АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 18 ФЕВРАЛЬ, 1982 ВЫПУСК 1

УДК 52:536

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТИ НА ЧАСТОТУ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНОЙ ЗВЕЗДЫ

К. А. СИДОРОВ

Поступила 9 июня 1981
Принята к печати 5 декабря 1981

Выведено уравнение малых адиабатических радиальных колебаний твердотельно вращающейся звезды. Полученное уравнение применяется в частном случае однородной звезды. Учитываются возмущения порядка Ω^2 и рассматриваются все радиальные моды. Показано, что частоты радиальных колебаний вращающейся звезды меньше соответствующих частот невращающейся звезды той же массы. Отношения периодов обертонов изменяются очень мало. Приливные силы не изменяют частоты радиальных пульсаций.

1. *Введение*. В предыдущей работе автора [1] рассматривалось влияние вращения на частоту основной моды радиальных колебаний политропной звезды. При этом использовался метод Чандрасекара [2, 3], который оказывается неприменим при индексе политропы $n \leqslant 1$. Следовательно, остался неисследованным интересный случай однородных конфигураций. В данной статье мы рассмотрим однородную звезду.

Формула

$$\sigma_0^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho_0 \left[\frac{1}{2}\gamma m(m+1) - 4\right], \quad m = 2, 4, 6, \ldots, \tag{1}$$

полученная Стерне [4], дает выражение для частот всех радиальных мод однородной невращающейся звезды. Здесь ρ_0 — плотность звезды, γ — отношение удельных теплоемкостей. Выражение чаастоты основного тона радиальных колебаний твердотельно вращающейся звезды было получено вириальными методами [5, 6]:

$$\sigma^2 = (3\gamma - 4)\frac{4}{3}\pi G\rho + \frac{2}{3}(5 - 3\gamma)\,\Omega^2. \tag{2}$$

При выводе этой формулы угловая скорость Ω предполагалась достаточно малой. Следует заметить, что в формулу (2) входит плотность вращающейся звезды ρ, которая отличается от плотности невращающейся звезды ρ_0 на величину порядка Ω^2. На это обстоятельство ранее обращали внимание Каулинг и Невинг [7].

В этой работе мы получим выражение для частот всех мод радиальных колебаний вращающейся звезды. Кроме того, как и в работе [1], мы рассмотрим конфигурации фиксированной массы. Наконец, будет показано, что присутствие спутника не влияет на частоту радиальных колебаний звезды.

2. *Вывод уравнения малых радиальных колебаний вращающейся звезды.* Уравнение движения в системе координат, жестко связанной со звездой, имеет вид

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \rho \nabla \left(\frac{r^2 \Omega^2}{2} \sin^2 \theta \right) + 2\rho [\vec{\Omega} \times \vec{V}], \tag{3}$$

где Φ — гравитационный потенциал, θ — полярный угол. Нас интересуют радиальные колебания, поэтому $\vec{V} = V(r)\vec{r}$, где $\vec{r}$ — орт соответствующей оси. Усредним уравнение (3) на поверхности сферы. Для этого умножим левую и правую части уравнения движения на $\vec{r} \sin\theta \, d\theta d\varphi / 4\pi$ и проинтегрируем по всем углам. Подобный подход уже использовался при исследовании радиальных колебаний звезд [8]. Мы считаем вращение достаточно медленным, поэтому все физические величины, входящие в уравнение (3), имеют вид

$$f(r, \theta) = f_0(r) + f_1(r) + f_2(r) P_2(\cos\theta), \tag{4}$$

где f_0 — невозмущенное вращением значение физической величины, а f_1 и f_2 — величины порядка Ω^2. Если пренебречь величинами порядка Ω^4 и выше, то члены, содержащие $P_2(\cos\theta)$, после интегрирования по углам обращаются в нуль (ср., например, [9]), и уравнение движения принимает вид

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g + \frac{2}{3} \Omega^2 r \rho, \tag{5}$$

где g — ускорение силы тяжести. Все входящие в это уравнение величины имеют вид (4) с тождественно равной нулю угловой частью. То же справедливо и для усредненного по углам уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{V}. \tag{6}$$

Для адиабатических колебаний уравнение энергии имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\gamma p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \tag{7}$$

Уравнения (5)—(7) описывают адиабатические радиальные колебания вращающейся звезды. За исключением последнего члена в правой части уравнения движения они полностью совпадают с уравнениями адиабатических радиальных колебаний невращающейся звезды. Последние уже решались ранее [10], и здесь будет проведено аналогичное рассмотрение.

