

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17

НОЯБРЬ, 1981

ВЫПУСК 4

УДК 523.33+523.42

## ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ ИЗОТРОПНО РАССЕИВАЮЩИХ АТМОСФЕРАХ

Т. ВИЯК

Поступила 10 января 1981

Принята к печати 9 апреля 1981

На основе сформулированных в настоящей работе соотношений инвариантности разработан метод определения поля излучения в изотропно рассеивающих многослойных атмосферах, освещенных параллельными лучами. Показано, что эти соотношения инвариантности можно использовать также в том случае, если многослойная атмосфера ограничена снизу отражающей поверхностью с любым коэффициентом отражения. Приведены некоторые результаты вычислений для модельных задач.

1. *Введение.* В теории переноса излучения очень важное значение имеют различные соотношения инвариантности. Первым на это обратил внимание Амбарцумян [1], в дальнейшем идеи Амбарцумяна получили развитие в работах Чандрасекара [2] и Соболева [3]. В работе Беллмана и Калабы [4] разработан принцип инвариантного погружения, по своему содержанию очень близкий к принципам инвариантности Чандрасекара [2]. В работах Енгибаряна и Мнацаканяна [5] и Иванова [6] было сформулировано новое соотношение инвариантности для полубесконечных атмосфер, которое, однако, приведено уже в работе Шмицу [7]. Это соотношение, обобщенное в дальнейшем Яновицким [8], оказалось очень полезным при вычислении поля излучения в полубесконечной атмосфере [9, 10]. Принципы инвариантности для функции Грина скалярного уравнения переноса излучения в полубесконечной атмосфере разработаны Ивановым и Волковым [11]. Яновицкий [12] сформулировал недавно общий принцип инвариантности для полей излучения в неоднородных атмосферах любой геометрии.

К принципам инвариантности Чандрасекара [2] тесно примыкает и соотношение Коглея и Домануса [13], полученное для функции источника в неоднородной плоской атмосфере без внутренних источников.

В настоящей работе показано, что из полученного Коглеем и Доманусом [13] соотношения для функции источника можно вывести некоторые нелинейные формулы для интенсивности, из которых следуют многие известные соотношения инвариантности при более широких предположениях. На основе полученных соотношений разработан метод определения поля излучения в изотропно рассеивающей многослойной плоской атмосфере без внутренних источников, освещенной параллельными лучами. Показано, что эти соотношения инвариантности можно использовать и в том случае, если многослойная атмосфера ограничена снизу отражающей поверхностью с любым коэффициентом отражения.

Составлены программы на алгоритмическом языке ФОРТРАН, в том числе программа для определения интенсивности на контактных поверхностях в многослойной атмосфере с любым количеством слоев, а также для определения выходящей из такой атмосферы интенсивности. Приведены некоторые результаты вычислений для модельных задач.

2. Соотношение Коглея-Домануса. Пусть мы имеем плоскопараллельную неоднородную атмосферу без внутренних источников, в которой происходит как поглощение излучения, так и изотропное рассеяние, причем альbedo однократного рассеяния  $\lambda(\tau)$ . В такой атмосфере поле излучения характеризуется уравнением переноса.

$$\nu \frac{dI(\tau, \nu, x)}{d\tau} + I(\tau, \nu, x) = B(\tau, x), \quad (1)$$

где  $I(\tau, \nu, x)$  — интенсивность излучения,  $B(\tau, x)$  — функция источника,  $\tau$  — оптическая глубина, отсчитываемая от верхней границы атмосферы,  $\arcs \cos \nu$  — угол между направлением распространения излучения и положительной нормалью поверхности,  $x$  — оптическая толщина атмосферы. Функция источника выражается в виде

$$B(\tau, x) = \frac{1}{2} \lambda(\tau) \int_{-1}^{+1} I(\tau, w, x) dw. \quad (2)$$

Пусть атмосфера освещена сверху и снизу излучением интенсивностями  $I_A(0, \nu)$  и  $I_B(x, -\nu)$ .

