АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17 АВГУСТ, 1981 ВЫПУСК 3

УДК 523

ОБЗОРЫ

К 100-летию Астрономической обсерватории Ленинградского университета

ЛЕНИНГРАДСКАЯ ШКОЛА ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

И. Н. МИНИН

Поступила 4 июня 1981
Принята к печати 21 июня 1981

Обзор работ по теории переноса излучения как раздела теоретической астрофизики. Основное внимание уделено результатам, полученным сотрудниками Астрономической обсерватории Ленинградского университета. Рассматриваются перенос монохроматического излучения, перенос излучения с перераспределением по частотам и нестационарный перенос излучения. Особо отмечены статьи, в которых содержатся основополагающие идеи и новые методы. Приведены также результаты, наиболее важные для дальнейшего развития теории и ее применений.

Наука двадцатого века привела к необходимости подробного анализа *уравнения*, описывающего *перенос фотонов и частиц* в веществе. Это уравнение исследовалось в ряде разделов физических и математических наук. Так, например, теория распространения волн в случайно-неоднородных средах, в которой рассматривается многократное рассеяние, при определенных допущениях (приближение геометрической оптики, переход от квантовых движений к классическим) приводит к уравнению переноса. Кинетическая теория для случая, так называемого, газа Лоренца (легкие частицы, которые движутся среди тяжелых и между собой не взаимодействуют) имеет дело с линеаризованным уравнением Больцмана, которое совпадает с уравнением переноса. Кстати говоря, типичный газ Лоренца — фотонный газ.

Пожалуй, наиболее важные задачи о переносе фотонов и частиц возникли в связи с развитием ядерной энергетики. Появилась необходимость создания теории переноса нейтронов в ядерных реакторах. Вопросы защиты от вредных излучений стимулировали теорию распространения гамма-излучения в веществе, а также анализ прохождения заряженных частиц через вещество. Проблема осуществления управляемого термоядерного синтеза сталкивается с переносом излучения в плазме.

Уравнение переноса является интегро-дифференциальным и ставит много математических проблем как принципиальных, так и технических по реализации решений. Часто его приводят к сингулярному интегральному уравнению. Далее, процесс переноса можно рассматривать как случайный (марковский) с соответствующим статистическим толкованием основных величин. Таким образом находится связь с математической теорией вероятностных (стохастических) процессов.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая *теория начала развиваться* задолго до других ее перечисленных ветвей в *астрофизике при исследовании переноса лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*. Первые шаги в развитии теории связаны с астрофизическими работами К. Шварцшильда [1], А. Шустера [2], Э. Милна [3] и Э. Эддингтона [4], опубликованными в начале века. Исключение составляет статья профессора Петербургского университета О. Д. Хвольсона [5], в которой рассмотрена задача о рассеянии света в молочных стеклах. В ней впервые получено интегральное уравнение, а также исследованы некоторые предельные (асимптотические) случаи. Частный вариант этого уравнения получил намного позднее Э. Милн, занимавшийся теорией лучистого равновесия звездных атмосфер. Другой любопытный факт состоит в том, что широко известный способ приближенного решения уравнения переноса излучения, называемый методом Эддингтона, намного раньше применял к задачам кинетической теории электронного газа в металлах Г. Лоренц.

Следует также упомянуть, что вопросы о переносе излучения часто возникают в геофизике при изучении атмосферы и океана. Уже в 1871 г. Рэлей сформулировал задачу о расчете яркости и поляризации света дневного безоблачного неба. Естественно, что решение такого рода задач входит в общий круг проблем оптики планетных атмосфер и рассматривается в большинстве случаев астрофизическими методами.

Исследования по *теории переноса излучения* получили большое развитие на *кафедре астрофизики Ленинградского университета*. Более того, можно сказать, что основные аналитические методы и соответствующий математический аппарат теории в значительной мере созданы сотрудниками этой кафедры. Итоговые результаты опубликованы в ряде книг и сборников, переведенных и изданных за рубежом. Наиболее существенные выводы вошли в учебники. Кроме того, и это не менее важно, по существу образовалась *научная школа,* имеющая теперь уже много ответвлений и представителей как в нашей стране, так и за рубежом. В данном обзоре приведены основные, наиболее существенные результаты, полученные в теории переноса излучения сотрудниками кафедры астрофизики Ленинградского университета и другими исследователями. При этом принято во внимание то обстоятельство, что теория переноса излучения является одним из важнейших орудий *теоретической астрофизики.*

I. ПЕРЕНОС МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Перенос монохроматического излучения состоит в многократном рассеянии фотонов. При каждом акте рассеяния происходит изменение направления их движения, а также частичное поглощение. Такая модель процесса возникает в ряде задач астрофизики.

Первоначально две задачи, связанные с излучением, привлекали внимание астрофизиков: перенос излучения в атмосферах звезд и диффузное отражение света планетными атмосферами. При моделировании процессов в случае фотосферных задач было сделано допущение о том, что коэффициент поглощения не зависит от частоты излучения, а в случае атмосфер планет — что рассеяние света элементарным объемом изотропно. Разумеется, оба эти допущения не соответствуют действительности, но зато достигается простота и возможность осуществить анализ для начального приближения. Кроме того, на примере простейшего случая легче конструировать общие методы решения задачи. Поэтому изложение теории переноса монохроматического излучения также целесообразно начать со случая изотропного рассеяния света.

