

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17

НОЯБРЬ, 1981

ВЫПУСК 4

УДК 523.77

## УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ А-е ФАЗЫ КОРЫ ПУЛЬСАРА С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ СВЕРХСИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Г. В. ГАДИЯК, М. С. ОВРЕХТ, Н. Н. ЯНЕНКО

Поступила 16 марта 1981

Проведен расчет уравнения состояния вещества (железа) в характерном для пульсаров магнитном поле, порядка  $10^{12}$  гаусс, для давления  $10^9 \div 10^8$  а. е. Давление  $10^8$  а. е. соответствует расстоянию порядка нескольких десятков метров от поверхности пульсара. Расчет проведен на основании модифицированной модели Томаса—Ферми. В модели полагается, что электроны заполняют состояние с определенным номером уровня Ландау, проекций спина и импульса на направление поля. Уравнение состояния обладает рядом аномальных свойств. Так, например, скорость звука может падать с ростом давления, вклад теплового давления ядер в давление может быть отрицательным.

Интерес к свойствам вещества в сверхсильном магнитном поле обусловлен возможностью существования полей порядка  $10^{12}$  гаусс [1] в пульсарах. В полях\*  $B \gtrsim B_0 = m^2 c^3 \hbar^{-3} = 2.35 \cdot 10^9$  гаусс взаимодействие электронов вещества с внешним магнитным полем может превышать кулоновское взаимодействие [2, 3]. Говоря на языке статистической модели, магнитное поле существенно перестраивает электронную структуру вещества, если энергия взаимодействия электрона вещества с внешним магнитным полем  $\epsilon_M \simeq B$  сравнима со средней энергией Ферми  $\bar{\epsilon}_F$  электронного распределения (чертой сверху обозначаем усреднение по объему элементарной ячейки кристалла). Для достаточно сильно сжатого вещества в рамках статистической модели справедливо соотношение  $\bar{\epsilon}_F \sim \bar{n}^{2/3}$ , при этом давление  $P \sim \bar{n}^{5/3}$ . Отсюда следует, что условие  $B \sim \bar{\epsilon}_F$  выполняется при  $P \sim P_M \sim B^{5/2}$ . Таким образом, при  $P \gg P_M$  мы приходим к обыч-

\* Ниже все величины будем выражать в атомных единицах  $\hbar = m = 1$ , атомная единица давления составляет 294 Мбар, магнитное поле в единицах  $B_0$ .

ной модели Томаса-Ферми, а при  $P \leq P_M$  магнитное поле может сильно изменить свойства вещества. Так, например, тонкий поверхностный слой коры пульсара, толщиной порядка 50 -- 100 метров (где давление  $P \geq P_M$ ), как показывает расчет, состоит из прослоек с различным характером зависимости скорости звука от давления: в одних прослойках скорость звука растет с давлением (глубиной), а в соседних, наоборот, падает. Подобная аномалия может приводить, в частности, к отрицательному вкладу в полное давление от ядер, в такой среде могут формироваться ударные волны сжатия и разрежения.

В настоящей работе исследуется уравнение состояния вещества в сверхсильном магнитном поле в рамках модифицированной модели Томаса-Ферми, описанной в разделе 1. Последняя является обобщением модели [4] на случай обоих возможных направлений спинов электронов вещества, при наличии произвольной температуры и давления. В работах [2, 4--9] и многих других исследовались свойства изолированных атомов при нулевой температуре. Первый расчет уравнения состояния холодного вещества в сверхсильном магнитном поле представлен в [10, 11] (заметим, что термодинамика однородного электронного газа рассматривалась ранее неоднократно [12, 13]). Исследование [10], проведенное на основе интерполяционной статистической модели, позволило сделать вывод о ряде особенностей уравнения состояния вещества в сверхсильном магнитном поле. В [10] было, в частности, отмечено, что сжимаемость вещества резко падает при наличии сверхсильного магнитного поля. Вследствие этого сжимаемость вещества в поверхностном слое коры пульсара (порядка нескольких метров) у магнитного полюса и у экватора могут значительно различаться. В результате расчетов [10] выяснилось также, что скорость звука имеет аномальную область зависимости от давления, в которой она падает с ростом последнего. Настоящая работа явилась естественным продолжением работы [10] и качественно подтвердила ее выводы.

