeq Mf^{\frac{3}{2}}, \qquad M = \frac{4}{3}\pi R^3 \langle \rho(t_0) \rangle . \tag{9}$$

Точки типа C выделяют в пространстве сферу радиуса R_*, на границе которой аффективное значение возмущения плотности $\xi(\vec{r})|_{R_*} = 0$.

Каждому из перечисленных выше типов точек соответствует определенный комплекс условий, налагаемых на случайное поле $f(\vec{x}, R)$:

Тип A: $$f_* = 0, \quad \Lambda < 0, \quad f = a(R), \quad f_R > a_R, \tag{10}$$

Тип B: $$f_* = 0, \quad \Lambda < 0, \quad f = a(R), \quad f_R < a_R, \tag{11}$$

Тип C: $$f_* = 0, \quad \Lambda < 0, \quad f > a(R), \quad f_R = -(3/R)f, \tag{12}$$

где $\Lambda < 0$ означает отрицательную определенность матрицы $\Lambda = \|f_{\alpha\beta}\|$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Каждому комплексу условий (10)—(12) соответствует в пространстве $(\vec{x}, R)$ точечное множество, исследование свойств которого мы будем проводить в соответствии с методами, развитыми в работах [23, 25].

3. *Статистика высоких максимумов поля неоднородностей.* Согласно [23], среднее число максимумов в единице пространственного объема, высота которых лежит в интервале $f \div f + df$, для однородного гауссоаского поля равно

$$N_m df = df \int_{\Lambda<0} |\det \Lambda| P(f, \vec{0}, f_{\alpha\beta}) df_{\alpha\beta}, \tag{13}$$

где $\Lambda < 0$ означает интегрирование по области значений $f_{\alpha\beta}$, отвечающих отрицательной определенности матрицы $\|f_{\alpha\beta}\|$; $P(f, \vec{0}, f_{\alpha\beta})$ — совместная функция распределения поля $f(\vec{x}, R)$, его первых и вторых частных производных по пространственным координатам, куда подставлено $f_* = 0$.

Для выполнения комплекса условий (10) в интервале $R \div R + dR$ необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$a(R) - [f_R(\vec{x}_{max}, R) - a_R'(R)]\, dR < f(\vec{x}_{max}, R) < a(R) \tag{14}$$

выполнялось при каком-либо $f_R(\vec{x}_{max}, R) > a_R'(R)$. Объединяя (13), (14) и воспользовавшись (8) для уменьшения числа линейно независимых

переменных, получим концентрацию выбросов типа А в интервале $R \div R + dR$:

$$N_A\,dR = dR \int_{\Sigma^*} (f_R - a_R') \,|\det \Lambda^*|\, P_{10}(a,\ \vec{0},\ f_{\alpha\beta}^*,\ f_R)\, df_{\alpha\beta}^* df_R', \qquad (15)$$

где $P_{10}(a,\ \vec{0},\ f_{\alpha\beta}^*,\ f_R)$ — совместная нормальная функция распределения случайных величин f, f_{α}', f_{11}', f_{22}', $f_{\alpha\beta}'$ ($\alpha \neq \beta$), f_R', причем $f_{\alpha}' = 0$, $f = a(R)$; Λ^* — матрица Λ, в которой элемент f_{33} заменен на $(2/R) f_R' - f_{11}' - f_{22}'$. Интегрирование в (15) производится по области изменения переменных, определяемой совокупностью условий $\Sigma^* = \Lambda^* < 0 \cap \cap f_R' > a_R'$. Существенное упрощение математической стороны задачи возникает при подсчете высоких ($f \gg \sigma_1$) выбросов случайного поля $f(\vec{x},\ R)$, поскольку при этом его произвольная стационарная точка с подавляющей вероятностью является точкой максимума [23, 24]. Условие $a(R) \gg \sigma_1$ позволяет распространить область интегрирования Σ^* на все множество значений $f_{\alpha\beta}^*$, приходя к асимптотическому числу точек типа А в интервале $R \div R + dR$:

$$N_A dR \simeq dR \int_{a_R}^{\infty} df_R' (f_R' - a_R') \int_{\infty} |\det \Lambda^*|\, P_{10}(a,\ \vec{0},\ f_{\alpha\beta}^*,\ f_R')\, df_{\alpha\beta}^*. \qquad (16)$$