I.1. *Изотропное рассеяние света.* Задача о фотосфере сводится к решению *уравнения Милна*

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty E_1(|\tau - \tau'|)\,B(\tau')\,d\tau', \tag{1}$$

где

$$E_1(\tau) = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}}\,\frac{d\eta}{\eta}, \tag{2}$$

$B(\tau)$ — так называемая функция источников, определяющая в данной постановке распределение температуры в фотосфере звезды (функция $B(\tau)$ пропорциональна четвертой степени температуры), τ — оптическая глубина рассматриваемого элементарного объема.

Интегральное уравнение (1) получается из интегро-дифференциального уравнения переноса излучения

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta)}{d\tau} = I(\tau, \eta) - B(\tau), \tag{3}$$

где

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta')\, d\eta', \tag{4}$$

$I(\tau, \eta)$ — интенсивность излучения на оптической глубине τ в направлении, составляющем с внешней нормалью к атмосферным слоям угол, косинус которого равен η. Для получения (1) из (3) используется граничное условие

$$I(0, \eta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta < 0, \tag{5}$$

выражающее тот факт, что на границу фотосферы $\tau = 0$ извне в случае одиночной звезды не падает излучение.

Задача о рассеянии света в атмосфере планеты приводит к следующему неоднородному интегральному уравнению, полученному из соответствующего уравнения переноса излучения,

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2}\int_{0}^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|)\, B(\tau', \zeta)\, d\tau' + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \tag{6}$$

где πS — величина потока солнечного излучения, падающего на площадку, перпендикулярную лучам, на верхней границе атмосферы ($\tau = 0$), ζ — косинус угла падения солнечных лучей, λ — альбедо однократного рассеяния света в атмосфере (вероятность выживания фотона при одном рассеянии), τ_0 — оптическая толщина атмосферы. Как и в случае звезды, здесь считается, что атмосферные слои не сферические, а плоскопараллельные. Это оправдано, поскольку обычно в большинстве реальных ситуаций толщина атмосферы гораздо меньше радиуса.

После решения уравнений (1) и (6) и определения $B(\tau)$ и $B(\tau, \zeta)$ интенсивность излучения в любом месте атмосферы и заданном направлении может быть получена интегрированием. Так, например, для интенсивности излучения, выходящего через верхнюю границу атмосферы планеты, имеем

$$I(0, \eta, \zeta) = \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} B(\tau, \zeta) \frac{d\tau}{\eta}, \qquad (7)$$

где η — косинус угла, составленного выходящим излучением с нормалью к атмосферным слоям. Заметим, что здесь, как и при составлении уравнения (6), было принято альбедо поверхности планеты равным нулю.

Уравнения (1) и (6) представляют частные случаи *уравнения Милна—Хвольсона*

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|) B(\tau') d\tau' + g(\tau), \qquad (8)$$

решение которого определяет поле диффузного монохроматического излучения в плоском однородном слое рассеивающей и поглощающей свет среды, освещаемой источниками, заданными функцией $g(\tau)$. Анализ и решение уравнения (8) составили первую, начальную проблему теории переноса излучения. Теперь посмотрим, как происходило в астрофизике исследование уравнения (8) и получение его точного аналитического решения. Обратимся сначала к случаю полубесконечной среды ($\tau_0 = \infty$).

Полубесконечная среда. Начнем с исследования уравнения (6). В ряде случаев оказывается достаточным знать только интенсивность диффузно отраженного света $I(0, \eta, \zeta)$. Тогда $B(\tau, \zeta)$ заключает избыточную информацию о поле излучения. Так обстоит дело в задачах об отражении света атмосферами планет и звезд (в тесных двойных системах). Поэтому возникает вопрос о возможности нахождения непосредственно $I(0, \eta, \zeta)$ минуя определение $B(\tau, \zeta)$. Этот вопрос был поставлен и положительно разрешен В. А. Амбарцумяном в Елабужском филиале Ленинградского университета в 1942 г. В результате два метода теории переноса излучения сформулированы в опубликованных статьях [6, 7].

Первый подход [6] основан на формальных математических действиях с уравнением (6). Сначала дифференцирование по τ, а затем использование суперпозиции решений исходного уравнения для получения производной от функции $B(\tau, \zeta)$ по τ через значения самой этой функции. Представляя $I(0, \eta, \zeta)$ в форме

$$I(0, \eta, \zeta) = S\rho(\eta, \zeta)\zeta, \qquad (9)$$

где $\rho(\eta, \zeta)$ — коэффициент яркости для диффузного отражения света, В. А. Амбарцумян получил

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}, \tag{10}$$

где $\varphi(\eta)$ — *функция Амбарцумяна* — удовлетворяет уравнению

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta\varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta} d\zeta. \tag{11}$$

Второй способ решения задачи [7] основан на введении существенно нового понятия — *принципа инвариантности*. В данном случае принцип состоит в том, что добавление к полубесконечной среде слоя с теми же свойствами оптической толщины $\Delta\tau$ не изменяет ее отражательной способности. Рассматривая процессы в слое $\Delta\tau \ll 1$ и составляя уравнение баланса, В. А. Амбарцумян снова получил результаты (10) и (11). При таком подходе не было необходимости использовать обычные уравнения теории переноса излучения — результат получен без них, непосредственно из соотношения баланса в слое $\Delta\tau$.

В общем виде такой способ заключается в мысленном сложении слоев произвольной оптической толщины и называется *методом сложения слоев*. Систематическое применение принципов инвариантности к задачам теории переноса излучения было выполнено в работах С. Чандрасекара, включенных в книгу [8]. В дальнейшем такие подходы получили широкое применение при решении обширного класса задач математической физики, а также некоторых задач теории вероятностей. При этом часто используется новый термин — *принцип инвариантного вложения* [9, 22].