В таком случае формальное решение уравнения переноса имеет вид [2].

$$I(\tau, -\nu, x) = I_B(x, -\nu) e^{-\frac{x-\tau}{\nu}} + \int_{\tau}^x B(t, x) e^{-\frac{t-\tau}{\nu}} dt/\nu, \quad (3)$$

$$I(\tau, v, x) = I_A(0, v) e^{-\frac{\tau}{v}} + \int_0^{\tau} B(t, x) e^{-\frac{\tau-t}{v}} dt^0 v. \quad (4)$$

Как показали Коглей и Доманус [13], функция источника такой атмосферы связана с освещающими атмосферу интенсивностями при помощи соотношения

$$B(\tau, x) = \frac{2}{F} \int_0^1 [I_A(0, w) J(\tau, w, x) + I_B(x, -w) \bar{J}(\tau, w, x)] dw, \quad (5)$$

где  $J$  и  $\bar{J}$  являются решениями интегральных уравнений

$$J(\tau, u, x) = \frac{F}{4} \lambda(\tau) e^{-\frac{\tau}{u}} + \frac{1}{2} \lambda(\tau) \int_0^x E_1(|t-\tau|) J(t, u, x) dt, \quad (6)$$

$$\bar{J}(\tau, u, x) = \frac{F}{4} \lambda(\tau) e^{-\frac{x+\tau}{u}} + \frac{1}{2} \lambda(\tau) \int_0^x E_1(|t-\tau|) \bar{J}(t, u, x) dt, \quad (7)$$

т. е.  $J$  и  $\bar{J}$  означают соответственно функции источника стандартной задачи и обращенной стандартной задачи.

Соотношение (5) является отправным пунктом для получения очень многих известных соотношений инвариантности, а также их обобщения на случай неоднородных атмосфер.

3. Соотношения инвариантности. Рассмотрим плоскопараллельную неоднородную атмосферу с оптической толщиной  $x$ , разделенную на три слоя с оптическими толщинами  $x_1, x_2, x_3$ . Атмосфера освещена сверху параллельными лучами под углом  $\arccos u$  к нормали, которые создают на верхней границе освещенность  $\pi F u$ .

Используем формулу (5) сначала для первого слоя с оптической толщиной  $x_1$ . В таком случае

$$I_A(0, v) = \frac{1}{2} F \delta(v - u) \quad (8)$$

и

$$I_B(x_1, -v) = I(x_1, -v, u, x). \quad (9)$$

Подставляя граничные условия (8) и (9) в (5), получаем

$$B(t, u, x) = J(t, u, x_1) + \frac{2}{F} \int_0^1 \bar{J}(t, w, x_1) I(x_1, -w, u, x) dw, \quad (10)$$

где оптическая глубина отсчитывается от верхней границы первого слоя.

При помощи формул (3) и (4) находим также интенсивности в первом слое:

$$I(t, v, u, x) = I(t, v, u, x_1) + I(x_1, v, u, x) e^{-\frac{x_1-t}{v}} \vartheta(-v) + \frac{2}{F} \int_0^1 \bar{J}(t, v, w, x_1) I(x_1, -w, u, x) dw, \quad -1 \leq v < 1, \quad (11)$$

где

$$\vartheta(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v \geq 0, \\ 0, & \text{если } v < 0, \end{cases}$$

и

$$\bar{I}(t, -v, u, x_1) = \int_t^{x_1} \bar{J}(s, u, x_1) e^{-\frac{s-t}{v}} ds/v, \quad (12)$$

$$\bar{I}(t, v, u, x_1) = \int_0^t \bar{J}(s, u, x_1) e^{-\frac{t-s}{v}} ds/v. \quad (13)$$

Если первый слой однородный, то

$$\bar{J}(t, u, x_1) = J(x_1 - t, u, x_1),$$

и формула (11) представляет собой соотношение инвариантности Иванова для слоя с отражающей нижней поверхностью.

Положив в формуле (11) сначала  $t = 0$  и  $v < 0$ , а затем  $t = x_1$  и  $v > 0$ , мы получим соответственно третий и второй принципы инвариантности Чандрасекара [2].