Аналогично можно получить характеристику множества В-точек:

$$N_B dR \simeq \int_{-\infty}^{a_R} df_R' (a_R - f_R') \int_{\infty} |\det \Lambda^*|\, P_{10}(a,\ \vec{0},\ f_{\alpha\beta}^*,\ f_R')\, df_{\alpha\beta}^*. \qquad (17)$$

Среднее число С-точек в единице пространственного объема в интервале радиусов $R \div R + dR$ и интервале амплитуд $f \div f + df$ имеет вид:

$$N_C dR df \simeq dR df \int_{-\infty}^{(12/R^2) f} df_{RR}' \left(\frac{12}{R^2} f - f_{RR}'\right) \int_{\infty} |\det \Lambda^*| \times$$
$$\times P_{11}\left(f,\ \vec{0},\ f_{\alpha\beta}^*,\ -\frac{3}{R} f,\ f_{RR}'\right) df_{\alpha\beta}^*, \qquad (18)$$

где $P_{11}\left(f,\ \vec{0},\ f_{\alpha\beta}^*,\ -\frac{3}{R} f,\ f_{RR}'\right)$ — совместная нормальная функция рас-

пределения случайных величин f, f_α, f_{11}, $f_{\alpha\alpha}$, $f_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), $f_{R\alpha}$, f_{RR}, взятая при $f_\alpha = 0$, $f_R = -(3/R)f$. Конкретный вид функции распределения P_{10} и P_{11}, а также параметры, от которых они зависят, приведены в Приложении.

Вычисление интегралов (16)—(18) приводит к следующим результатам:

1. «Плоский» спектр неоднородностей ($n = 2$, $m = 1$):

$$N_A = N_B = \frac{6}{5\pi^{5/2}} \beta^6 R_0^{-4} \varepsilon^{-3} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\varepsilon^2}\right)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4}, \tag{19}$$

$$N_C(f > a) = \int_a^\infty N_C\, df = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi^{5/2}} \beta^6 R_0^{-4} \varepsilon^{-3} \exp\left(-\frac{3}{4}\frac{\beta^2}{\varepsilon^2}\right)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4}. \tag{20}$$

2. «Крутой» начальный спектр ($m > 1$, $n > 2$). В приближении $(n-2)(a/\sigma_1) \gg 1$ получаем:

$$N_A = \frac{\omega_3(n)}{R_0^4}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4}\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)\exp\left\{-\left[\frac{1}{2} + \frac{(n-2)^2}{2n}\right]\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)^2\right\}, \tag{21}$$

$$N_B = \frac{\omega_3(n)}{R_0^4}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4}\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)^4\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)^2\right\}, \tag{22}$$

$$N_C(f > a) = \frac{\omega_3(n)}{R_0^4}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4}\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)^3\exp\left\{-\frac{n(n-2)^2+9}{2n(n+1)}\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)^2\right\}, \tag{23}$$

где

$$\omega_3(n) = 27\sqrt{\frac{2}{5}}(2\pi)^{-3/2}\frac{1}{n+1}\left[\frac{|n-2|}{3n} - 1 + \frac{n}{|n-2|} - \frac{n^2}{3(n-2)^2}\right];$$

$$\omega_4(n) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{n}\,|2-n|}{n+1};$$

$$\omega_4(n) = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\pi^{-3/2}\frac{(n^2-5n+9)(n+1)}{n[n(n-2)^2+9]}$$

3. «Пологий» спектр возмущений ($m < 1$, $1 < n < 2$). В приближении $(2-n)(a/\sigma_1) \gg 1$ получаем:

$$N_A = \frac{\omega_2(n)}{R_0^4}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4}\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)^4\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)^2\right\}, \tag{24}$$

$$N_B = \frac{\omega_1(n)}{R_0^4}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4}\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)\exp\left\{-\left[\frac{1}{2} + \frac{(n-2)^2}{2n}\right]\left(\frac{a}{\sigma_1}\right)^2\right\}, \tag{25}$$

$N_C(f > a)$ в этом варианте совпадает с (23).