Возвращаясь к решаемой задаче о диффузном отражении света полубесконечной средой, отметим, что оба метода Амбарцумяна приводят к выяснению структуры коэффициента яркости. Являясь функцией двух аргументов, он выражен через вспомогательную функцию, зависящую только от одного аргумента, для определения которой получается функциональное уравнение, легко решаемое численно. Методы и соотношения, найденные в [6, 7], могут быть обобщены на более сложные задачи и имеют большое значение в теории переноса излучения.

Заметим, что исследованием и решением уравнений типа (8) при $\tau_0 = \infty$ занимался В. А. Фок [10], получивший, в частности, одновременно с В. А. Амбарцумяном формулу (10). Кроме того, в его работе найдено явное выражение для функции $\varphi(\eta)$ в форме определенного интеграла, зависящего от параметров η и λ.

В случае, когда свечение полубесконечной среды происходит под воздействием источников, расположенных на бесконечно большой глубине (задача Милна), решение уравнения (1) для $B(\tau)$ полностью определяет поле излучения. Однако если интересоваться только угловым распределением интенсивности излучения, выходящего через границу среды, то в работе В. А. Амбарцумяна [6] было показано, что указанная интенсивность $I(0, \eta)$ весьма просто представляется через $\varphi(\eta)$. Именно, имеем

$$I(0, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{4} F\varphi(\eta), \tag{12}$$

где πF — поток выходящего излучения, а $\varphi(\eta)$ определяется уравнением (11) при $\lambda = 1$. При $\lambda < 1$, как следует из той же работы [6], получается

$$I(0, \eta) = \frac{\lambda k F}{4\sqrt{1-\lambda}} \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\eta}, \tag{13}$$

где k — положительный корень уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-z} = 1. \tag{14}$$

Что касается самого уравнения (1), то его подробный анализ и решение содержатся в книге (первой по теории переноса излучения!), которая была опубликована Э. Хопфом [11]. Для функции источников получена формула

$$B(\tau) = \frac{3}{4} F[\tau + q(\tau)], \tag{15}$$

где $q(\tau)$ — функция Хопфа — монотонно изменяется в пределах от $q(0) = 1/\sqrt{3} = 0.577$ до $q(\infty) = 0.710$.

Новый метод в теории многократного рассеяния света был развит В. В. Соболевым [12] на основе статистического толкования основных величин и функций. Этот *вероятностный метод* первоначально был применен к определению вероятности выхода фотона $p(\tau, \eta)$ из полубесконечной среды с изотропным рассеянием с оптической глубины τ в направлении, косинус угла которого с нормалью равен η. Оказалось, что имеет место соотношение

$$B(\tau, \eta) = \pi S p(\tau, \eta), \tag{16}$$

где $B(\tau, \eta)$ — функция источников в задаче о свечении той же среды, когда на ее границу падает поток параллельных лучей πS под углом к нормали, косинус которого равен η. Это значит, что $p(\tau, \eta)$ определяется (с точностью до множителя πS) тем же интегральным уравнением (6). Функция $p(\tau, \eta)$ зависит только от оптических свойств среды и не зависит от распределения и мощности источников излучения. Если $f(\tau)\,d\tau$ есть количество лучистой энергии, приходящее непосредственно от источников излучения и поглощаемое в элементарном объеме, то интенсивность выходящего из среды излучения $I(0, \eta)$ будет определяться формулой

$$I(0, \eta) = \int_0^\infty f(\tau)\, p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}. \tag{17}$$

Это дает возможность находить $I(0, \eta)$ при любых источниках излучения, мощность которых зависит только от τ. В частных случаях, когда $f(\tau)$ полином, экспонента или их линейная комбинация, удается получить выражение для $I(0, \eta)$ непосредственно через $\varphi(\eta)$ и моменты этой функции. Если источники излучения распределены в среде равномерно, то

$$I(0, \eta) = \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1-\lambda}} \tag{18}$$

при значении $g(\tau) = 1$. Этот результат, легко получаемый вероятностным методом, впервые был найден В. А. Амбарцумяном [13]. Наконец, в работе [12] новый метод использован для строгого доказательства симметричности функции $\rho(\eta, \zeta)$ относительно аргументов и, значит, углов падения и отражения.

Перейдем теперь к анализу поля излучения внутри среды и общему решению уравнения (8) при $\tau_0 = \infty$. В астрофизике нахождение интенсивности излучения внутри среды осуществляется с использованием уже полученного решения задачи о выходящем излучении. Такой путь оказывается эффективным и быстро приводит к цели, поскольку действие производится как бы «по частям». Сначала находится выходящее излучение (функция $\varphi(\eta)$), а потом — поле излучения внутри среды (функция $B(\tau)$).

Используя интегральное уравнение для $p(\tau, \eta)$ и метод Амбарцумяна [6], находим производную по τ в виде

$$p'(\tau, \eta) = -\frac{1}{\eta} p(\tau, \eta) + 2\pi p(0, \eta) \int_0^1 p(\tau, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}, \tag{19}$$

а также

$$p(0, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta). \tag{20}$$

Кстати говоря, соотношение (20) определяет физический (вероятностный) смысл функции Амбарцумяна. Уравнение (19) также легко получить с применением вероятностного подхода, без рассмотрения интегрального уравнения.