Теперь рассмотрим средний слой. В этом случае граничными условиями являются

$$I_A(0, v) = \frac{1}{2} F e^{-\frac{x_1}{v}} \delta(v - u) + I(x_1, v, u, x), \quad (14)$$

$$I_B(x, -v) = I(x_{12}, -v, u, x), \quad (15)$$

где

$$x_{12} = x_1 + x_2.$$

Подставляя граничные условия (14) и (15) в (7), получаем

$$\begin{aligned}
 B(x_1 + t, u, x) = & J(t, u, x_2) e^{-\frac{x_1}{a}} + \frac{2}{F} \int_0^1 J(t, w, x_2) I(x_1, w, u, x) dw + \\
 & + \frac{2}{F} \int_0^1 \bar{J}(t, w, x_2) I(x_{12}, -w, u, x) dw, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где  $t$  отсчитывается с уровня  $\tau = x_1$ .

Согласно формулам (3) и (4), диффузные интенсивности во втором слое выражаются в виде

$$\begin{aligned}
 I(x_1 + t, v, u, x) = & I(t, v, u, x_2) e^{-\frac{x_1}{a}} + I(x_1, v, u, x) e^{-\frac{t}{v}} \vartheta(v) + \\
 + I(x_{12}, v, u, x) e^{\frac{x_2-t}{v}} \vartheta(-v) + & \frac{2}{F} \int_0^1 I(t, v, w, x_2) I(x_1, w, u, x) dw + \\
 + \frac{2}{F} \int_0^1 \bar{I}(t, v, w, x_2) I(x_{12}, -w, u, x) dw, & \quad -1 \leq v \leq 1. \quad (17)
 \end{aligned}$$

В однородном слое формула (17) является соответствующим соотношением инвариантности Яновичского [8], а если в (17) положить  $x \rightarrow \infty$  и  $x_2 \rightarrow \infty$ , то получим известное соотношение инвариантности Иванова [6] для полубесконечной однородной атмосферы.

И, наконец, рассмотрим третий слой. В этом случае граничными условиями являются

$$I_A(0, v) = \frac{1}{2} F e^{-\frac{x_{12}}{a}} \delta(v - u) + I(x_{12}, v, u, x), \quad (18)$$

$$I_B(x, -v) = 0. \quad (19)$$

Подставляя граничные условия (18) и (19) в (7), получаем функцию источника

$$B(x_{12} + t, u, x) = J(t, u, x_2) e^{-\frac{x_{12}}{a}} + \frac{2}{F} \int_0^1 J(t, w, x_2) I(x_{12}, w, u, x) dw \quad (20)$$

и интенсивности

$$I(x_{12} + t, v, u, x) = I(t, v, u, x_3) e^{-\frac{x_3}{u}} + I(x_{12}, v, u, x) e^{-\frac{t}{v}} \vartheta(v) + \\ + \frac{2}{F} \int_0^1 I(t, v, w, x_3) I(x_{12}, w, u, x) dw, \quad -1 \leq v \leq 1. \quad (21)$$

Если в формуле (21) положить  $t = 0$  и  $v < 0$ , получим первый принцип инвариантности Chandrasekhara, а если  $t = x_3$  и  $v > 0$ , то четвертый принцип Chandrasekhara.

Переходим теперь к задаче Милна (полубесконечная атмосфера с источником на бесконечности). Рассматривая такую же трехслойную атмосферу, где  $x_3 \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow \infty$ , получаем для первых двух слоев

$$I(t, v) = I(x_1, v) e^{\frac{x_1-t}{v}} \vartheta(-v) + \frac{2}{F} \int_0^1 I(t, v, w, x_1) I(x_1, -w) dw \quad (22)$$

и

$$I(x_1 + t, v) = I(x_1, v) e^{-\frac{t}{v}} \vartheta(v) + I(x_{12}, v) e^{\frac{x_1-t}{v}} \vartheta(-v) + \\ + \frac{2}{F} \int_0^1 I(t, v, w, x_2) I(x_1, w) dw + \frac{2}{F} \int_0^1 I(t, v, w, x_2) I(x_{12}, -w) dw, \quad (23) \\ -1 \leq v \leq 1.$$

4. Метод определения поля излучения. Определению выходящей из многослойных атмосфер интенсивности, а также определению асимптотического характера поля излучения в таких атмосферах посвящено много исследований. Назовем из них только работы Дэйвисона [14], Гутшабаша [15], Гермогеновой и Коновалова [16], Коновалова [17], Иванова [18, 19] и Колесова [20, 21].