Отметим, что для спектров с $n > 1$ можно не учитывать возможность многократного пересечения одной реализацией $f(x_{max}, R)$ уровня $a(R)$. Можно показать, что при $R > R_B$ наиболее вероятное поведение функции f носит степенной характер $\bar{f}(R > R_B) \sim a(R_B)(R/R_B)^{-3n}$. Условная дисперсия величины $\bar{f}(R > R_B)$ плавно возрастает от нуля при $R = R_B$ до $\sigma_1(R)$ при $R \gg R_B$. Для $n > 1$ $\bar{f}(R > R_B)$ убывает по мере увеличения R быстрее, чем $a(R) \sim R^{-2}$, поэтому вероятность повторного пересечения функцией $f(x_{max}, R)$ уровня $a(R)$ пренебрежимо мала. Таким образом, $N_{A, B, C}$ являются функциями распределения по радиусам областей, эволюционирующих в ПЧД.

4. *Спектр масс первичных черных дыр.* В разделе 1 была отмечена возможность существования трех типов условий, определяющих параметры «зародышей» ПЧД, которые соответствуют определенным представлениям о динамике коллапса возмущенных областей. Естественно, может оказаться, что реальный процесс образования первичной черной дыры нельзя будет безусловно отнести к какому-либо из типов A, B, C. В этом случае критерий образования ПЧД должен формулироваться исходя из конкретных представлений о характере коллапса неоднородных зон. Однако отдельные черты реального процесса формирования черной дыры могут быть прослежены на упрощенных моделях, соответствующих A-B-C-выбросам случайного поля. Очевидно, что если конкретная реализация $f(x_{max}, R)$ имеет C-точку, то в черную дыру попадает вещество, находящееся под радиусом R_C, а натекание окружающей материи, обладающей пониженной плотностью, на сферу Шварцшильда может рассматриваться как режим стационарной аккреции. Если же C-точки нет, то образование ПЧД будет идти либо по типу A, либо — B. Из (19)—(25) следует, что доля реализаций, обладающих точками типа C, является незначительной по сравнению с числом выбросов типа A и B. Поэтому их учет не может сколь-нибудь существенно повлиять на спектр масс ПЧД в вариантах A—B.

Функцию распределения образующихся черных дыр можно легко рассчитать, воспользовавшись (19)—(25) и (9). Учитывая, что в случае коллапса типа A и B $f = a(R) = \beta^2 (R/R_0)^{-2}$, из (9) получаем:

$$\frac{R}{R_0} = \beta^{\frac{2\gamma}{1+\gamma}} \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1+3\gamma}{3(1+\gamma)}}, \qquad (26)$$

где $m_0 = (4/3)\pi R_0^3 \rho_0$, $\rho_0 = \langle \rho(t_0) \rangle$. Функция распределения ПЧД по массам в произвольный момент времени t имеет следующий вид*:

* Испарением ПЧД малой массы пренебрегаем.

$$\Phi_{A,B}(m)\,d\left(\frac{m}{m_0}\right) = F(t)\,N_{A,B}\left[R\left(\frac{m}{m_0}\right)\right]\left|\frac{dR(m/m_0)}{d(m/m_0)}\right| d\left(\frac{m}{m_0}\right), \quad (27)$$

где $F(t) = [a(t_0)\,a(t)]^3$, $a(t)$ — масштабный фактор фридмановской Вселенной. Для различных значений показателя n спектра начальных возмущений расчет $\Phi_{A,B}$ приводит к следующим результатам:

1. „Плоский" спектр ($n = 2$):

$$\Phi_A = \Phi_B = \frac{2(1+3\gamma)}{5(1+\gamma)}\,\pi^{-5/2}\,\frac{\rho_0}{m_0}\,F(t)\,\beta^{\frac{6(1+2\gamma)}{1+\gamma}}\,\varepsilon^{-3}\exp\left(-\frac{\beta^2}{2\varepsilon^2}\right)\left(\frac{m}{m_0}\right)^{-\frac{1+3\gamma}{1+\gamma}}. \quad (28)$$

2. „Крутой" спектр ($n > 2$):

$$\Phi_A^{(1)} = \frac{1+3\gamma}{3(1+\gamma)}\,\omega_1(n)\,\frac{\rho_0}{m_0}\,F(t)\,\beta^{2-\frac{2\gamma}{1+\gamma}(n-5)}\,\varepsilon^{-1}\left(\frac{m}{m_0}\right)^{-1+\frac{1+3\gamma}{3(1+\gamma)}(n-5)}\times \quad (29)$$
$$\times\exp\left\{-\left[\frac{1}{2}+\frac{(n-2)^2}{2\gamma}\right]\beta^{4-\frac{4\gamma}{1+\gamma}(n-2)}\,\varepsilon^{-2}\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2(1+3\gamma)}{3(1+\gamma)}(n-2)}\right\};$$