Введем обозначение

$$\Phi(\tau) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \tag{21}$$

Тогда из уравнения (19) следует

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta) \left[e^{-\frac{\tau}{\eta}} + \int_0^\tau \Phi(\tau') e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta}} d\tau' \right], \tag{22}$$

откуда легко получается

$$\Phi(\tau) = N(\tau) + \int_0^\tau \Phi(\tau') N(\tau - \tau') d\tau', \tag{23}$$

где

$$N(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \varphi(\eta) \frac{d\eta}{\eta}. \tag{24}$$

Таким образом, нахождение функции $p(\tau, \eta)$, а значит также $B(\tau, \eta)$, сведено к определению функции $\Phi(\tau)$ из интегрального уравнения (23) типа Вольтерра. Этот способ приведен в книге В. В. Соболева [14]. Там же рассмотрен вопрос о резольвенте $\Gamma(\tau, \tau')$ уравнения (8), что дает возможность решать задачи для произвольной функции $g(\tau)$. Именно, имеем

$$B(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty \Gamma(\tau, \tau') g(\tau') d\tau', \tag{25}$$

а функция $\Gamma(\tau, \tau') = \Gamma(\tau', \tau)$ легко находится по формуле (при $\tau' > \tau$)

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi(\tau' - \tau) + \int_0^\tau \Phi(t) \Phi(t + \tau' - \tau) dt. \tag{26}$$

Отсюда видно, что введенная новая функция $\Phi(\tau)$ — *функция Соболева* — имеет фундаментальное значение для решения рассматриваемой задачи. Иногда ее, по понятной причине, называют также резольвентной функцией.

В работе В. В. Соболева [15] такой подход изложен в обобщенном виде, а также приведены некоторые частные результаты. Например, получено соотношение

$$\varphi(\zeta) = 1 + \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \Phi(\tau)\, d\tau, \tag{27}$$

а решение задачи Милна при $\lambda = 1$ представлено в форме

$$B(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{4} F \left[1 + \int_0^\tau \Phi(\tau')\, d\tau' \right]. \tag{28}$$

Указано также, что решение уравнения (23) может быть найдено с применением преобразования Лапласа. Точное аналитическое выражение для $\Phi(\tau)$ таким путем было получено в работе И. Н. Минина [16].

Наконец В. В. Соболев [17, 18] распространил изложенную методику на интегральные уравнения с ядром, зависящим от абсолютного значения разности двух аргументов

$$B(\tau) = \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\, B(\tau')\, d\tau' + g(\tau), \tag{29}$$

которые часто встречаются в теории переноса излучения (а также в некоторых других разделах теоретической физики). Если не вдаваться в подробности, то основные результаты формулируются так. Пусть

$$K(\tau) = \int_0^b A(y)\, e^{-\tau y}\, dy. \tag{30}$$

Тогда для получения решения с использованием формул (25) и (26) находим $\Phi(\tau)$ из уравнения (23), в котором

$$N(\tau) = \int_a^b A(x)\, B(0, x)\, e^{-\tau x}\, dx, \tag{31}$$

где $B(0, x)$ определяется уравнением

$$B(0, x) = 1 + B(0, x) \int_a^b A(y) \frac{B(0, y)}{x + y}\, dy. \tag{32}$$

Решение однородного уравнения имеет вид

$$B(\tau) = B(0) \left[e^{k\tau} + \int_0^\tau e^{k(\tau - \tau')}\, \Phi(\tau')\, d\tau' \right]. \tag{33}$$

в котором постоянная k определяется уравнением

$$2\int_a^b A(x)\ \frac{x\,dx}{x^2-k^2}=1. \tag{34}$$

В частном случае переноса монохроматического излучения при изотропном рассеянии $A(x)=\lambda/2x$, $a=1$, $b=\infty$. Тогда, например, уравнение (34) совпадает с (14), а при $\lambda=1$ (33) переходит в (28).

Таким образом, задача о полубесконечной среде не только была успешно решена астрофизиками, но при этом получено также рассмотренное обобщение. Это дало возможность исследовать более сложные задачи, связанные с уравнениями типа (29).

Слой конечной оптической толщины. Введем коэффициенты яркости $\rho(\eta,\zeta,\tau_0)$ и $\sigma(\eta,\zeta,\tau_0)$ для диффузного отражения и пропускания света слоем оптической толщины τ_0. Интенсивности получаются умножением коэффициентов яркости на $S\zeta$, где ζ — косинус угла падения лучей на границу слоя $\tau=0$ (η — косинус углов отражения и пропускания). Коэффициенты яркости слоя были найдены в работе В. А. Амбарцумяна [7] в следующей форме:

$$\rho(\eta,\zeta,\tau_0)=\frac{\lambda}{4}\,\frac{\varphi(\eta,\tau_0)\varphi(\zeta,\tau_0)-\psi(\eta,\tau_0)\psi(\zeta,\tau_0)}{\eta+\zeta}, \tag{35}$$

$$\sigma(\eta,\zeta,\tau_0)=\frac{\lambda}{4}\,\frac{\varphi(\eta,\tau_0)\psi(\zeta,\tau_0)-\varphi(\zeta,\tau_0)\psi(\eta,\tau_0)}{\zeta-\eta}, \tag{36}$$

где вспомогательные функции $\varphi(\eta,\tau_0)$ и $\psi(\eta,\tau_0)$ определяются из системы двух функциональных уравнений

$$\varphi(\eta,\tau_0)=1+\frac{\lambda}{2}\,\eta\int_0^1\frac{\varphi(\eta,\tau_0)\varphi(\zeta,\tau_0)-\psi(\eta,\tau_0)\psi(\zeta,\tau_0)}{\eta+\zeta}\,d\zeta, \tag{37}$$

$$\psi(\eta,\tau_0)=e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}+\frac{\lambda}{2}\,\eta\int_0^1\frac{\varphi(\eta,\tau_0)\psi(\zeta,\tau_0)-\varphi(\zeta,\tau_0)\psi(\eta,\tau_0)}{\zeta-\eta}\,d\zeta. \tag{38}$$