В отличие от названных исследований, в этой части работы мы приводим методику, при помощи которой можно найти поле излучения на любом уровне в многослойной атмосфере.

Напишем в развернутом виде первые четыре принципа Chandrasekhara для двухслойной неоднородной атмосферы, где оптическая толщина первого слоя  $\tau$  и второго  $x - \tau$ :

$$I(\tau, -v, u, x) = I(0, -v, u, x - \tau) e^{-\frac{\tau}{u}} + \\ + \frac{2}{F} \int_0^1 I(0, -v, w, x - \tau) I(\tau, w, u, x) dw, \quad (24)$$

$$I(\tau, v, u, x) = I(\tau, v, u, \tau) + \frac{2}{F} \int_0^1 \bar{I}(\tau, v, w, \tau) I(\tau, -w, u, x) dw, \quad (25)$$

$$I(0, -v, u, x) = I(\tau, -v, u, x) e^{-\frac{\tau}{v}} + I(0, -v, u, \tau) + \frac{2}{F} \int_0^1 \bar{I}(0, -v, w, \tau) I(\tau, -w, u, x) dw, \quad (26)$$

$$I(x, v, u, x) = I(x - \tau, v, u, x - \tau) e^{-\frac{\tau}{u}} + I(\tau, v, u, x) e^{-\frac{x-\tau}{v}} + \frac{2}{F} \int_0^1 I(x - \tau, v, w, x - \tau) I(\tau, w, u, x) dw. \quad (27)$$

Как и в случае однородной атмосферы [22], эти принципы можно использовать для нахождения выходящей из неоднородной атмосферы интенсивности. Кроме того, можно найти также поле излучения на контактных поверхностях в состоящей из однородных слоев неоднородной атмосфере. Но так как в принципе каждую неоднородную атмосферу можно разделить на конечное число однородных слоев (эта идея лежит в основе любого разностного метода), то тем самым приводимый метод является довольно общим.

Например, рассмотрим для простоты атмосферу, состоящую из четырех слоев, каждый из которых характеризуется постоянной вероятностью выживания кванта  $\lambda_i$ , причем  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$ . Слои и контактные поверхности пронумерованы согласно рис. 1. Пусть  $Q_i$ ,  $Q_{ij}$ ,  $Q_{ijk}$  и  $Q_{ijkl}$  обозначают как восходящие, так и нисходящие интенсивности, выходящие из слоев  $i$ ,  $ij$ ,  $ijk$  и  $ijkl$ , соответственно. При этом последовательность индексов указывает направление падающих на слой параллельных лучей. Верхние индексы обозначают, что интенсивности рассматриваются на соответствующих контактных поверхностях. Используя формулы (24)—(27), можем написать в символическом виде (рис. 1).

1.  $Q_3 + Q_4 \rightarrow Q_{34} + Q_{34}^{34}$ ,
2.  $Q_2 + Q_{34} \rightarrow Q_{234} + Q_{234}^{23}$ ,
3.  $Q_1 + Q_{234} \rightarrow Q_{1234} + Q_{1234}^{12}$ ,
4.  $Q_1 + Q_2 \rightarrow Q_{12} + Q_{12}^{12}$ ,
5.  $Q_2 + Q_1 \rightarrow Q_{21} + Q_{21}^{12}$ ,