$$\Phi_B^{(1)} = \frac{1+3\gamma}{3(1+\gamma)}\,\omega_2(n)\,\frac{\rho_0}{m_0}\,F(t)\,\beta^{8-\frac{2\gamma}{1+\gamma}(4n-11)}\,\varepsilon^{-4}\left(\frac{m}{m_0}\right)^{-1+\frac{1+3\gamma}{3(1+\gamma)}(4n-11)}\times \quad (30)$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\beta^{4-\frac{4\gamma}{1+\gamma}(n-2)}\,\varepsilon^{-2}\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2(1+3\gamma)}{3(1+\gamma)}(n-2)}\right].$$

3. „Пологий" спектр ($1 < n < 2$):

$$\Phi_A^{(2)} = \Phi_B^{(1)}; \quad \Phi_B^{(2)} = \Phi_A^{(1)}. \quad (31)$$

Максимальной массой в спектрах любого типа является масса $m_{max} = m_0\,(t/t_0)$.

Зависимость от времени плотности «газа» первичных черных дыр имеет вид:

$$\rho_{bh}^{A,B}(t) = \int_{m_{min}}^{m_{max}} \Phi_{A,B}(m)\,m\,d\left(\frac{m}{m_0}\right). \quad (32)$$

При $n > 2$ интегральная плотность ПЧД оценивается из (32) следующим образом:

$$n = 2: \qquad \rho_{bh}(t) \sim \rho_0 F(t)\,\varepsilon^{-3}\exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2\varepsilon^{-2}\right), \quad (33)$$

$$n > 2: \quad \rho^{A}_{бл}(t) \simeq \rho_0 F(t) \exp\left\{-\left|\frac{1}{2} + \frac{(n-2)^2}{2n}\right| \beta^{1/2} z^{-2}\right\}, \qquad (34)$$

$$\rho^{B}_{бл}(t) \simeq \rho_0 F(t) z^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^{1/2} z^{-2}\right). \qquad (35)$$

Во всех этих вариантах основной вклад в плотность черных дыр дают объекты минимальной массы. При $n < 2$ в области применимости теории ($(2-n)(a/a_1) \gg 1$), плотность „газа" ПЧД оказывается быстро возрастающей функцией времени, причем основной вклад дают объекты максимальной массы m_{max}. При $t = t_1 \approx t_0 (\beta^{1/2})^{\frac{2(1-\gamma)}{3(1+\gamma)(2-n)}}$ первичные черные дыры с показывают определяющее влияние на темп расширения Вселенной, так как $\rho^{A}_{бл}/\langle \rho \rangle$ и $\rho^{B}_{бл}/\langle \rho \rangle$ в этот момент становятся величинами порядка единицы. Отметим, что при $t \geq t_1$ применимость рассчитанных ранее спектров $\Phi^{(n)}_{A,B}$ нарушается, поскольку уровень возмущений в масштабе горизонта частиц перестает быть малым. Еще при $t \gtrsim t_1$ необходимо учитывать влияние нелинейных эффектов, обязанных присутствию высокоамплитудных неоднородностей, на характер расширения Вселенной и динамику образования черных дыр.

5. *Заключение.* Результаты настоящей работы свидетельствуют о том, что характеристики спектра масс ПЧД позволяют судить о параметрах спектра начальных возмущений. В простейшем варианте степенного спектра $g(k) = b_0 k^m$ особый интерес вызывает случай $m < 1$. Для таких возмущений неизбежно наступает период доминирования плотности энергии турбулентности и „газа" ПЧД над фоновой материей. В этот период расширение мира должно носить существенно не фридмановский характер из-за присутствия неоднородностей с амплитудой $\Delta\rho/\rho \geq 1$. По-видимому, начальный спектр с $m < 1$ трудно согласовать с наблюдениями крупномасштабной однородности и изотропии Вселенной, если не существует обрезания спектра на k_{min}, при котором уровень возмущений все еще мал. С другой стороны, маловероятно, чтобы неоднородности в масштабах скоплений галактик и масштабах $M < 10^{15}$ г описывались единым степенным законом. Можно ожидать, что функция $g(k)$ имеет достаточно произвольный вид. В этом случае всю область k можно разбить на малые участки $k_i < k_i + \Delta k_i$ и аппроксимировать поведение $g(k)$ на каждом интервале степенным образом. Очевидно, что в зависимости от наклона спектра, в соответствующем диапазоне масс ПЧД должны проявляться свойства их функции распределения, исследованные в настоящей работе.