В разделе 2 обсуждается возможность использования выражений для электронной плотности и плотности энергии однородного электронного газа для описания неоднородных систем в случае наличия сверхсильного магнитного поля.

Анализ результатов численных расчетов проводится в разделе 3: обсуждается уравнение состояния, особо подчеркивается аномальный (осцилляционный) характер зависимости ряда величин от удельного объема (так, например, скорости звука, электронной теплоемкости и др.).

1. *Модифицированная модель Томаса-Ферми.* Как известно, спектр электрона в однородном внешнем магнитном поле имеет вид

$$\varepsilon_k = \left( k + \frac{1}{2} + s \right) B + \frac{q^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь  $k = 0, 1, \dots$  — номер уровня Ландау,  $s$  и  $q$  — соответственно проекции спина и импульса электрона на направление поля. В предлагаемой модифицированной модели Томаса—Ферми полагается, что электроны заполняют состояния с определенными  $k, s, q$ . Тогда, используя функцию распределения Ферми—Дирака

$$f(k, s, q) = 1 / (1 + \exp((\varepsilon_k - \varepsilon_F) / T)), \quad (2)$$

можно получить выражение для плотности электронов и плотности магнитно-кинетической энергии прямым суммированием по всем возможным одно-электронным состояниям:

$$n(\varepsilon_F, T) = \sum_{s, k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} f(k, s, q) = \alpha T^{1/2} \sum_{s, k} I_{-1/2}(y_{s, k}); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{м.к.}}(\varepsilon_F, T) = \sum_{s, k} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_k f(k, s, q) \frac{dq}{2\pi} = & T^{3/2} \sum_{s, k} \left( I_{1/2}(y_{s, k}) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\varepsilon_F}{T} - y_{s, k} \right) I_{-1/2}(y_{s, k}) \right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\alpha = B / (2\sqrt{2} \pi^2); \quad y_{s, k} = \left( k + \frac{1}{2} + s \right) B / T.$$

Здесь члены рядов являются функциями Ферми—Дирака, определяемыми

соотношением  $I_k(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^k dt}{1 + \exp(t - x)}$ . Суммирование в (3), (4) и

всюду ниже ведется по всем возможным  $k = 0, 1, \dots, \infty$  и  $s = \pm 1/2$ . Зна-

чение  $\varepsilon_F$  связано с самосогласованным потенциалом  $\varphi(\vec{r})$  соотношением

$\varepsilon_F = \varphi(\vec{r}) - \varphi_0$ , где  $\varphi(\vec{r}) = (U(\vec{r}) + \varphi_e(\vec{r}))$ ,  $U(\vec{r})$  — внешний потенциал

(суммарный потенциал ядер),  $\varphi_e(\vec{r})$  — потенциал, создаваемый электронами вещества,  $\varphi_0$  — химпотенциал, определяемый из условия нор-

мировки  $\int_{V_0} n(\varepsilon_F, T) d\tau = z$ , где  $V_0$  — объем элементарной ячейки кри-

сталла,  $z$  — атомный номер вещества.

Полная энергия электронов в ячейке легко вычисляется в приближении Вигнера—Зейтца: каждая ячейка  $V_0$  заменяется сферой  $V$  равного

объема с ядром в центре; тогда, если пренебречь мультипольными моментами (несимметричностью плотности электронов в ячейке), задача сводится к рассмотрению независимых электронейтральных сферически симметричных ячеек, при этом выражение для энергии электронов в расчете на одну ячейку примет вид:

$$E = E_{\text{м.к.}} + E_{ee} + E_{en}, \quad (5)$$

$$\text{где } E_{\text{м.к.}} = \int \varepsilon_{\text{м.к.}} d\tau; \quad E_{ee} = \frac{1}{2} \int \varphi_e(r) n(\varepsilon_F, T) d\tau; \quad E_{en} = \int \frac{z}{r} n(\varepsilon_F, T) d\tau.$$

Здесь и всюду ниже интегралы берутся (если не оговаривается противное) по объему сферизованной ячейки  $V$ , и предполагается, что  $\varphi_e(r)$  и  $n(\varepsilon_F, T)$  зависят только от  $r$  — расстояния до ядра. Справедливость приближения Вигнера — Зейтца для вещества в отсутствие магнитного поля многократно обсуждалась в литературе (см., например, [14]). Дополнительная несимметрия, вызванная влиянием внешнего сверхсильного поля невелика вплоть до полей порядка  $z^3$  для несжатого вещества [2], а с увеличением давления — даже для больших  $B$ . Роль этой несимметрии будет обсуждена подробнее в разделе 2. Мы ограничим свое рассмотрение областью, где влиянием последней можно пренебречь.