Дифференцирование уравнения движения по времени дает

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{dg}{dt} + \frac{2}{3} \frac{d}{dt} (\Omega^2 r). \tag{8}$$

Второй и третий члены в правой части приводятся к виду [10]

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{2gV}{r}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} (\gamma p \operatorname{div} \vec{V}) - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{10}$$

Чтобы преобразовать последний член в уравнении (8) обратимся к закону сохранения момента импульса

$$\Omega r^2 \sin^2 \theta = \text{const}. \tag{11}$$

Так как при радиальных колебаниях $\theta = \text{const}$, то

$$\Omega r^2 = h = \text{const}. \tag{12}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} (\Omega^2 r) = \frac{d}{dt} \left(\frac{h^2}{r^3} \right) = -\frac{3h^2}{r^4} \frac{dr}{dt} = -3\Omega^2 V. \tag{13}$$

Подставляя (9), (10) и (13) в уравнение (8) и используя уравнение движения (5), получаем

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\gamma p \operatorname{div} \vec{V}) + \frac{2V}{r} \frac{dV}{dt} + \frac{4gV}{r} - \frac{10}{3} \Omega^2 V. \tag{14}$$

Нас будут интересовать только малые колебания звезды. В этом случае можно пренебречь членами второго порядка по V. Вводя традиционные переменные

$$V = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + V \frac{\partial \zeta}{\partial r} \approx \dot{\zeta}, \tag{15}$$

$$\xi(r, t) = \xi(r) e^{i\sigma t}, \tag{16}$$

получаем уравнение малых радиальных адиабатических колебаний вращающейся звезды

$$\frac{d}{dr}(\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi}(r)) + \left(\sigma^2 + \frac{4g}{r} - \frac{10}{3}\Omega^2\right)\rho\xi(r) = 0. \tag{17}$$

В этом уравнении все величины берутся для равновесного состояния вращающейся звезды.

3. *Частота радиальных колебаний однородной вращающейся звезды.* Пусть

$$\vec{\xi} = \nabla \Psi, \tag{18}$$

тогда волновое уравнение (17) принимает вид

$$\frac{d}{dr}(\gamma p \nabla^2 \Psi) + \left(\sigma^2 + \frac{4g}{r} - \frac{10}{3}\Omega^2\right)\rho\frac{d\Psi}{dr} = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим коэффициент при $d\Psi/dr$. В него входит величина g/r. Потенциал однородного эллипсоида ($\rho = \text{const}$) имеет вид $\Phi = (A + B\cos^2\theta) r^2$. После вычисления $\nabla\Phi$ и усреднения по поверхности сферы получаем, что $g = \text{const}\, r$. Таким образом, коэффициент при $d\Psi/dr$ постоянен. Проинтегрируем уравнение (19) от нуля до r:

$$c^2 \nabla^2 \Psi + \left(\sigma^2 + \frac{4g}{r} - \frac{10}{3}\Omega^2\right)\Psi = 0, \tag{20}$$

где скорость звука

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \tag{21}$$

Из уравнения гидростатического равновесия

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g + \frac{2}{3}\Omega^2 r\rho \tag{22}$$

следует, что

$$p = \int_r^R \left(\rho g - \frac{2}{3}\Omega^2 r\rho\right) dr = \frac{1}{2} g_* \rho R (1 - x^2) - \frac{1}{3}\Omega^2\rho R^2 (1 - x^2), \tag{23}$$

где g_* — ускорение свободного падения на поверхности звезды и

$$x = r/R. \tag{24}$$

Тогда

$$c^2 = \gamma\left(\frac{g_* R}{2} - \frac{\Omega^2 R^2}{3}\right)(1 - x^2), \tag{25}$$

и уравнение (20) принимает вид

$$(1 - x^2)\,\nabla^2\Psi + J\Psi = 0, \tag{26}$$

где введено обозначение

$$J = \frac{\sigma^2 + \dfrac{4g}{r} - \dfrac{10}{3}\,\Omega^2}{\gamma\left(\dfrac{g_*}{2R} - \dfrac{\Omega^2}{3}\right)}\,. \tag{27}$$