Если в диапазоне $k_i < k \leqslant k_{i+1}$ начальный спектр аппроксимируется степенной функцией с показателем $m_i < 1$, то плотность черных дыр в

соответствующем интервале масс будет экспоненциально расти во времени. Даже при резком «завале» спектра при $k < k_1$, такой рост плотности может обеспечить существование эры доминирования ПЧД, если амплитуда b_{k_1} не слишком мала.

Качественные закономерности поведения функции распределения ПЧД, в частности выделенность «плоского» спектра неоднородностей ($m = 1$), были отмечены Карром [18]. В настоящей работе показано, что количественные характеристики спектра масс ПЧД определяются корреляционными аффектами и особенностями динамики коллапса. Существенное значение имеют условия, дополняющие критерий образования черной дыры Карра—Хоукинга в случае неоднородного коллапса. Отметим, однако, что возникающая неоднозначность проявляет себя слабее при «плоском» спектре начальных возмущений (см. (19), (28)).

Рассмотренный в настоящей работе метод расчета спектра масс первичных черных дыр допускает обобщение с учетом особенностей неоднородного коллапса возмущенных областей. Существенной чертой этого процесса является общность свойств «зародышей» ПЧД разных масштабов. В частности, условие существования высокого выброса случайного поля в таких областях автоматически ограничивает возможный тип распределения плотности сферически симметричным случаем (см. раздел 2). При этом задание спектра неоднородностей $g(k)$ позволяет рассчитать наиболее вероятный профиль выброса $f(x_{max}, R)$, определяемый ограниченным числом параметров (например, высотой выброса и его размером). Поскольку вероятностный характер поля неоднородностей в окрестности высокого максимума подавлен, вопрос об определении конечной массы образующейся черной дыры приобретает, по существу, динамический характер.

Приложение

Функция распределения возмущенных областей по радиусам определяется корреляцией следующих величин: $f = \varphi_0$, $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2$, $f_1 = \varphi_1$, $f_{11} = \varphi_3$, $f_{22} = \varphi_6$, $f_{12} = \varphi_7$, $f_{13} = \varphi_8$, $f_{23} = \varphi_9$, $f_R = \varphi_{10}$, $f_{RR} = \varphi_{11}$. Все они получаются действием линейных операторов на случайную величину φ_0: $\varphi_i = L_i\varphi_1$. Поэтому их взаимные корреляционные функции $K_{ij} = K_{\varphi_i\varphi_j}$ определяются функцией корреляции $K_{11} = K(R_1, R_2, x)$ (см. раздел 2): $K_{ij} = L_i^{(1)}L_j^{(2)}K_{11}$ [21], где индексы „1" или „2" означают, что данный оператор действует на переменные функции K_{11} соответственно с индексами „1" или „2". Коэффициенты корреляции $K_{ij} = K_{ij}(R, R, 0)$ имеют вид:

$$K_{56} = \frac{4n(n+1)}{15R^4}\sigma_1^2; \qquad K_{15} = K_{16} = -\frac{2n}{3R^2}\sigma_1^2; \qquad K_{1-10} = -\frac{n}{R}\sigma_1^2;$$

$$K_{5-10} = K_{6-10} = \frac{2n(n+1)}{3R^3}\sigma_1^2; \qquad K_{1-11} = \frac{n^2}{R^2}\sigma_1^2;$$

$$K_{5-11} = K_{6-11} = -\frac{2n(n+1)^2}{3R^3}\sigma_1^2; \quad K_{10-11} = -\frac{n(n+1)^2}{R^3}\sigma_1^2.$$

Аналогично находим дисперсии σ_i случайных величин ψ_i ($\sigma_i^2 = K_{ii}$):

$$\sigma_1 = \varepsilon\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-n}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sqrt{\frac{2n}{3}}\frac{1}{R}\sigma_1;$$

$$\sigma_5 = \sigma_6 = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{n(n+1)}\frac{1}{R^2}\sigma_1; \qquad \sigma_7 = \sigma_8 = \sigma_9 = \frac{\sigma_5}{\sqrt{3}};$$

$$\sigma_{10} = \sqrt{n(n+1)}\frac{1}{R}\sigma_1; \quad \sigma_{11} = \sqrt{n(n+1)[1+(n+1)(n+2)]}\frac{1}{R^2}\sigma_1.$$

