

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17

НОЯБРЬ, 1981

ВЫПУСК 4

УДК 523.85

СТРОЕНИЕ И КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛИТРОП

К. А. СИДОРОВ

Поступила 24 октября 1980

Принята к печати 27 мая 1981

Пересмотрена теория возмущений первого порядка, построенная Чандрасекаром, с целью найти последовательность вращающихся политроп фиксированной массы. Оказалось, что величина n , при которой наступает динамическая неустойчивость, уменьшается вследствие вращения. Получена простая формула для частоты пульсационной моды вращающейся звезды. Найдено выражение функции $\psi_0(\xi)$ через функцию Эмдена $\theta(\xi)$.

1. *Введение.* Политропы являются одной из классических моделей звезд. Они постоянно привлекают внимание исследователей, поскольку предоставляют редкую возможность проводить аналитические исследования в достаточно общем виде. Кроме того, политропные модели оказываются в ряде случаев удовлетворительным приближением к реальным звездам. Все это предопределило большое внимание к теории вращающихся политроп.

Для медленного твердотельного вращения теория первого порядка по параметру вращения v (см. ниже) была построена Чандрасекаром [1]. В дальнейшем мы будем придерживаться более поздней редакции этой теории [2]. Для политропного уравнения состояния

$$p = K\rho^{1+1/n} \quad (1)$$

уравнения Пуассона и гидростатического равновесия приводят к соотношению

$$\Delta\theta(\xi, \mu) = -\theta^n(\xi, \mu) + v, \quad (2)$$

где

$$v = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_c} \quad (3)$$

$$\Theta^n(\xi, \mu) = \rho(r, \mu)/\rho_c \quad (4)$$

$$r = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho^{-1+1/n} \right]^{1/2} \xi, \quad (5)$$

ρ_c — центральная плотность конфигурации, Ω — угловая скорость вращения, μ — синус широты, а остальные обозначения общеприняты. Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$\Theta(0, \mu) = 1, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad (7)$$

ищется в виде [1, 2]

$$\Theta(\xi, \mu) = \theta(\xi) + v \left[\psi_0(\xi) + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \psi_l(\xi) P_l(\mu) \right]. \quad (8)$$

Подставив разложение (8) в уравнение (2) и сохранив лишь линейные по v члены, Чандрасекар [1, 2] получил систему уравнений

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi_0}{d\xi} \right) = -n\theta^{n-1} \psi_0 + 1, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\xi^2} \left[\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} - j(j+1) \right] \psi_j = -n\theta^{n-1} \psi_j, \quad (j > 1), \quad (11)$$

с начальными условиями

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0, \quad (12)$$

$$\psi_0(0) = \psi_0'(0) = 0, \quad (13)$$

$$\psi_j(0) = \psi_j'(0) = 0 \quad (j \geq 1), \quad (14)$$

определяющую строение вращающейся политропы. Свойства этой системы подробно рассмотрел Ковец [3]. Нам остается лишь добавить, что решением уравнения (10) с начальными условиями (13) является функция

$$\psi_0(\xi) = \left[\theta(\xi) + \frac{n-1}{2} \theta'(\xi) \xi \right] \int_0^\xi \frac{\frac{n-1}{2} \theta(\zeta) \zeta^3 + \frac{5-3n}{2} \int_0^\zeta \eta^{2\theta}(\eta) d\eta}{\left[\zeta \theta(\zeta) + \frac{n-1}{2} \theta'(\zeta) \zeta^2 \right]} d\zeta. \quad (15)$$

Позднее в теории были учтены члены второго порядка [4—6]. Строение вращающихся политроп исследовалось также с помощью вариационного метода [7—10] и численно [11—14]. Все эти работы находятся в прекрасном согласии с теорией Чандрасекара (подробное обсуждение см. в [6]). Это согласие свидетельствует о том, что фигуры равновесия вращающихся политроп остаются сфероидами до весьма высоких скоростей вращения.