Решение уравнения (26) имеет вид [18]

$$\Psi = \frac{x^2 - 1}{x}\,\frac{dP_m(x)}{dx}. \tag{28}$$

Необходимым условием конечности решения является

$$J = m(m+1), \quad m = 2, 4, 6\ldots\,. \tag{29}$$

Подставляя в (29) определение J (27), получаем выражение для частоты малых радиальных адиабатических колебаний однородной твердотельно вращающейся звезды

$$\sigma^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho\left[\frac{\gamma}{2}\,m(m+1) - 4\right] + \frac{10 - m(m+1)\gamma}{3}\,\Omega^2, \qquad m = 2, 4, 6\ldots \tag{30}$$

Для невращающейся звезды ($\Omega = 0$) эта формула совпадает с формулой Стерне (1), а для основного тона радиальных колебаний ($m = 2$) она совпадает с формулой Леду (2).

Однако в формулу (30), как и в формулу Леду (2), входит плотность вращающейся звезды ρ, отличающаяся от плотности невращающейся звезды ρ_0 на величину порядка Ω^2 [7]. Поэтому первый член в правой части (30) нельзя считать равным частоте колебаний невращающейся звезды σ_0^2.

Перепишем выражение для давления (23) в виде

$$p = p_c - p_c r^2/R^2, \tag{31}$$

где p_c — центральное давление, а величины p и R усреднены по поверхности сферы и имеют вид (4) с $f_2(r) = 0$. Тогда уравнение гидростатического равновесия (22) принимает вид

$$p_c \frac{2r}{R^2\rho} = \frac{4}{3}\pi G\rho r - \frac{2}{3}\Omega^2 r. \tag{32}$$

Пусть

$$\rho = \rho_0(1+\delta\rho), \;\; p = p_0(1+\delta p), \;\; R = R_0(1+\delta R), \tag{33}$$

где ρ_0, p_0, R_0 — невозмущенные вращением значения соответствующих величин, а $\delta\rho$, δp и δR — порядка Ω^2. Если массы вращающейся и невращающейся звезд равны, то

$$\delta R = -\delta\rho/3 \quad \text{и} \quad \delta p = \gamma\delta\rho. \tag{34}$$

Подставляя (33) в (32), учитывая (34) и пренебрегая членами порядка Ω^4 и выше, получаем

$$\frac{4}{3}\pi G\rho_0 r = \frac{2p_0}{R_0^2\rho_0} r, \tag{35}$$

$$\frac{4}{3}\pi G\rho_0\delta\rho r = \frac{2p_0}{R_0^2\rho_0}\left(\gamma - \frac{1}{3}\right)\delta\rho r + \frac{2}{3}\Omega^2 r. \tag{36}$$

Из двух последних уравнений находим

$$\delta\rho = -\frac{3\Omega^2}{2\pi G\rho_0(3\gamma-4)}. \tag{37}$$

Преобразуя формулу (30) с помощью (33) и (37), получаем

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 - \frac{3m(m+1)\gamma^2 - 30\gamma - m(m+1)\gamma + 16}{3(3\gamma-4)}\Omega^2, \tag{38}$$

$$m = 2, 4, 6, \ldots,$$

где σ_0^2 дается формулой Стерне (1).

4. *Влияние спутника на частоту радиальных колебаний*. Пусть однородная вращающаяся звезда входит в двойную систему. В качестве спутника рассмотрим точечную массу $\mathfrak{M}_d$ на расстоянии D от центра главной звезды. Спутник движется по круговой орбите, расположенной в плоскости экватора однородной звезды, с угловой скоростью

$$\omega = k\Omega. \tag{39}$$

Приливным трением пренебрегаем. Тогда в уравнении движения (3) появится дополнительная сила с потенциалом [11, 12]

$$\Phi' = \Phi_R + \Phi_D. \tag{40}$$

Потенциал центробежных сил орбитального движения равен

$$\Phi_R = -r\,\frac{D}{1+q}\,\Omega^2 k^2 \sin\theta \cos\left(\frac{1-k}{k}\,t+\varphi\right), \tag{41}$$

где

$$q = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_d}. \tag{42}$$

Гравитационный потенциал спутника дается выражением

$$\Phi_D = \frac{G\mathfrak{M}_d}{D}\sum_{j=0}^{\infty} P_j(\cos\chi)\left(\frac{r}{D}\right)^j, \tag{43}$$

где χ — угол между направлением на спутник и на точку с координатами (r, θ, φ). По теореме сложения

$$\begin{aligned} P_j(\cos\chi) &= P_j(\cos\theta)\, P_j\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ 2\sum_{i=1}^{j}\frac{(j-i)!}{(j+i)!}P_j^i(\cos\theta)\, P_j^i\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cos[k(\varphi-\varphi')], \end{aligned} \tag{44}$$

φ' — азимутальный угол спутника.