Совместные функции распределения P_{10} и P_{11} имеют вид:

$$P_l = (2\pi)^{-l/2}\prod_{i=1}^{l}\sigma_i^{-1}D_{(l)}^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2D_{(l)}}\sum_{i,j=1}^{l}D_{ij}^{(l)}\frac{\psi_i\psi_j}{\sigma_i\sigma_j}\right\},$$

где $l = 10, 11$; $D_{(l)} = \det\|R_{ij}^{(l)}\|$; $D_{ij}^{(l)}$ — алгебраические дополнения элементов корреляционных матриц $\|R_{ij}^{(l)}\| = \left\|\frac{K_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}\right\|^{(l)}$; $i, j = 1, 2, \ldots, l$.

Ростовский государственный университет
Институт космических исследований АН СССР

INHOMOGENEITY OF THE EARLY UNIVERSE AND FORMATION OF PRIMORDIAL BLACK HOLES

N. A. ZABOTIN, L. S. MAROCHNIK, P. D. NASELSKIY

The formation of black holes in the Universe due to collapse of primeval adiabatic inhomogeneities is considered. The main object of investigation is the stochastic field of perturbations $\delta(x, y, z)$ having the normal distribution and the spectrum $g(k) = b_0k^n$; $b_0 = \text{const}$. The problem of determination of mass spectrum is formulated in terms of the eruptions of stochastic field $f(x, R)$ being the average of

$\delta(x, y, z)$ over the volume with the radius R. The abundance of eruptions of Gaussian stochastic field $f(\vec{x}, R)$ per unit volume in the region $R \div R + dR$ is obtained taking into account the correlation properties of the field $f(\vec{x}, R)$. As the necessary condition of creation of seperate black hole the Carr-Hawking criterion is used. Three possible modifications of this criterion are suggested based on the studies of eruptions with large amplitude. The relation between the parameters of PBH mass spectrum and the amplitude and spectral exponent m of initial perturbations is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 6, 119, 1970.
2. *А. М. Озерной, А. Д. Чернин*, Астрон. ж., 44, 1131, 1967.
3. *R. H. Dicke, P. J. E. Peebles*, Ap. J., 194, 838, 1968.
4. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Астрон. ж., 43, 758, 1966.
5. *G. F. Chapline*, Nature, 253, 251, 1975.
6. *Я. Б. Зельдович*, Письма ЖЭТФ, 24, 29, 1976.
7. *S. W. Hawking*, Comm. Math. Phys., 43, 199, 1975.
8. *Б. В. Вайнер, П. Д. Насельский*, Письма АЖ, 3, 146, 1977.
9. *Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский, М. Ю. Хлопов, В. М. Чечеткин*, Письма АЖ, 3, 208, 1977.
10. *Б. В. Вайнер, О. А. Дрыжакова, П. Д. Насельский*, Письма АЖ, 4, 344, 1978.
11. *П. Д. Насельский*, Письма АЖ, 4, 387, 1978.
12. *П. Д. Насельский*, Астрофизика, 14, 145, 1978.
13. *Н. А. Заботин, П. Д. Насельский*, Астрофизика, 16, 337, 1980.
14. *B. J. Carr*, Astron. Astrophys., 56, 377, 1977.
15. *M. P. Ryan*, Ap. J., 177, L79, 1972.
16. *P. Meszaros*, Astron. Astrophys., 38, 5, 1975.
17. *B. J. Carr, S. W. Hawking*, M. N., 168, 399, 1974.
18. *B. J. Carr*, Ap. J., 201, 1, 1975.
19. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Строение и эволюция Вселенной, Наука, М., 1975.
20. *Н. А. Заботин, Л. С. Марочник, П. Д. Насельский*, Препринт ИКИ АН СССР, Пр-564, 1980.
21. *А. А. Свешников*, Прикладные методы теории случайных функций, Наука, М., 1968.
22. *А. Г. Дорошкевич*, Астрофизика, 6, 581, 1970.
23. *Ю. К. Беляев*, в сб. «Выбросы случайных полей», МГУ, М., 1972.
24. *В. П. Носко*, Труды советско-японского симпозиума по теории вероятностей в Хабаровске, Новосибирск, 1969, стр. 209.
25. *В. И. Тихонов*, Выбросы случайных процессов, Наука, М., 1970.