Выражение для электронной энтропии  $S_e$  в расчете на одну ячейку легко получить в одноэлектронном приближении (см., например, [15]), используя равновесные числа заполнения (2):

$$S_e = \alpha T^{3/2} \sum_{s,k} (3I_{1/2}(y_{s,k}) - y_{s,k} I_{-1/2}(y_{s,k})).$$

Исходя из этого соотношения, выпишем выражение для электронной свободной энергии в расчете на одну ячейку:

$$F = E - TS_e = F_{\text{м.к.}} + E_{ee} + E_{en}, \quad (6)$$

где

$$F_{\text{м.к.}} = \alpha T^{3/2} \sum_{s,k} \left( \frac{\varepsilon_F}{T} I_{-1/2}(y_{s,k}) - 2 I_{1/2}(y_{s,k}) \right).$$

Прямым дифференцированием свободной энергии (6) по объему ячейки  $V$  нетрудно получить локальную формулу для давления

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = 2\alpha T^{3/2} \sum_{s,k} I_{1/2}(y_{s,k}), \quad (7)$$

которая связывает давление с химпотенциалом системы.

Заметим, что все полученные выражения справедливы, строго говоря, лишь для медленно меняющейся электронной плотности (в противном случае велики градиентные поправки).

2. *Область применимости модели.* Обсудим характер используемых приближений. Первое из них — приближение сильного поля [2], в котором предполагается, что движение электрона в плоскости, перпендикулярной полю, определяется магнитным полем, кулоновское взаимодействие определяет движение электронов вдоль поля. Оно справедливо, если выполнено соотношение [2]

$$z/R \ll B, \quad (8)$$

т. е. когда для большинства электронов в ячейке выполнено условие малости кулоновского потенциала,  $\bar{\varphi} \sim z/R$  по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау  $B$ .  $R = (3V/4\pi)^{1/3}$ .

Статистическое описание системы возможно, если велико число заполненных состояний. В приближении сильного поля, в силу нормировки, справедливо соотношение  $N_1 N_2 = z$ , где  $N_1$  и  $N_2$  — число заполненных состояний для движения вдоль и поперек поля соответственно, следовательно, условие применимости модели  $N_1, N_2 \gg 1$ . Поскольку [16]  $N_2 \sim BR^2$  (если заполнено небольшое число уровней Ландау), то условие  $N_1 \gg 1$  справедливо при  $z/N_2 \gg 1$ , т. е.  $BR^2 \ll z$ . Таким образом модель справедлива при

$$1 \ll BR^2 \ll z. \quad (9)$$

Для изолированного атома, подставив значение радиуса атома из [2] в (8) и (9), имеем  $z^{4/3} \ll B \ll z^3$ ; в соответствии с [2]. В этом случае все электроны в атоме находятся на нижнем уровне Ландау со спином, направленным против поля (конечно, если температура  $T \ll B$ ), в суммах (3) и (4) остается по одному числу, и наша модель совпадает с моделью [2], но с учетом конечной температуры.

Ограничение (9) можно получить также из условия малости градиентных поправок к электронной плотности и к плотности кинетической энергии. Действительно, анализируя уравнение Томаса—Ферми с поправкой на неоднородность и выражение для плотности кинетической энергии, полученные в [17], получим, что вклад градиентных членов мал при выполнении условий  $BR^2 \gg 1$ ; и  $|\varphi_0| R^2 \gg 1/12$ ; но  $N_1 \sim |\varphi_0|^{1/2} R$ , т. е. мы снова приходим к неравенству  $N_1, N_2 \gg 1$ . Заметим, что малость градиентных поправок позволяет использовать для неоднородного электронного газа выражения (3) и (4) для плотности электронов и плотности энергии, выражающиеся через значение самосогласованного по-

тенциала в данной точке. Как было впервые отмечено в [2] и позже строго доказано в [7], подобная локальная связь приводит к сферической симметрии электронного распределения в атоме.