Для получения этих результатов использована инвариантность искомых величин по отношению к такому преобразованию, когда у границы слоя $\tau=0$ прибавляется слой оптической толщины $\Delta\tau$ и одновременно у границы $\tau=\tau_0$ отнимается слой такой же оптической толщины $\Delta\tau$. Оказывается, что в этом случае коэффициенты яркости выражаются через две вспомогательные функции Амбарцумяна, каждая из которых зависит лишь от одной переменной (τ_0 — параметр, определяющий наряду с λ заданные оптические свойства слоя). Из найденных формул и уравнений вытекают, в частности, полученные ранее для случая $\tau_0 = \infty$ формула (10) и уравнение (11).

Другие уравнения для $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ и определения функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ были найдены вероятностным методом В. В. Соболевым [19]. Им же [20] получена резольвента основного интегрального уравнения (8) $\Gamma(\tau', \tau, \tau_0)$ через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$, а также сделано обобщение применяемого способа к решению уравнения вида (29) в случае конечного промежутка интегрирования [17].

Неоднородная среда. При изучении переноса монохроматического излучения в плоском слое с изотропным рассеянием неоднородность может возникнуть только вследствие зависимости λ от τ. Очевидно, что при этом исходные уравнения сохраняют форму и только вместо постоянного λ мы должны поставить $\lambda(\tau)$ (например, в уравнении (8)). Разумеется, решение таких уравнений значительно усложняется. Однако разработанные методы не утрачивают силу и успешно применяются. Так, в задаче о диффузном отражении света полубесконечной средой В. В. Соболев [21] использовал снова вероятностный подход и получил

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \lambda(\tau)\,\varphi(\eta, \tau)\,\varphi(\zeta, \tau)\, e^{-\tau\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{d\tau}{\eta\zeta}, \tag{39}$$

где вспомогательная функция $\varphi(\eta, \tau)$ определяется уравнением

$$\varphi(\eta, \tau) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta}\int_\tau^\infty \lambda(\tau')\,\varphi(\eta, \tau')\,\varphi(\zeta, \tau')\, e^{-(\tau'-\tau)\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)} d\tau'. \tag{40}$$

Эти результаты найдены также в работе Р. Беллмана и Р. Калабы [22].

Затем для слоя конечной оптической толщины соответствующее обобщение сделали С. Уэно [23] и И. Басбридж [24]. В этом случае коэффициент яркости $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ сохраняет симметрию относительно углов падения и отражения, тогда как $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \sigma^*(\zeta, \eta, \tau_0)$, где $\sigma^*(\eta, \zeta, \tau_0)$ — коэффициент яркости для диффузного пропускания света при освещении слоя потоком параллельных лучей со стороны нижней границы слоя ($\tau = \tau_0$). Этот результат объясняется тем, что слой, освещаемый снизу, не тождественен слою, освещаемому сверху.

Таковы главные результаты, полученные в теории переноса монохроматического излучения при допущении об изотропном рассеянии. Более подробно они изложены в книге В. В. Соболева [14]. С основными работами В. А. Амбарцумяна можно ознакомиться в сборнике его научных трудов [25]. Хороший обзор содержится в статье [26]. Для случая полубесконечной среды более подробные сведения о функциях $\varphi(\eta)$ и $\Phi(\tau)$ имеются в книге В. В. Иванова [27] (глава III). Там же приведены некоторые детали, связанные с развитием работ в этой области исследования.

1.2. *Неизотропное рассеяние света.* Одной из основных характеристик рассеяния света элементарным объемом является индикатриса, определяющая угловое распределение вероятности рассеяния на заданный угол. В теории переноса ее обычно представляют в форме разложения по полиномам Лежандра. Если в этом разложении сохранить $n+1$ слагаемое, то для задания индикатрисы будем иметь n чисел — коэффициентов указанного разложения — $x_1, x_2, \ldots x_n$. В случае изотропного рассеяния все они равны нулю. Если к названным числам добавить λ и τ_0, то это и будет полная оптическая модель однородного плоского слоя рассеивающей и поглощающей свет среды.

Возьмем основное интегральное уравнение, определяющее функцию источников $B(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ в задаче о планетной атмосфере (интегральное уравнение при неизотропном рассеянии впервые рассматривал В. А. Амбарцумян [28]). Здесь φ — азимут направления распространения излучения (считается, что азимут падающих солнечных лучей равен нулю). Из этого уравнения с учетом теоремы сложения для сферических функций следует

$$B(\tau, \eta, \zeta, \varphi) = B^0(\tau, \eta, \zeta) + 2 \sum_{m=1}^{n} B^m(\tau, \eta, \zeta) \cos m\varphi. \tag{41}$$

Аналогичное разложение, естественно, имеет место и для интенсивности излучения. Приступим теперь к рассмотрению конкретных вопросов.

Полубесконечная среда. Задача о диффузном отражении света была решена В. А. Амбарцумяном [29] с применением сформулированного им принципа инвариантности. Структура коэффициентов $\rho^m(\eta, \zeta)$ аналогична (10) и включает суммирование по индексу i от m до n. Таким образом, здесь оказывается необходимым рассматривать $n-m+1$ функций $\varphi_i^m(\eta)$, через которые выражается искомая величина. Всего при нахождении $\rho(\eta, \zeta, \varphi)$ следует знать $1/2\,(n+1)(n+2)$ функций Амбарцумяна $\varphi_i^m(\eta)$, для определения которых получаются системы уравнений, обобщающих (11), отдельная для каждого m.