(28)

$$\begin{aligned}
 6. & Q_{12} + Q_{21} + Q_{34} \rightarrow Q_{1234} + Q_{1234}^{23}, \\
 7. & Q_{21} + Q_3 \rightarrow Q_{321} + Q_{321}^{23}, \\
 8. & Q_2 + Q_3 \rightarrow Q_{23} + Q_{23}^{23}, \\
 9. & Q_1 + Q_{23} \rightarrow Q_{123} + Q_{123}^{12}, \\
 10. & Q_{13} + Q_{31} + Q_4 \rightarrow Q_{1234} + Q_{1234}^{34}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, мы получим интенсивности на контактных поверхностях  $Q_{1234}^{12}$ ,  $Q_{1234}^{23}$  и  $Q_{1234}^{34}$ , а также выходящие из атмосферы интенсивности  $Q_{1234}$ . Тем самым задача решена. Так как интенсивности  $Q_{1234}$  мы получаем каждый раз, когда определяем интенсивности на контактных поверхностях, то эти величины могут служить индикаторами правильности решения.

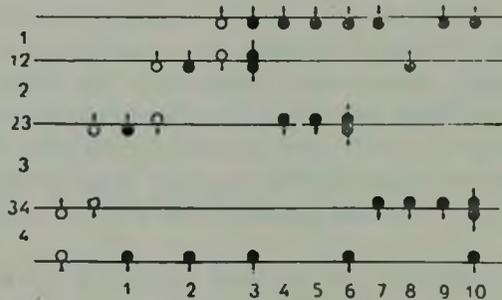


Рис. 1. Порядок операций для определения интенсивностей на контактных поверхностях в четырехслойной атмосфере. Светлые кружки обозначают интенсивности для отдельного слоя, черные — для податмосфер, состоящих из двух или нескольких слоев. Перечеркнутые стрелки обозначают интенсивности для обращенной стандартной задачи.

С увеличением числа слоев количество отдельных сложений  $M$  быстро растет. Можно показать, что в случае  $N$  слоев

$$M = \frac{1}{2} [N(N + 3) - 8].$$

Если нас интересует и поле излучения в отдельных слоях, то его можно найти при помощи формул (11), (17) и (21).

5. *Атмосфера, примыкающая к отражающей поверхности.* Приведенные формулы могут быть использованы также в том случае, если атмосфера снизу ограничена отражающей поверхностью. Рассмотрим для примера двухслойную атмосферу, ограниченную снизу поверхностью с коэффициентом отражения  $\rho(v, u)$ . Пусть оптическая толщина верхнего слоя  $x_1$ , ниж-

него слоя  $x_2$  и всей атмосферы  $x = x_1 + x_2$ . На верхнюю поверхность атмосферы при  $\tau = 0$  падает интенсивность

$$I_A = \frac{1}{2} F \delta(v - u).$$

В атмосфере возникает поле излучения, характеризуемое на каждом уровне некоторой интенсивностью. Согласно формуле (17), мы можем написать для интенсивности на уровнях  $\tau = 0$ ,  $\tau = x_1$  и  $\tau = x$

$$I(0, -v, u, x) = I(0, -v, u, x_1) + I(x_1, -v, u, x) e^{-\frac{x_1}{u}} + \frac{2}{F} \int_0^1 I(x_1, v, w, x_1) I(x_1, -w, u, x) dw, \quad (29)$$

$$I(x_1, -v, u, x) = I(x, -v, u, x) e^{-\frac{x_1}{v}} + I(0, -v, x_2) e^{-\frac{x_1}{u}} + \frac{2}{F} \int_0^1 I(0, -v, w, x_2) I(x_1, w, u, x) dw + \frac{2}{F} \int_0^1 I(x_2, v, w, x_2) I(x, -w, u, x) dw, \quad (30)$$

$$I(x_1, v, u, x) = I(x_1, v, u, x_1) + \frac{2}{F} \int_0^1 I(0, -v, w, x_1) I(x_1, -w, u, x) dw, \quad (31)$$

$$I(x, -v, u, x) = 2 \int_0^1 \rho(v, z) I(x, z, u, x) dz + F u \rho(v, u) e^{-\frac{x}{u}}, \quad (32)$$

$$I(x, v, u, x) = I(x_1, v, u, x) e^{-\frac{x_1}{v}} + I(x_2, v, u, x_2) e^{-\frac{x_1}{u}} + \frac{2}{F} \int_0^1 I(x_2, v, w, x_2) I(x_1, w, u, x) dw + \frac{2}{F} \int_0^1 I(0, -v, w, x_2) I(x, -w, u, x) dw. \quad (33)$$

Здесь мы имели в виду, что

$$\bar{I}(0, -v, w, x_1) = I(x_1, v, w, x_1),$$

$$\bar{I}(x_1, v, w, x_1) = I(0, -v, w, x_1),$$

так как оба слоя однородные.