Однако, как следует из определения (4) и условия (6), последовательности вращающихся политроп, полученные Чандрасекаром [1, 2], являются последовательностями постоянной центральной плотности. Астрофизически интересно рассмотреть последовательности постоянной массы, тем более, что до сих пор не обращалось внимание на то, что утверждение о стабилизации вращением политроп индекса $n = 3$ относится именно к последовательностям с фиксированной центральной плотностью. Видимо, с неустойчивостью политроп указанного индекса, а не с особенностями численной процедуры, как утверждает Клемент [14], связаны трудности построения фигур равновесия вращающихся политроп при $n \geq 3$.

В этой работе мы построим в линейном приближении последовательность фигур равновесия вращающихся политроп фиксированной массы. Для этого откажемся от традиционных единиц (3)—(5). Подходящая система единиц будет выбрана в следующем разделе и там же мы рассмотрим невращающиеся политропы в новой системе единиц. В разделе 3 будет построена последовательность вращающихся политроп постоянной массы. В разделе 4 кратко обсуждается влияние вращения на пульсации и устойчивость политроп.

2. *Невращающиеся политропы.* Поскольку мы собираемся рассматривать последовательности фигур равновесия с фиксированной массой, то при переходе к безразмерным переменным естественно за один из определяющих параметров выбрать массу конфигурации M . Разумеется, второй определяющий параметр — гравитационная постоянная G . Не столь важно, что мы выберем в качестве третьего определяющего параметра — радиус конфигурации R или постоянную K , так как существует соотношение [15]

$$K = \frac{(4\pi)^{1/n}}{n+1} G \left(\frac{M}{\rho_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{R}{\xi_1} \right)^{3-n}, \quad (16)$$

где ξ_1 — первый положительный корень функции Эмдена $\theta(\xi)$ и

$$\mu_1 = \int_0^{\xi_1} \theta^n(\xi) \xi^2 d\xi = -\xi_1^2 \theta'(\xi_1). \quad (17)$$

Мы будем использовать обе возможные системы определяющих параметров. Введем безразмерные переменные

$$\rho = y^n \left[\frac{(n+1)^2}{4\pi} \right]^{\frac{n}{n-3}} \left[\frac{K^3}{G^3 M^2} \right]^{\frac{n}{n-3}} = y^n \frac{\xi_1^3 \Gamma_1^{\frac{3}{n-3}}}{4\pi} \frac{M}{R^3}, \quad (18)$$

$$r = x \left[\frac{4\pi}{(n+1)^2} \right]^{\frac{1}{n-3}} \left[\frac{GM}{K} \right]^{\frac{n-1}{n-3}} = x \frac{\mu_1^{\frac{n-1}{n-3}}}{\xi_1} R, \quad (19)$$

где безразмерные множители введены для упрощения последующих выкладок. В этих переменных уравнения Пуассона, гидростатического равновесия и состояния (1) приводят к уравнению для невращающихся конфигураций

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n. \quad (20)$$

Одно начальное условие для функции $y(x)$ очевидно

$$y'(0) = 0. \quad (21)$$

Второе условие следовало бы находить из соотношения

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr. \quad (22)$$

Однако мы не будем решать для уравнения (20) задачу, определяемую указанными условиями, а рассмотрим задачу Коши с начальными условиями (21) и

$$y(0) = \lambda_0, \quad (23)$$

где λ_0 — неопределенный пока параметр. Уравнение (20) совпадает с уравнением Эмдена (9). В силу гомологического преобразования [15], функция

$$y(x) = \lambda_0 \theta \left(\lambda_0^{\frac{n-1}{2}} x \right) \quad (24)$$

является решением уравнения (20) с начальными условиями (21) и (23). Очевидно, что

$$x = \lambda_0^{\frac{1-n}{2}} \xi, \quad (25)$$

и аналогичным соотношением связаны первый корень x_1 функции $y(x)$, определяющий радиус конфигурации, с первым корнем ξ_1 функции Эмдена $\theta(\xi)$