Далее В. А. Амбарцумян [30] решил задачу о диффузном пропускании света (задача Милна) и получил следующий результат:

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i a_i \varphi_i^0(\eta)}{1 - k\eta}, \tag{42}$$

где

$$a_l = \int_0^1 u(\eta)\, P_l(\eta)\, d\eta, \tag{43}$$

$P_l(\eta)$ — полином Лежандра степени l. В (42) $u(\eta)$ — функция, дающая угловое распределение интенсивности излучения, выходящего через границу среды. Подставляя (42) в (43), находим систему однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_l. Из условия равенства нулю определителя этой системы получается величина k. В частном случае изотропного рассеяния света отсюда вытекают результаты (12), (13) и (14) с учетом нормировки на величину потока излучения πF, выходящего из среды.

В дальнейшем С. Чандрасекар [8] ввел в рассматриваемую теорию новые функции $H^m(\eta)$, связанные определенным образом с функциями $\varphi_i^m(\eta)$. Новых функций, понятно, меньше и для заданного m необходима всего одна. Эта функция определяется уравнением, обобщающим (11). Для получения уравнения, определяющего $H^m(\eta)$, следует в (11) заменить $\lambda/2$ на $\Psi^m(\zeta)$ под знаком интеграла. Уравнение, полученное в результате, иногда называют „уравнением Амбарцумяна-Чандрасекара". Функция $\Psi^m(\zeta)$ может быть найдена для заданных x_1, x_2, ... x_n и λ по известному правилу.

Так же, как и в случае изотропного рассеяния света, вслед за указанными результатами последовало нахождение полного решения основного интегрального уравнения. Это сделано В. В. Соболевым [31] и таким образом была создана *общая теория*, суть которой в следующем. Резольвента основного интегрального уравнения выражена через фундаментальные функции $\Phi^m(\tau)$, для определения которых указаны соответствующие способы, сходные с теми, что изложены в предыдущем разделе. В частности, точные аналитические значения $\Phi^m(\tau)$ получаются путем применения преобразования Лапласа к уравнениям, обобщающим (23). Обращение преобразования Лапласа в этом случае выполнено Д. И. Нагирнером [32]. Подробное изложение рассмотренной общей теории имеется в книге В. В. Соболева [33] (глава V).

Применение вероятностного метода с его обобщением на случай неизотропного рассеяния выполнено в работе И. Н. Минина [34]. В частности, получена следующая формула, аналогичная (18),

$$I(0, \eta) = \frac{1 - \nu(\eta)}{1 - \lambda}, \tag{44}$$

где $\nu(\eta)$ — плоское альбедо полубесконечной среды. Так же, как и в [31], найдена резольвента основного интегрального уравнения через функции $\Phi^m_{ik}(\tau)$, связанные с $\varphi^m_i(\eta)$. При этом оказывается, что функций $\Phi^m_{ik}(\tau)$ *больше*, чем $\Phi^m(\tau)$, так же, как функций $\varphi^m_i(\eta)$ *больше*, чем $H^m(\eta)$. Однако следует подчеркнуть, что решения различных конкретных задач находятся через $\Phi^m_{ik}(\tau)$ *проще*, чем через $\Phi^m(\tau)$, так же, как и через $\varphi^m_i(\eta)$ *проще*, чем через $H^m(\eta)$.

Слой конечной оптической толщины. Обобщение результатов В. А. Амбарцумяна [7] по решению задачи о диффузном отражении и пропускании света на случай анизотропного рассеяния света сделал С. Чандрасекар [8]. Были получены $\rho^m(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\sigma^m(\eta, \zeta, \tau_0)$ по схеме, обобщающей (35) и (36), через $\varphi^m_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi^m_i(\eta, \tau_0)$, а для определения вспомогательных функций — системы уравнений как обобщение (37) и (38). Затем введены функции $X^m(\eta, \tau_0)$ и $Y^m(\eta, \tau_0)$, уравнения для определения которых получаются из (37) и (38) заменой $\lambda/2$ на $\Psi^m(\zeta)$ под знаком интеграла.

Общая теория [35], включающая нахождение резольвенты, изложена в книге В. В. Соболева [33] (глава VI). Показано, что основное значение имеют функции $\Phi^m(\tau, \tau_0)$. К этому следует добавить, что свойства функций $H^m(\eta)$, $X^m(\eta, \tau_0)$ и $Y^m(\eta, \tau_0)$ подробно исследованы в книге И. Басбридж [36]. Там же решаются интегральные уравнения теории переноса излучения с ядрами, зависящими от модуля разности аргументов, методом Винера-Хопфа (при $\tau_0 = \infty$).

Вернемся, однако, к задаче о диффузном отражении и пропускании света плоским слоем. При рассмотрении этой задачи, как следует из сказанного, необходимо решать нелинейные уравнения для вспомогательных функций. Удается получить также *линейные интегральные уравнения* для определения как коэффициентов отражения и пропускания, так и вспомогательных функций. В случае полубесконечной среды эти уравнения имеют ядра типа Коши и их решения могут быть получены в явном виде. Основополагающие работы в этом направлении выполнил В. В. Соболев [37, 38]. В его книге [33] (глава VII) дано подробное изложение соответствующих результатов.