Усредним уравнение движения, как это было сделано в разделе 2. Члены, содержащие $\cos[k(\varphi-\varphi')]$, обращаются в нуль при интегрировании по φ, а члены, содержащие $P_j(\cos\theta)$, обращаются в нуль при интегрировании по θ. Таким образом, усредненное уравнение движения принимает вид (5), и, следовательно, присутствие спутника не влияет на частоту радиальных адиабатических колебаний звезды.

5. *Обсуждение*. Когда говорят об увеличении частоты колебаний вращающейся звезды, то имеют в виду формулу Леду (2). В этой работе получено обобщение формулы Леду (30) для всех мод радиальных колебаний. Следует заметить, что частоты достаточно высоких мод радиальных колебаний вращающейся звезды меньше соответствующих частот невращающейся звезды, даже если мы пренебрегаем возмущениями плотности, на что указывалось и ранее [13, 14]. Однако, и это неоднократно подчеркивалось [1, 3, 7], первые члены в правых частях формул (2) и (30) содержат величины порядка Ω^2. В настоящей работе эти величины были получены в явном виде, результатом чего явилась формула (38), из которой ясно видно, что частота радиальных колебаний вращающейся звезды меньше частоты радиальных колебаний невращающейся звезды той же массы. Тот же вывод справедлив для политропных звезд [1] и подтверждается расчетами звездных моделей [8, 15].

Из формулы (1) видно, что основная мода колебаний ($m = 2$) нейтральна при $\gamma_{cr} = 4/3$. Из формулы (38) легко получить, что вращение увеличивает γ_{cr}:

$$\gamma_{cr} = \frac{4}{3} + \frac{\Omega^2}{3\pi G\rho_0} \tag{45}$$

Уменьшение частоты радиальных колебаний вследствие вращения качественно можно объяснить следующим образом. Хорошо известно, что

$$\sigma^2 = A\rho. \tag{46}$$

Центробежные силы увеличивают размеры звезды и, следовательно, уменьшают ее среднюю плотность и частоту радиальных колебаний. Вместо (46) можно воспользоваться таким соотношением:

$$\sigma^2 = Bg_*/R. \tag{47}$$

При вращении радиус звезды увеличивается, а ускорение свободного падения на поверхности уменьшается, т. к. собственно гравитационные силы уменьшаются вследствие увеличения радиуса и центробежные силы действуют против сил гравитации. Все это вместе приводит к уменьшению частоты радиальных колебаний. Дестабилизирующее влияние вращения на нерадиальные моды обсуждалось ранее Джинсом [16] и Северным [17].

Из приведенных рассуждений ясно, почему спутник не влияет на частоту радиальных колебаний. Приливная сила имеет равную нулю дивергенцию в пределах главной звезды, т. к. там нет источников приливного поля. Поэтому поток силы (а наша процедура усреднения как раз и является вычислением этого потока) через любую замкнутую поверхность равен нулю. Поскольку средняя сила равна нулю, то приливные эффекты не изменяют средней плотности и среднего ускорения свободного падения на поверхности звезды, т. е. не влияют на частоту радиальных колебаний.

Рассмотрим подробнее периоды колебаний основной моды P_0 ($m = 2$) и двух первых обертонов P_1 ($m = 4$) и p_2 ($m = 6$). Из формулы (38) следует

$$P'_0 = P_0 \left[1 + \frac{3\gamma - 2}{3}\frac{P_0^2}{P_{cr}^2}\right], \tag{48}$$

$$P'_1 = P_1 \left[1 + \frac{30\gamma^2 - 25\gamma + 8}{3(3\gamma - 4)}\frac{P_1^2}{P_{cr}^2}\right], \tag{49}$$

$$P'_2 = P_2 \left[1 + \frac{63\gamma^2 - 36\gamma + 8}{3(3\gamma - 4)}\frac{P_2^2}{P_{cr}^2}\right], \tag{50}$$