$$x_1 = \lambda_0^{\frac{1-n}{2}} \xi_1. \quad (26)$$

Чтобы функция (24) была решением исходной задачи (20)—(22), найдем λ_0 из соотношения (22). Легко получить, что

$$\lambda_0 = \mu_1^{\frac{2}{n-3}}. \quad (27)$$

Попутно отметим еще одно полезное соотношение

$$x_1^2 y'(x_1) = -1. \quad (28)$$

Очевидно, что λ_0 является корнем n -ой степени из безразмерной центральной плотности. λ_0 и x_1 в функции n показаны на рис. 1. Видно, что эти величины терпят разрыв при $n = 3$. Разрыв формальных характеристик не обязательно выражает физический разрыв. В данном случае такое поведение λ_0 и x_1 является следствием того, что при $n = 3$ полная энергия политропы равняется нулю, а политропы с $n > 3$ имеют положительную энергию и, следовательно, динамически неустойчивы [15].

3. *Вращающиеся политропы.* Согласно Чандрасекару [1, 16], уравнение гидростатического равновесия для вращающейся звезды имеет вид

$$(n + 1) p = \rho \left[\varphi + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 (1 - \mu^2) - \varphi_0 \right], \quad (29)$$

где φ — гравитационный потенциал, φ_0 — гравитационный потенциал на полюсе конфигурации. Введем безразмерные переменные $Y(x, \mu)$ аналогично (18) и

$$\varphi = f \left[\frac{(n + 1)^n}{4\pi} \right]^{\frac{1}{n-3}} \left[\frac{K^n}{G^3 M^2} \right]^{\frac{1}{n-3}} = f \xi_1^{\frac{1-n}{n-3}} \frac{GM}{R}, \quad (30)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \beta \left[\frac{(n + 1)^n}{4\pi} \right]^{\frac{3}{n-3}} \left[\frac{K^{3n}}{G^{2n+3} M^{2n}} \right]^{\frac{1}{n-3}} = \frac{1}{2} \beta G \frac{M}{R^3} \xi_1^3 \mu_1^{\frac{3(1-n)}{n-3}}, \quad (31)$$

в которых уравнение гидростатического равновесия (29) принимает вид

$$f(x, \mu) = Y(x, \mu) - \frac{1}{6} \beta x^2 [1 - P_2(\mu)] - f_0. \quad (32)$$

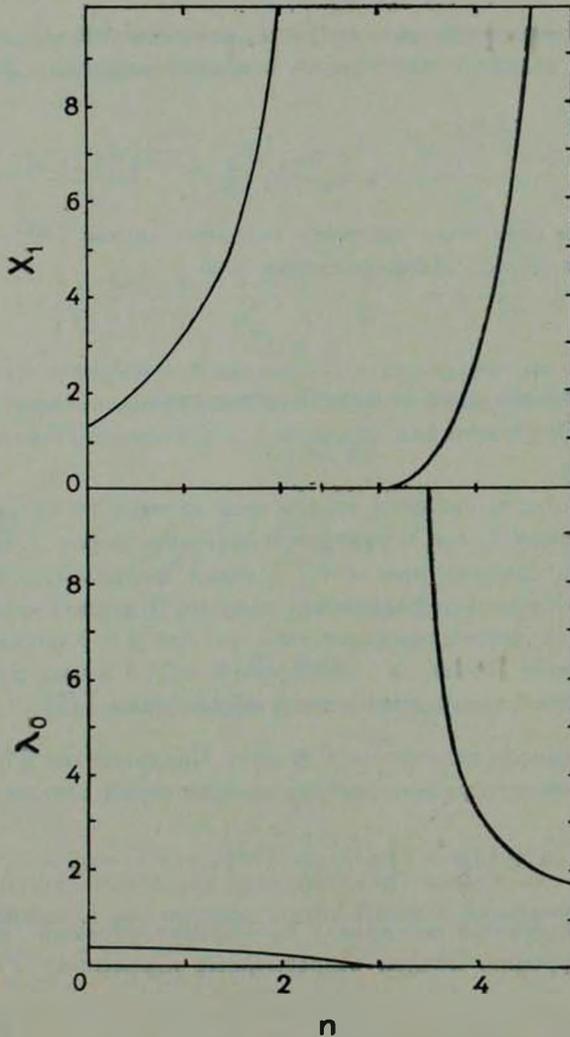


Рис. 1. Зависимость λ_0 и x_1 от n .