Решение дискретизованной системы (29)—(33) может быть легко сведено к решению алгебраической системы порядка  $N$ , где  $N$  — число точек дискретизации. При этом требуется только дважды обращаться матрицу порядка  $N$ .

6. *Решение некоторых модельных задач.* Для иллюстрации приведенного метода решены некоторые модельные задачи с помощью составленных на алгоритмическом языке ФОРТРАН программ.

Во-первых, составлена программа для определения интенсивностей на контактных поверхностях в многослойной атмосфере с любым количеством слоев. Расчеты для атмосфер с  $N = 4$  и 10 показали, что если альbedo одно-кратного рассеяния в двух соседних слоях различаются, то на контактной поверхности между этими слоями интенсивность в направлении  $v = 0$  претерпевает разрыв, который тем больше, чем больше разница в альbedo. Результаты расчета для  $\arccos u \approx 13^\circ$  в случае атмосферы, состоящей из четырех слоев, приведены на рис. 1. Для сравнения приведены также интенсивности в однородной атмосфере с  $\lambda = 1$  на тех же глубинах.

На рис. 2 показан ход функции источника в зависимости от оптической глубины для рассматриваемой модельной атмосферы. Разрывы в ходе функции источника обусловлены различиями в альbedo однократного рассеяния соседних слоев.

На рис. 3 приведена интенсивность для  $\arccos u \approx 13^\circ$  в случае двух-слойной атмосферы, ограниченной снизу изотропно отражающей поверхностью с  $A = 1$  и  $A = 0$ . Наблюдается скачок интенсивности в направлении  $v = 0$ , который несколько больше при наличии отражающей поверхности.

Разработанный в настоящей работе метод может быть использован также для расчета выходящей из неоднородной полубесконечной атмосферы интенсивности, если при  $\tau \rightarrow \infty$  альbedo однократного рассеяния асимметрически приближается к постоянной величине. В таком случае выделим почти однородную полубесконечную часть, для которой легко определить выходящую интенсивность

$$I(0, -v, u) = \frac{1}{4} \lambda F \frac{uH(u)H(v)}{u+v}, \quad (34)$$

где  $H(z)$  — функция Амбарцумяна—Чандрасекара [2].

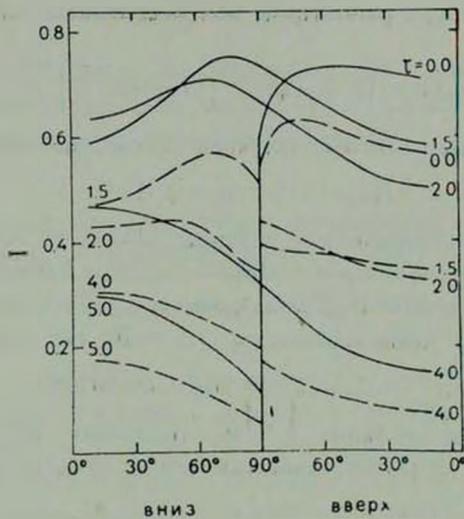


Рис. 2. Интенсивности на контактных поверхностях в четырехслойной атмосфере.  $x_1=1.5$ ,  $x_2=0.5$ ,  $x_3=2.0$ ,  $x_4=1.0$  и  $\lambda_1=1.0$ ,  $\lambda_2=0.8$ ,  $\lambda_3=1.0$  и  $\lambda_4=0.9$  (непрерывная линия). Прерывистой линией обозначены интенсивности в однородной атмосфере с  $x=5$  и  $\lambda=1.0$ .