Представляет интерес решение задачи о рассеянии света плоским слоем, примыкающим к отражающей поверхности. В первую очередь, разумеется, следует иметь в виду применение к изучению атмосфер и поверхностей планет. Наиболее простой случай представляет ортотропная (ламбертовская) поверхность с заданной величиной альбедо A. Для этого случая В. В. Соболев [39] и Г. ван де Хюлст [40] получили формулы, связывающие коэффициенты яркости $\bar{\rho}(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ и $\bar{\sigma}(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ при $A > 0$ с коэффициентами яркости $\rho(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ при $A = 0$. Эти формулы имеют вид

$$\bar{\rho}(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) + \frac{A}{1 - AC(\tau_0)} \mu(\zeta, \tau_0) \mu(\eta, \tau_0), \tag{45}$$

$$\bar{\sigma}(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = \sigma(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) + \frac{A}{1 - AC(\tau_0)} \mu(\zeta, \tau_0) \nu(\eta, \tau_0), \tag{46}$$

где

$$\mu(\zeta, \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) \eta d\eta, \tag{47}$$

$$\nu(\zeta, \tau_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) \eta d\eta, \quad C(\tau_0) = 2 \int_0^1 \nu(\zeta, \tau_0) \zeta d\zeta. \tag{48}$$

Правда, в указанных работах формулы были выведены в случае изотропного рассеяния. Однако физический смысл вторых слагаемых в правых частях формул (45) и (46) позволяет написать общие формулы непосредственно, без дополнительного рассмотрения задачи. Аналогичные результаты получаются и для поля излучения внутри среды. В теории часто изучалась также задача с зеркальным отражением света. Подробности и результаты изложены в книге [33] (глава IV).

Неоднородная среда. Рассмотрим случай, когда от τ зависит не только λ, но и индикатриса рассеяния света. Тогда следует задать функцию $\lambda(\tau)$, а также $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$, ... $x_n(\tau)$. Для этой оптической модели плоского слоя коэффициенты отражения и пропускания могут быть выражены через вспомогательные функции, определенные уравнениями такого же типа, что и при изотропном рассеянии. Задача о диффузном отражении и пропускании света плоским неоднородным слоем при неизотропном рассеянии света решена в работе Э. Г. Яновицкого [41].

На этом мы заканчиваем обзор *точных аналитических результатов*, полученных в теории переноса монохроматического излучения для модели плоского слоя рассеивающей и поглощающей свет среды.

I.3. *Асимптотические формулы.* В некоторых предельных случаях, например, на больших оптических глубинах ($\tau \gg 1$) в полубесконечной среде или при большой оптической толщине слоя ($\tau \gg 1$) могут быть получены простые и весьма удобные для применения асимптотические формулы. Кстати говоря, именно в таких случаях обычно становится затруднительным решение приведенных выше строгих уравнений. Кроме того, указанные ситуации часто встречаются на практике. Другое направление асимптотической теории, тоже важное для применений, состоит в получении формул, относящихся к случаю малого истинного поглощения света элементарным объемом $(1-\lambda \ll 1)$.

Естественно, что асимптотические результаты в первую очередь были получены для изотропного рассеяния света. При этом на простейшем примере были выкристаллизованы основные способы их получения, а также выявлены возможности и сделаны оценки области применимости. Не останавливаясь подробно на этом случае, отметим главные работы, относящиеся к слою большой оптической толщины. Формулы для $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ были получены В. В. Соболевым [19], а затем им же [42] найдены асимптотики для $\Phi(\tau, \tau_0)$. Различные дополнительные сведения по этому вопросу можно найти в статье [26], а также в книге [27] (§ 8.5).

Асимптотические формулы при неизотропном рассеянии света были получены и подробно исследованы в основном за последнее десятилетие. Перейдем теперь к рассмотрению этих формул.

Полубесконечная среда. Задача о поле излучения в глубоких слоях полубесконечной среды была по существу рассмотрена В. А. Амбарцумяном уже в работе [28]. Затем он дал более подробный анализ в другой статье [43], которая обычно и считается начальной. Полученное основное соотношение — *уравнение Амбарцумяна* — имеет следующий вид:

$$i(\eta)(1-k\eta) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} p(\eta, \eta')\, i(\eta')\, d\eta', \tag{49}$$

где $p(\eta, \eta')$ — усредненная по азимуту индикатриса рассеяния света, $i(\eta)$ — интенсивность излучения (в относительных единицах) в направлении, образующем угол с внутренней нормалью к границе среды, косинус которого равен η. Кроме того, показано, что интенсивность излучения убывает с оптической глубиной τ по экспоненте с показателем $k\tau$. Отметим, что после разложения индикатрисы рассеяния света по полиномам Лежандра легко найти

$$p(\eta, \eta') = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i(\eta) P_i(\eta'). \tag{50}$$

Таким образом, функция $i(\eta)$ определяется из интегрального уравнения (49), а постоянная k — из условия разрешимости этого уравнения. Предложены различные методы решения уравнения Амбарцумяна [43—45], а в работе М. В. Масленникова [46] выполнено математическое исследование ряда вопросов, связанных с этим уравнением. Когда имеет место (50), решение сводится к нахождению коэффициентов b_i из однородной системы линейных алгебраических уравнений, а равенство нулю определителя этой системы дает возможность найти k. После этого решение записывается в виде

$$i(\eta) = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i b_i P_i(\eta)}{1 - k\eta}. \tag{51}$$

Наиболее простой и практичный способ состоит в получении из уравнения (49) зависимости $1 - \lambda$ от k и x_i в виде непрерывной дроби, а также определение коэффициентов по рекуррентной формуле. Таким путем В. М. Лоскутов [45] выполнил вычисления для сильно вытянутых индикатрис, когда n велико и традиционные методы применять трудно.