3. *Результаты расчета.* Полученное модифицированное уравнение Томаса—Ферми

$$\Delta\varphi_e = -4\pi l (\varphi - \varphi_0, T)$$

решали численно, способом, подробно описанным в [10]. Были рассчитаны для железа в поле  $B = (10, 30) \cdot z^{4/3}$  (что составляет соответственно  $1.8 \cdot 10^{12}$  и  $5.4 \cdot 10^{12}$  гаусс) кривые изотермического сжатия при значениях  $T = 1, 10, 100, 300$ . Так, на рис. 1 представлены изотермы  $T = 10, 300$ , рассчитанные в настоящей работе в сравнении с интерполяционной кривой холодного сжатия [10] для железа в поле  $B = 10 \cdot z^{4/3}$ . Видно, что ход интерполяционной кривой качественно согласуется с изотермой  $T = 10$ , в частности на обеих кривых существуют участки  $(\partial^2 P / \partial V^2) < 0$ . С ростом давления все кривые выходят на одну асимптотику — на Томас—Ферми зависимость  $P(V)$  для вырожденного однородного электронного газа.

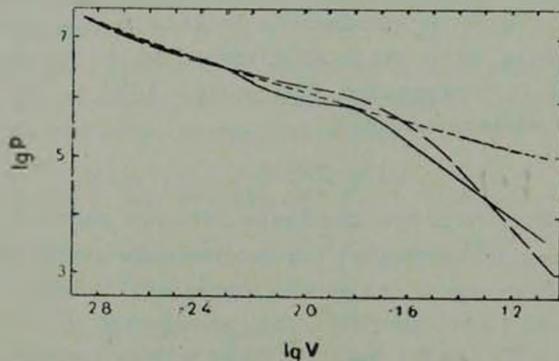


Рис. 1. Зависимость давления  $P$  от удельного объема  $V$  для железа в поле  $B = 10 \cdot z^{4/3}$  (или  $1.8 \cdot 10^{12}$  гаусс) для нескольких значений температуры  $T$ : 1. —  $T=10$ ; 2. - - -  $T=300$ ; 3. — — —  $T=0$  (кривая взята из работы [10]).

На рис. 2 изображен ход зависимости скорости звука от объема, приходящегося на атом\*. Сравнивая кривую холодного сжатия в интерполяционной модели [10] и изотерму  $T = 10$ , приходим к выводу, что интерполяционная модель качественно передает аномальный рост скорости звука с ростом удельного объема в области заполнения первого уровня Лан-

\* Скорость звука  $a$  находили численным дифференцированием по формуле  $a^2 = -V^2 (\partial P / \partial V)_T / M_{Fe}$  ( $M_{Fe}$  — масса ядра железа).

дау. На изотермах, рассчитанных в настоящей работе, видно, что заполнение каждого уровня Ландау приводит к аномальной зависимости скорости звука от удельного объема, но для не слишком высоких (см. также [11]), температур. Так, для  $T = 300$  (т. е.  $T \approx B/2$ ) осцилляционный характер зависимости скорости звука от удельного объема исчезает. Последнее естественно, поскольку при  $T \sim B$  дискретность уровней Ландау становится несущественной.

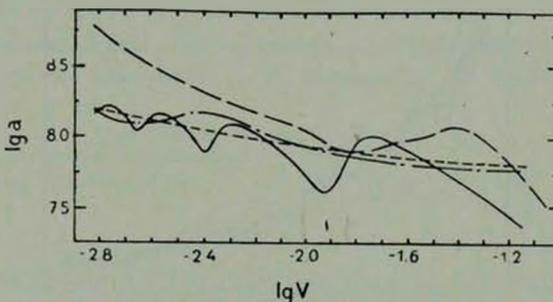


Рис. 2. Зависимость скорости звука  $\alpha$  в железе от удельного объема  $V$  для нескольких значений температуры  $T$  и поля  $B$  (скорость звука в см/с): 1. —  $T=10$ ;  $B=10 \cdot z^{4/3}$ ; 2. - - -  $T=300$ ;  $B=30 \cdot z^{4/3}$ ; 3. - · - ·  $T=30$ ;  $B=30 \cdot z^{4/3}$ ; 4. - - -  $T=0$ ;  $B=10 \cdot z^{4/3}$  (кривая взята из работы [10]).