Для вращающейся звезды аналогом уравнения (20) является

$$\Delta Y(x, \mu) = -Y''(x, \mu) + \beta. \quad (33)$$

Если ограничиться возмущениями первого порядка по β , то начальные условия принимают вид

$$Y(0, \mu) = \lambda = \lambda_0 - \beta \lambda_1, \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (35)$$

где λ_1 — неопределенный пока параметр. Следуя методу Чандрасекара [1, 2], будем искать решение уравнения (33) в виде

$$Y(x, \mu) = y(x) + \beta \left[z_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j z_j(x) P_j(\mu) \right]. \quad (36)$$

Подставляя это выражение в (33) и сохраняя только линейные по β члены, получаем уравнение (20) с начальными условиями (21) и (23) и уравнения

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dz_0}{dx} \right) = -ny^{n-1} z_0 + 1 \quad (37)$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dz_j}{dx} \right) = \left[\frac{j(j+1)}{x^2} - ny^{n-1} \right] z_j, \quad j \geq 1, \quad (38)$$

с начальными условиями

$$z_0(0) = -\lambda_1, \quad z_0'(0) = 0, \quad (39)$$

$$z_j(0) = z_j'(0) = 0, \quad j \geq 1. \quad (40)$$

Очевидно, что уравнения (38) с начальными условиями (40) совпадают с уравнениями (11) с начальными условиями (14), и, следовательно, их решения являются функциями Чандрасекара

$$z_j(x) = \psi_j(\xi), \quad j \geq 1. \quad (41)$$

Решение линейного неоднородного уравнения (37) с неоднородными начальными условиями (39) можно представить в виде суммы частного решения соответствующего однородного уравнения с неоднородными начальными условиями (39) и решения неоднородного уравнения (37) с однородными начальными условиями [17]. Таким частным решением соответствующего однородного уравнения с неоднородными начальными условиями (40) является функция

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left[y(x) + \frac{n-1}{2} xy'(x) \right].$$

(Заметим, кстати, что из аналогичного частного решения однородного

уравнения, соответствующего (10), можно получить стандартными методами [17] решение (15)). Таким образом,

$$z_0(x) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left[y(x) + \frac{n-1}{2} xy'(x) \right] + u_0(x), \quad (42)$$

где новая функция $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению (37) с однородными начальными условиями. Используя свойства линейных уравнений [17] и соотношения (24) и (25), находим, что

$$u_0(x) = \lambda_1^{1-n} \psi_0(\xi). \quad (43)$$

Поясним, как было найдено частное решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (37). Соотношение (24) наводит на мысль попытаться найти решение уравнения (33) в виде

$$Y(x, \mu) = \lambda \beta \left(\lambda^{\frac{n-1}{2}} x \right) + \beta \left[u_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j z_j(x) P_j(\mu) \right], \quad (44)$$

где λ определяется соотношением (34), а уравнения для u_0 и z_j были записаны ранее. Разложим первое слагаемое в правой части выражения (44) по β , сохранив только линейные члены. Тогда представление (44) окажется эквивалентно представлению (36) только при условии (42). То, что первое слагаемое в правой части (42) и есть искомое решение, можно проверить непосредственно.