$$\frac{P'_1}{P'_0} = \frac{P_1}{P_0}\left[1 + \frac{(30\gamma^2 - 25\gamma + 8)P_1^2/P_0^2 - (9\gamma^2 - 18\gamma + 8)}{3(3\gamma - 4)}\frac{P_0^2}{P_{cr}^2}\right], \tag{51}$$

$$\frac{P_2'}{P_0'} = \frac{P_2}{P_0}\left[1 + \frac{(63\gamma^2 - 36\gamma + 8)P_2^2/P_0^2 - (9\gamma^2 - 18\gamma + 8)}{3(3\gamma - 4)}\frac{P_0^2}{P_{\text{вр}}^2}\right], \tag{52}$$

где $P_{\text{вр}}$ — период вращения звезды, штрихованные величины относятся к вращающейся звезде, а нештрихованные — к покоящейся. Обозначим

$$\lambda_k = P_k/P_{\text{вр}}. \tag{53}$$

Тогда при $\gamma = 5/3$ имеем

$$P_0' = P_0[1 + \lambda_0^2], \tag{54}$$

$$P_1' = P_1[1 + 16.556\lambda_1^2], \tag{55}$$

$$P_2' = P_2[1 + 40.074\lambda_2^2], \tag{56}$$

$$\frac{P_1'}{P_0'} = \frac{P_1}{P_0}[1 + 0.307\lambda_0^2], \tag{57}$$

$$\frac{P_2'}{P_0'} = \frac{P_2}{P_0}[1 + 0.293\lambda_0^2]. \tag{58}$$

При обсуждении этих формул следует иметь в виду, что предельный период вращения звезды $P_{\text{вр}}$ по порядку величины близок к периоду основной моды радиальных колебаний P_0. Поэтому $0 < \lambda_0 \leqslant 1$. Реально наблюдаемые скорости вращения, например, цефеид составляют порядка одной десятой предельной скорости и менее. Поэтому периоды колебаний вращающихся звезд менее чем на несколько процентов превосходят периоды колебаний невращающихся звезд. Еще менее значительным изменениям подвержены отношения периодов (57) и (58). При существующих скоростях отношение периодов совершенно не чувствительно к вращению. Это подтверждается и расчетами звездных моделей [15].

Ленинградский государственный
университет

THE INFLUENCE OF ROTATION AND DUPLICITY OF A HOMOGENEOUS STAR ON THE FREQUENCY OF RADIAL OSCILLATION

C. A. SIDOROV

The equation of small adiabatic radial oscillations of rigid-body rotating star has been derived. This equation is then applied to a homogeneous star. The perturbations to the first order in Ω^2 is taken to task. All radial modes are considered. The frequencies of radial oscillations of rotating star is found to be less than the ones of the nonrotating star of the same mass. The ratios of overtones only slightly perturb. The frequencies of radial pulsations is not affected by the tidal force.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. А. Сидоров*. Астрофизика, 17, 783, 1981.
2. *S. Chandrasekhar*, M. N., 93, 390, 1933.
3. *S. Chandrasekhar, N. R. Lebovitz*, Ap. J., 136, 1082, 1962.
4. *T. E. Sterne*, M. N., 97, 582, 1937.
5. *P. Ledoux*, Ap. J., 102, 143, 1945.
6. *S. Chandrasekhar, N. R. Lebovitz*, Ap. J., 136, 1069, 1962.
7. *T. G. Cowling, R. A. Neving*, Ap. J, 109, 149, 1949.
8. *R. Stothers*, Ap. J., 192, 145, 1974.
9. *S. Chandrasekhar, N. R. Lebovitz*, Ap. J., 152, 267, 1968.
10. *С. Росселанд*. Теория пульсаций переменных звезд. ИЛ, М., 1952.
11. *В. А. Крат*. Фигуры равновесия небесных тел, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
12. *Ю. П. Коровяковский*, Астрофизические исследования, 4, 115, 1972.
13. *F. Occhionero*, Ann. Astrophys., 30, 761, 1967.
14. *F. Occhionero*, Ann. Astrophys., 31, 1, 1968.
15. *R. G. Deupree*, Ap. J., 223, 982, 1978.
16. *J. Jeans*, Proc. Roy. Soc., A199, 1, 1902.
17. *А. Б. Северный*. Изв. Крымской обс., 1, ч. 2, 1948.
18. *Э. Камке*, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Наука, М., 1971.