Кроме скорости звука, характерной осцилляционной зависимостью обладает целый ряд других величин. Так, на рис. 3 изображена зависимость температуры Дебая  $\theta$  решетки железа (для упрощения, решетка предполагалась кубической) в зависимости от удельного объема. Температура Дебая определялась по формуле  $\theta = a/R (9\pi/4)^{1/3}$ . Заметим, что аномальный рост  $\theta$  с удельным объемом приводит к отрицательному вкладу в давление от ядер (фононов). Действительно, исходя (см., например, [15]) из  $F_n = -\pi^4 T^4 / 10 \theta^3$ , нетрудно получить

$$P_n = - \left( \frac{\partial F_n}{\partial V} \right)_T = - \frac{3}{10} \left( \frac{\pi T}{\theta} \right)^4 \frac{d\theta}{dV}; \text{ т. е. } P_n < 0, \text{ при } \left( \frac{d\theta}{dV} \right) < 0.$$

Отметим также, что если электронный газ сильно вырожден, то температурная поправка к давлению обусловлена давлением ядер  $P_n$ , и, как нетрудно видеть, тогда  $(\partial P / \partial T)_V \approx (\partial P_n / \partial T)_V < 0$ . Как известно из термодинамики [15], это в свою очередь приводит к отрицательности коэффициента теплового расширения  $(\partial V / \partial T)_P < 0$  (как у воды при  $T < 4^\circ \text{C}$ ).

В качестве еще одной иллюстрации приведем зависимость электронной теплоемкости от удельного объема (рис. 4). Кроме характерной перио-

дичности с ростом удельного объема при  $T = 100$ , в поле  $B = 10 \cdot z^{4/3}$  и при  $T = 300$ ; в поле  $B = 30 \cdot z^{4/3}$ , необходимо отметить существенное различие в кривых (1) и (2). Максимумы кривой ( $T = 100$ ) соответствуют минимумам более низкотемпературной ( $T = 10$ ). Это связано с тем, что при низких температурах фактор вырождения  $(T/\varepsilon_F) \ll 1$ , что приводит к падению теплоемкости вырожденного газа с ростом  $\varepsilon_F$  при  $T \sim 10$ .

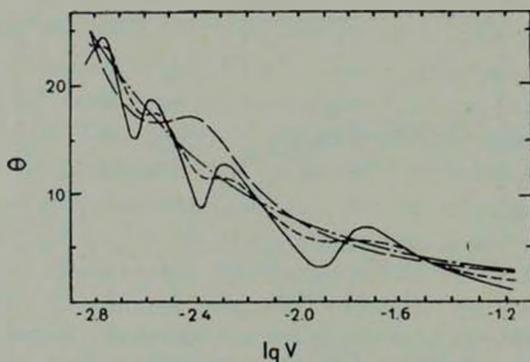


Рис. 3. Зависимость температуры Дебая  $\theta$  решетки железа от удельного объема  $V$  для нескольких значений температуры  $T$  и поля  $B$ : 1. —  $T=10$ ;  $B=10 \cdot z^{4/3}$ ; 2. - - -  $T=100$ ;  $B=10 \cdot z^{4/3}$ ; 3. - · -  $T=300$ ;  $B=10 \cdot z^{4/3}$ ; 4. - - -  $T=300$ ;  $B=30 \cdot z^{4/3}$ .

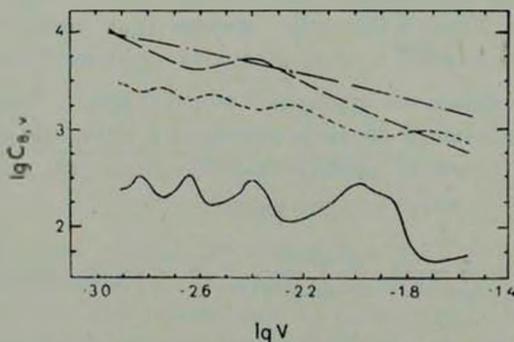


Рис. 4. Зависимость электронной теплоемкости  $C_{V,B} = 1/VT(\partial E/\partial T)_{V,B}$  от удельного объема  $V$  для нескольких значений поля  $B$  и температуры  $T$ : 1. —  $T=10$ ;  $B=10 \cdot z^{4/3}$ ; 2. - - -  $T=100$ ;  $B=10 \cdot z^{4/3}$ ; 3. - · -  $T=300$ ;  $B=10 \cdot z^{4/3}$ ; 4. - - -  $T=300$ ;  $B=30 \cdot z^{4/3}$ .