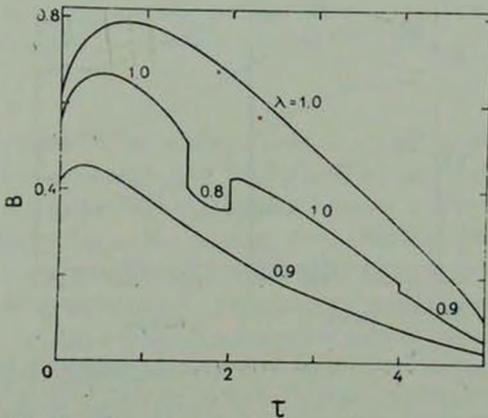


Рис. 3. Функция источника при  $\mu \cos \mu \approx 13^\circ$  в четырехслойной атмосфере (см. рис. 2). Для сравнения приведены соответствующие функции источника в однородной атмосфере с  $x=5$ ,  $\lambda=1.0$  и  $\lambda=0.9$ .

Остальную конечную часть разделим на слои так, чтобы в каждом слое  $\lambda$  можно было считать почти постоянной.

В качестве примера рассмотрим полубесконечную атмосферу, где

$$\lambda(\tau) = \left[ c + kbe^{-\frac{\tau}{s}} \right] \left[ 1 + be^{-\frac{\tau}{s}} \right]^{-1} \quad (35)$$

и на атмосферу падает внешнее излучение интенсивностью

$$I(\nu) = \nu^n, \quad n = 0, 1, 2.$$

Зависимость  $\lambda$  от оптической глубины (35) взята из работы Помрейнинга и Ларсена [23], причем  $c = 0.96$ ,  $s = 2$ ,  $k = 0.686954$  и  $b$  принимает значения 0, 0.1, 1.0 и 10.0. В данном примере принято, что почти однородная полубесконечная часть начинается с  $\tau = 20$ , где для  $b = 10$

$$\lambda(\tau \rightarrow \infty) - \lambda(\tau = 20) = 0.0001239.$$

Атмосфера над уровнем  $\tau = 20$  разделена на слои толщиной  $\Delta\tau = 0.2$ , которые с большой точностью можно считать однородными.

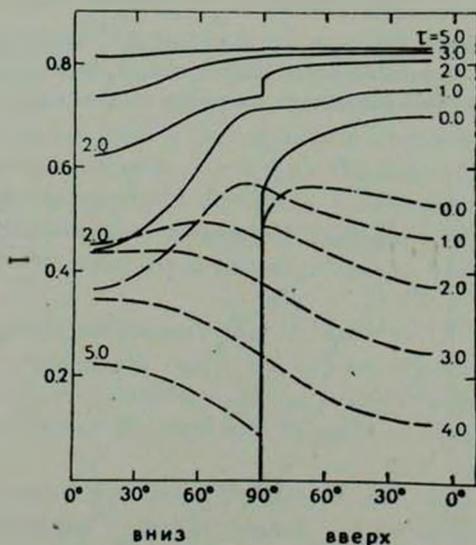


Рис. 4. Интенсивности в двухслойной атмосфере, граничащей с отражающей поверхностью. Характеристики слоев:  $x_1=2.0$ ,  $x_2=3.0$  и  $\lambda_1=0.95$ ,  $\lambda_2=1.0$ . Непрерывная линия — поверхность отражает изотропно с  $A = 1$ , прерывистая линия —  $A = 0$ .

По описанному выше методу определяем выходящую из полубесконечной атмосферы интенсивность  $I(0, -\nu, \nu)$ . Для сравнения получаемых результатов с результатами Помрейнинга и Ларсена следует найти отношение выходящего из атмосферы потока к входящему потоку

$$R = (n + 1) \int_{-1}^0 w dw \int_0^1 I(0, -w, u) u^n du.$$

Как видно из таблицы, согласие при малых  $b$  очень хорошее. С увеличением  $b$  согласие ухудшается, так как при больших  $b$  функция  $\lambda(\tau)$  достигает своей асимптотической величины медленнее.