Теперь можно подставить разложение (36) с учетом (42) в выражение для внутреннего потенциала (32)

$$f^{(\text{int})}(x, \mu) = y(x) + c_0 + \beta \left\{ u_0(x) - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left[y(x) + \frac{n-1}{2} xy'(x) \right] + \sum_{j=1}^{\infty} A_j z_j(x) P_j(\mu) - \frac{1}{6} x^2 [1 - P_2(\mu)] + c_{1;0} \right\}, \quad (45)$$

где

$$f_0 = c_0 + \beta c_{1;0}. \quad (46)$$

Внешний потенциал представим в виде ряда по полиномам Лежандра

$$f^{(\text{ext})}(x, \mu) = \frac{k_0}{x} + \beta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k_{1;l}}{x^{l+1}} P_l(\mu). \quad (47)$$

Пусть уравнение границы конфигурации имеет вид

$$X(\mu) = x_1 + \beta \sum_{j=0}^{\infty} q_j P_j(\mu). \quad (48)$$

Тогда условие

$$Y(X(\mu), \mu) = 0 \quad (49)$$

вместе с условиями непрерывности потенциала и его производных на границе конфигурации

$$f^{(int)}(X(\mu), \mu) = f^{(ext)}(X(\mu), \mu), \quad (50)$$

$$\frac{\partial f^{(int)}}{\partial x}(X(\mu), \mu) = \frac{\partial f^{(ext)}}{\partial x}(X(\mu), \mu) \quad (51)$$

позволяет найти все неизвестные коэффициенты разложений

$$q_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{n-1}{2} x_1 - \frac{u_0(x_1)}{y'(x_1)}, \quad (52)$$

$$q_j = -A_j \frac{z_j(x_1)}{y'(x_1)}, \quad (53)$$

$$k_0 = -x_1^2 y'(x_1) = 1, \quad (54)$$

$$c_0 = \frac{1}{x_1}, \quad (55)$$

$$k_{1,0} = \frac{x_1^3}{3} - u_0'(x_1) x_1^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{n-3}{2}, \quad (56)$$

$$c_{1,0} = \frac{x_1^2}{2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{1}{x_1} - u_0'(x_1) - u_0''(x_1) x_1, \quad (57)$$

$$A_2 = -\frac{5}{6} \frac{x_1^2}{z_2(x_1) x_1 + 3z_2(x_1)}; \quad A_j = 0, \quad j \neq 2; \quad (58)$$

$$k_{1,2} = \frac{x_1^5 z_2'(x_1) x_1 - 2z_2(x_1)}{6 z_2^2(x_1) x_1 + 3z_2(x_1)}; \quad k_{1,j} = 0, \quad j \neq 0, 2. \quad (59)$$

Для вращающейся конфигурации соотношение (22) в переменных (18) и (19) имеет вид

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{X(\mu)} Y^n(x, \mu) x^2 dx d\mu = 1. \quad (60)$$

В нашем приближении внутренний интеграл можно разложить по β

$$\int_0^{X(\mu)} Y^n(x, \mu) x^2 dx = \int_0^{x_1} Y^n(x, \mu) x^2 dx + Y^n(x_1, \mu) x_1^{2\beta} \sum_{j=0}^{\infty} q_j P_j(\mu) \quad (61)$$

и

$$Y''(x_1, \mu) = y''(x_1) + n z(x_1, \mu) \beta y^{n-1}(x_1) = 0. \quad (62)$$

Таким образом, (60) принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{\xi_1} Y''(x, \mu) x^2 dx d\mu = 1. \quad (63)$$

Это соотношение определяет λ_1 , если подставить $Y(x, \mu)$ в виде (36) и учесть (42) и (58).

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{2}{3} \frac{3x_1^2 u_0'(x_1) - x_1^3}{n-3}. \quad (64)$$

После подстановки (25), (27) и (43), имеем

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \mu_1^{\frac{5-3n}{n-3}} \frac{3\xi_1^2 \psi_0'(\xi_1) - \xi_1^3}{n-3}. \quad (65)$$

Таким образом, мы нашли все функции и коэффициенты в разложении (36) и тем самым построили последовательность сферондальных политропных фигур равновесия фиксированной массы. Теперь можно выразить в естественных единицах изменение центральной плотности конфигурации вследствие вращения

$$\frac{\delta \rho_c}{\rho_c} = \nu \frac{2n}{3-n} \frac{\xi_1/3 - \psi_0'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}. \quad (66)$$

Это соотношение было получено ранее Чандрасекаром [1, 2], и в этом смысле его подход эквивалентен предлагаемому подходу. Однако Чандрасекар ограничился лишь формулой (66) и не рассматривал последовательностей фигур равновесия постоянной массы, описываемых нашими формулами.