Вернемся теперь к обсуждению влияния квантовых поправок. Как было показано в [18], они приводят к изменению характера заполнения одноэлектронных состояний в импульсном пространстве, а именно, ступенчатое

распределение электронов размывается, как при действии некоторой эффективной температуры. Если провести оценку этой эффективной температуры в нашем случае, мы получим  $T_{\text{эфф}} \sim (z^{1/2}/R) \varphi^{3/4}$ . Понятно, что подобное размытие электронного распределения должно дополнительно сглаживать осцилляции в зависимостях  $a(V)$ ,  $\epsilon(V)$  и др. Характерная величина  $T_{\text{эфф}}$  в нашем случае порядка 200, т. е. введение столь большой температуры может убрать осцилляции, но, с другой стороны, для больших полей мы опять получим осцилляции в скорости звука и в других величинах.

Авторы выражают благодарность за обсуждение результатов и высказанные ценные замечания Д. А. Киржницу, Н. Н. Калиткину и Ю. Е. Лозовику.

Институт теоретической и прикладной  
механики СО АН СССР

## EQUATION OF STATE OF A-e PHASE OF PULSAR CRUST WITH AN ACCOUNT OF SUPERSTRONG MAGNETIC FIELD ACTION

G. V. GADIYAK, M. S. OBRECHT, N. N. YANENKO

The results of equation of state of matter (iron) calculation in a magnetic field of the order of  $10^{12}$  G (value typical for pulsars) is presented for the pressure range  $10^3$ – $10^8$  a. u. Pressure  $10^8$  a. u. corresponds to scores of meters distance below the surface of a pulsar. The calculation is based on the modified Thomas-Fermi theory. It is supposed in the model that electrons occupied the states with certain number of Landau level and spin and impulse projections on the field direction. There are a number of anomalous features of the equation of state. For example, the acoustic velocity can decrease while pressure rises the nuclei contribution to the total pressure can be negative.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Гинзбург, УФН, 103, 393, 1971.
2. Б. Б. Кадомец, ЖЭТФ, 58, 1765, 1970.
3. Б. Б. Кадомец, В. С. Кудрявцев, ЖЭТФ, 62, 144, 1972.
4. Y. Tomishima, K. Yonet, Progr. Theor. Phys., 59, 683, 1978.
5. L. N. Labzowsky, Y. E. Lozovik, Phys. Lett., 40A, 281, 1972.
6. V. Banerjee, D. H. Constantinescu, P. Rehak, Phys. Rev., D10, 2384, 1974.
7. R. O. Mueller, A. R. P. Rau, L. Spruch, Phys. Rev. Lett., 26, 1136, 1971.
8. G. V. Gadiyak, Y. E. Lozovik, J. Phys., B., 13, 1531, 1980.
9. Г. В. Гадяк, Ю. Е. Лозовик, Сборник трудов III всесоюзного семинара по моделям механики сплошной среды, Новосибирск, 1976, стр. 211.

10. Г. В. Гадияк, М. С. Обрехт, Н. Н. Яненко, Численные методы механики сплошной среды, 11, 27, 1980; Г. В. Гадияк, М. С. Обрехт, ТВТ, 19, № 1, 1981.
11. G. V. Gadiyak, M. S. Obrecht, N. N. Yanenko, Phys. Lett., 80A, 191, 1980.
12. Ю. Б. Румер, ЖЭТФ, 18, 1081, 1948.
13. E. H. Sondheimer, A. H. Wilson, Proc. Roy. Soc., 210, 173, 1951.
14. M. A. Ruderman, E. Y. Flowers, J. Lee, P. G. Sutherland, W. Hillebrandt, E. Mueller, Ap. J., 215, 291, 1977.
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Наука, М., 1964.
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Наука, М., 1974.
17. Y. Tomishita, K. Shinjo, Progr. Theor. Phys., 92, 853, 1979.
18. Д. А. Киржниц, ЖЭТФ, 34, 1625, 1958.