Таблица 1

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОМРЕЙНИНГА—ЛАРСЕНА (А)  
С НАШИМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ (В)

$b$	$n=0$		$n=1$		$n=2$	
	А	В	А	В	А	В
0	0.630581	0.630581	0.614117	0.614116	0.604754	0.604754
0.1	0.579718	0.579752	0.563308	0.563325	0.554052	0.554064
1.0	0.399078	0.399281	0.383308	0.383468	0.374660	0.374804
10.0	0.271058	0.271150	0.256351	0.256429	0.248446	0.248519

Наконец отметим, что для определения выходящих из отдельного слоя интенсивностей использован метод аппроксимации ядра интегрального уравнения для резольвентной функции суммой экспонент [24]. Интегральные уравнения (24) и (25) для искомых интенсивностей решаются путем дискретизации по гауссовым точкам на  $[0, 1]$ . Тем самым решение интегральных уравнений сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений.

**7. Заключение.** В настоящей работе сформулированы некоторые соотношения инвариантности для изотропно рассеивающей многослойной атмосферы, освещенной параллельными лучами и не содержащей внутренних источников излучения. На основе этих соотношений разработан метод определения поля излучения в атмосфере, состоящей из однородных слоев. Показано, что приведенные соотношения инвариантности могут быть использованы и в том случае, если многослойная атмосфера ограничена снизу отражающей поверхностью. В качестве иллюстрации приведены некоторые результаты вычисления поля излучения для модельных задач. Разработанный метод вычисления поля излучения может быть обобщен и на случай анизотропного рассеяния.

Институт астрофизики и физики  
атмосферы АН Эст. ССР

## RADIATION FIELD IN MULTILAYERED ISOTROPICALLY SCATTERING ATMOSPHERE

T. VIİK

A method of determining the radiation field in an isotropically scattering multilayered atmosphere illuminated by parallel rays is described using some new principles of invariance. It is shown that these principles can be used even in the case when the atmosphere considered is bounded by a reflecting bottom. Specimen numerical results are provided.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Научные труды, Изд. Арм. ССР, Ереван, 1960.
2. S. Chandrasekhar, Radiat. Transfer. Dover Publ., Inc., N. Y., 1960.
3. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Госиздат, тех.-теор. лит., М., 1956.
4. R. Bellman, R. Kalaba, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 42, 629, 1956.
5. Н. В. Емгибарян, М. А. Мнацаканян, ДАН СССР, 217, 533, 1974.
6. В. В. Иванов, Астрон. ж., 52, 217, 1975.
7. А. Shimizu, Nucl. Sci. and Eng., 32, 184, 1968.
8. Э. Г. Яновицкий, Астрон. ж., 56, 833, 1979.
9. Ж. М. Длузач, Астрон. ж., 53, 1295, 1976.
10. Ж. М. Длузач, Астрометрия и астрофизика, 31, 68, 1977.
11. В. В. Иванов, Е. Е. Волков, Труды АО ЛГУ, 55, 3, 1979.
12. Э. Г. Яновицкий, Препринт ИТФ-79-117Р, Киев, 1979.
13. A. C. Cogley, H. M. Domanus, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 12, 1191, 1972.
14. B. Davison, Canad. J. Res., 28A, 303, 1950.
15. С. Д. Гутшабаш, Вестн. ЛГУ, 1, 158, 1957.
16. Т. А. Гермогенова, Н. В. Коновалов, Препринт, М., 1972.
17. Н. В. Коновалов, Препринт № 14, М., 1974.
18. В. В. Иванов, Труды АО ЛГУ, 52, 3, 1975.
19. В. В. Иванов, Труды АО ЛГУ, 52, 23, 1975.
20. А. К. Колесов, Труды АО ЛГУ, 52, 39, 1975.
21. А. К. Колесов, Труды АО ЛГУ, 56, 29, 1978.
22. H. C. van de Hulst, K. Grossmann, in "The Atmospheres of Venus and Mars", ed. by J. C. Brandt and M. B. McElroy, Gordon and Breach Science Publ., N. Y., 1968.
23. G. C. Pomraning, E. W. Larsen, J. Math. Phys., 21, 1603, 1980.
24. А. Хейнло, Т. Вийк, Сообщ. Тартуской обш., № 56, 37, 1978.