Мы не будем подробно обсуждать все свойства таких последовательностей, а остановимся только на вопросе о частоте радиальных колебаний вращающихся политроп.

4. *Влияние вращения на частоту пульсаций.* Влияние вращения на частоту пульсаций описывается хорошо известной формулой [2, 19, 20]

$$\sigma^2 = -(3\gamma - 4) \frac{W}{I} + \frac{2}{3} (5 - 3\gamma) \Omega^2, \quad (67)$$

где W — гравитационная энергия звезды, I — ее момент инерции относительно центра. Однако еще Каулинг и Невинг [20] указывали, что в этой формуле гравитационная энергия W' и момент инерции I относится к воз-

мощенной вращением звезде и, следовательно, содержат члены порядка Ω^2 . Введем безразмерные переменные

$$\sigma^2 = \alpha \left| \frac{(n+1)^n}{4\pi} \right|^{\frac{3}{n-3}} \left[\frac{K^{3n}}{G^{2n+3} M^{2n}} \right]^{\frac{1}{n-3}} = \alpha \xi_1^3 \mu_1^{\frac{3(1-n)}{n-3}} G \frac{M}{R}, \quad (68)$$

$$W = w \left| \frac{(n+1)^n}{4\pi} \right|^{\frac{1}{n-3}} \left[\frac{K^n}{G^3 M^{5-n}} \right]^{\frac{1}{n-3}} = w \xi_1^{\frac{1-n}{n-3}} G \frac{M^2}{R^2}. \quad (69)$$

$$I = i \left[\frac{4\pi}{(n+1)^n} \right]^{\frac{2}{n-3}} \left[\frac{G^{2n} M^{3n-5}}{K^{2n}} \right]^{\frac{1}{n-3}} = i \frac{\mu_1^{\frac{2(n-1)}{n-3}}}{\xi_1^2} MR^2. \quad (70)$$

В этих переменных формула (67) принимает вид

$$\alpha = - (3\gamma - 4) \frac{w}{i} + \frac{1}{3} (5 - 3\gamma) \beta. \quad (71)$$

Величины, входящие в эту формулу, представим в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \beta \alpha_1, \quad (72)$$

$$w = w_0 + \beta w_1, \quad (73)$$

$$i = i_0 + \beta i_1. \quad (74)$$

Тогда

$$\alpha_1 = - (3\gamma - 4) \frac{w_1 i_0 - i_1 w_0}{i_0^2} + \frac{5 - 3\gamma}{3}. \quad (75)$$

Опуская вычисления, техника которых подробно описана Чандрасекаром [2, 16], приведем окончательные выражения для i_0 , i_1 , w_0 и w_1 :

$$i_0 = \mu_1^{\frac{2(1-n)}{n-3}} \left(\xi_1^2 - \frac{6}{\mu_1} \int_0^{\xi_1} \theta \xi^2 d\xi \right), \quad (76)$$

$$i_1 = \frac{5 \frac{1-n}{n-3}}{3-n} \left[\frac{11n-13}{15} \xi_1^5 + 2(1-n) \xi_1^4 \psi_0'(\xi_1) + (3-n) \xi_1^3 \psi_0(\xi_1) - \right. \\ \left. - 3(3-n) \int_0^{\xi_1} \psi_0(\xi) \xi^2 d\xi + (5n-7) \frac{3\psi_0'(\xi_1) \xi_1^3 - \xi_1^3}{\mu_1} \int_0^{\xi_1} \theta \xi^2 d\xi \right], \quad (77)$$

$$w_0 = -\frac{3}{5-n} \frac{\mu_1^{\frac{n-1}{n-3}}}{\xi_1} \quad (78)$$

$$w_1 = \frac{\mu_1^{\frac{1-n}{n-3}}}{(3-n)(5-n)} \left[\frac{n(5-n)}{3} \xi_1^2 + 3(3-n) \psi_0'(\xi_1) + \right. \\ \left. 3(1-n) \psi_0'(\xi_1) \xi_1 + \frac{(n-3)(2n+5)}{\mu_1} \int_0^{\xi_1} \theta(\xi) \xi^2 d\xi \right] \quad (79)$$

Величины, входящие в формулы (76)—(79), были вычислены Чандрасекаром и Лебовицем [2]. На основании их расчетов была вычислена и за-табулирована в табл. 1 величина $\frac{w_1 i_0 - i_1 w_0}{i_0^2}$ для $n = 1.5, 2.0$ и 3.5 . Для

$n = 3$ приведен главный член разложения в окрестности этого индекса.

Как известно [15], для политроп

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (80)$$

Тогда оказывается, что α_1 стремится к конечному пределу при n , стремящемся к 3.0. Этот предел также приведен в табл. 1 вместе с соответствующими α_1 для $n = 1.5, 2.0, 3.5$.

ВЕЛИЧИНА α_1 ДЛЯ РАЗНЫХ n

Таблица 1

	1.5	2.0	3.0	3.5
$\frac{w_1 i_0 - i_1 w_0}{i_0^2}$	1.3110	2.9428	$\frac{4.9983}{3-n}$	-11.996
α_1	-1.3110	-1.3047	-1.3328	-1.3328

5. *Заключительные замечания.* Из табл. 1 видно, что вращение уменьшает частоту пульсаций звезды. Не является справедливым утверждение [2, 18, 21] о стабилизации вращением политропы индекса $n = 3.0$, если мы рассматриваем конфигурации фиксированной массы. Динамическая неустойчивость вращающихся политроп этого индекса вполне понятна. Невращающиеся политропы с $n = 3.0$ находятся в безразличном равновесии относительно малых возмущений. Вращение можно рассматривать как возмущение, действующее неограниченное время, т. е. растущее возмущение.

Интересно отметить, что в пределах $1.5 \leq n \leq 3.5$

$$a_1 = -\frac{4}{3} \quad (81)$$

с точностью не хуже 3%. Если принять это значение a_1 , то формула (67) принимает вид

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 - \frac{8}{3} \Omega^2. \quad (82)$$

Конфигурация является динамически неустойчивой, если $\sigma^2 < 0$. Отсюда вытекает верхний предел на частоту твердотельного вращения звезды, обусловленный динамической неустойчивостью

$$\Omega^2 \leq \frac{3}{8} \sigma_0^2 \quad (83)$$

или нижний предел на период вращения

$$P_{\text{rot}} \geq \sqrt{\frac{8}{3}} P_{\text{pul}} \approx 1.63 P_{\text{pul}}. \quad (84)$$

Полученное соотношение (84) хорошо соответствует утверждению [19], что предельный период вращения P_{rot} близок к периоду пульсации P_{pu} хотя и несколько превышает его.

С помощью формул (83) и (84) получим некоторые оценки. Строение белых карликов малой массы хорошо описывается политропами индекса $n = 1.5$ с

$$K = \frac{9.91 \cdot 10^{12}}{\mu_e^{5/3}} \quad (85)$$

где μ_e — число протонных масс на электрон [15]. Тогда легко получить, что

$$\sigma_0^2 = 1.71 \cdot 10^{-2} \mu_e^5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \text{ сек}^{-2}. \quad (86)$$

Периоды пульсаций, полученные по этой формуле при $\mu_e = 2$, находятся в хорошем согласии с периодами пульсации более реалистичных моделей [22]. Радиус белого карлика находится по формуле (16). Из соотношений (83) теперь можно получить следующую оценку для белых карликов:

$$v_{\text{rot}} \leq 3.6 \cdot 10^3 \mu_e^{5/6} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{2/3} \text{ км/с}. \quad (87)$$

В заключение стоит отметить, что $n = 3.0$ является особой точкой. Поэтому основной вклад в возмущение всех физических величин в окрестности этой точки будут вносить члены высших порядков. Исследование особой точки заслуживает отдельного рассмотрения. Вряд ли будет целесообразным построение теории высшего порядка: во-первых, в теории n -ого порядка не учитываются члены $n + 1$ -ого порядка, которые и могут играть основную роль; во-вторых, построение теории уже третьего порядка встретится с принципиальными трудностями в окрестности исследуемой точки [6]. Нельзя полагаться и на численные расчеты, так как сходимость численных методов в окрестности особой точки вызывает сомнения.

Вывод об уменьшении частоты нерациональных колебаний вращающейся звезды ранее был получен Дж. Джинсом [23] и А. Б. Северным [24]. На уменьшение частоты радиальных пульсаций вращающейся политропной звезды обращал внимание Клемент [25]. Тот же вывод для более реалистичных моделей звезд был получен в работе [26].

Автор выражает признательность В. Г. Горбачеву за постоянный интерес к работе, а также В. В. Иванову, В. Б. Ильину и А. Г. Крицуку за полезные дискуссии.

Ленинградский государственный
университет

THE STRUCTURE AND THE OSCILLATIONS OF ROTATING POLYTROPES

K. A. SIDOROV

Chandrasekhar's first order theory of rotationally distorted polytropes was reconsidered with a view to construct the sequence of rotating polytropes with fixed mass. One finds that the value of n at which dynamical instability sets in is reduced from $n = 3$ by rotation. The simple formula for the frequency of the pulsation mode of the rotating star was derived. The expression for $\psi_0(\xi)$ through $\theta(\xi)$ was found.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Chandrasekhar, M. N., 93, 390, 1933.
2. S. Chandrasekhar, N. R. Lebovitz, Ap. J., 136, 1082, 1962.
3. A. Kovetz, Ap. J., 154, 999, 1968.
4. F. Occhionero, Mem. S. A. It., 38, 331, 1967.
5. S. P. S. Anand, Ap. J., 153, 135, 1968.
6. T. Aikawa, Science Rep. Tohoku Univ., Ser. I, 54, 13, 1971.
7. P. H. Roberts, Ap. J., 137, 1129, 1963.
8. P. H. Roberts, Ap. J., 138, 809, 1963.

9. *M. Hurley, P. H. Roberts*, *Ap. J.*, 140, 583, 1964.
10. *M. Hurley, P. H. Roberts*, *Ap. J.*, Suppl. ser., 11, 95, 1964.
11. *R. A. James*, *Ap. J.*, 140, 552, 1964.
12. *J. P. Ostriker, J. W.-K. Mark*, *Ap. J.*, 151, 1075, 1968.
13. *С. И. Блинников*, *Астрон. ж.*, 52, 243, 1975.
14. *M. J. Clement*, *Ap. J.*, 194, 709, 1974.
15. *С. Чандрасекар*, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, М., 1950.
16. *S. Chandrasekhar*, *Ap. J.*, 134, 662, 1961.
17. *Ф. Хартман*, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Мир, М., 1970.
18. *P. Ledoux, C. L. Pekeris*, *Ap. J.*, 94, 124, 1941.
19. *В. Ф. Дьяченко, Я. Б. Зельдович, В. С. Имшенник, В. В. Палейчик*, *Астрофизикл.* 4, 159, 1968.
20. *T. G. Cowling, R. A. Newing*, *Ap. J.*, 109, 149, 1949.
21. *N. R. Lebovitz*, *Ap. J.*, 160, 701, 1970.
22. *Г. Воклер*, в сб. «Белые карлики», Мир, М., 1975, стр. 226.
23. *J. Jeans*, *Proc. Roy. Soc.*, A 199, 1, 1902.
24. *А. Б. Северный*, *Изв. КрАО*, 1, ч. 2, 1948.
25. *M. J. Clement*, *Ap. J.*, 141, 210, 1965.
26. *R. G. Deupree*, *Ap. J.*, 223, 982, 1978.