Следующим шагом было нахождение интенсивности $I(\tau, \eta, \zeta)$ при $\tau \gg 1$ в абсолютных единицах. Это сделано в статье В. В. Соболева [47] и в результате получено

$$I(\tau, \eta, \zeta) = Su(\zeta)\zeta i(\eta) e^{-k\tau}. \tag{52}$$

Надо иметь в виду, что при этом выводе использовались следующие, принятые в асимптотической теории, нормировки функций $i(\eta)$ и $u(\eta)$:

$$\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} i(\eta)\, d\eta = 1, \qquad 2\int_{0}^{1} u(\eta)\, i(\eta)\, \eta d\eta = 1. \tag{53}$$

Функция $u(\eta)$ может быть определена по формуле (42). Однако для дальнейшего оказалось необходимым получить некоторые новые соотношения [48]

$$i(-\eta) = 2\int_{0}^{1} \rho(\eta, \eta')\, i(\eta')\, \eta' d\eta', \tag{54}$$

$$i(\eta) = Mu(\eta) + 2\int_{0}^{1} \rho(\eta, \eta')\, i(-\eta')\, \eta' d\eta', \tag{55}$$

где

$$M = 2\int_{-1}^{+1} i^2(\eta)\, \eta d\eta, \tag{56}$$

$\rho(\eta, \eta')$ — осредненный по азимуту коэффициент яркости для диффузного отражения света полубесконечной средой. Соотношение (55) дает возможность найти $u(\eta)$ по известным $\rho(\eta, \zeta)$ и $i(\eta)$.

Исходя из результатов общей теории, можно утверждать, что при $\tau \gg 1$, где поле излучения не зависит от азимута, его свойства определяются функцией $\Phi^0(\tau)$. Большой интерес для применений представляет анализ перехода к асимптотическому режиму, основанный на исследовании, в частности, поведения азимутальных гармоник, коэффициенты при которых определяются функциями $\Phi^m(\tau)$ при $m \geqslant 1$. В работе А. С. Аниконова [49] получены асимптотики этих функций, которые обычно при $\tau \gg 1$ убывают по закону

$$\Phi^m(\tau) \sim \frac{e^{-\tau}}{\tau^{m+1}}, \tag{57}$$

значит гораздо быстрее, чем $\Phi^0(\tau)$, которые убывают по экспоненте с показателем $k\tau$ при $k < 1$. Впервые аналогичный результат был получен в случае $m = 1$ для простейшей несферической индикатрисы (не равен нулю только коэффициент x_1) в работе [34]. Однако исследование этого вопроса в общем случае сталкивается с большими математическими трудностями при анализе характеристического уравнения

$$T^m\left(\frac{1}{k}\right) = 0, \tag{58}$$

где

$$T^m(\zeta) = 1 - 2\zeta^2 \int_0^1 \frac{\Psi^m(\eta)}{\zeta^2 - \eta^2}\, d\eta, \tag{59}$$

а функция $\Psi^m(\eta)$ упоминалась при изложении общей теории. Поведение азимутальных гармоник интенсивности излучения в глубоких слоях изучается также в статье Ж. М. Длугач и Э. Г. Яновицкого [50].

Слой конечной оптической толщины. Пожалуй, наиболее важные результаты асимптотической теории состоят в получении формул для коэффициентов яркости плоского слоя при $\tau_0 \gg 1$. Эти формулы дают возможность находить искомые коэффициенты слоя *конечной* оптической толщины, используя только результаты, полученные для *полубесконечной* среды. Асимптотические формулы получены В. В. Соболевым [47] аналитическим путем, а Г. ван де Хюлстом [51] исходя из физических соображений. К установленному виду могут быть приведены формулы, найденные ранее Т. А. Гермогеновой [52]. Формулы имеют вид

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta, \varphi) - f_\rho(\tau_0)\, u(\eta)\, u(\zeta), \tag{60}$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = f_\sigma(\tau_0)\, u(\eta)\, u(\zeta), \tag{61}$$

где

$$f_\sigma(\tau_0) = \frac{Me^{-k\tau_0}}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}}, \qquad f_\rho(\tau_0) = f_\sigma(\tau_0)\, Ne^{-k\tau_0}, \tag{62}$$

а величина N определяется формулой

$$N = 2\int_0^1 u(\eta)\, i(-\eta)\, \eta\, d\eta. \tag{63}$$

Параметр k может быть найден, например, как решение уравнения (58). В нашем изложении он уже встречался неоднократно в ряде частных случаев. При решении уравнения Амбарцумяна (49) также получается значение k.

При практическом применении теории (например, к исследованию оптических свойств облачных слоев в атмосферах планет) часто приходится иметь дело с вышеупомянутым случаем малого истинного поглощения света элементарным объемом, когда $1 - \lambda \ll 1$. Это дает возможность еще более упростить формулы. Известны разложения для функций $i(\eta)$ и $u(\eta)$ по малым $1 - \lambda$ ([33], глава II)

$$i(\eta) = 1 + 3\eta\sqrt{\frac{1-\lambda}{3-x_1}}, \qquad u(\eta) = u_0(\eta)\left[1 - \frac{3}{2}\delta\sqrt{\frac{1-\lambda}{3-x_1}}\right], \tag{64}$$

где $u_0(\eta)$ — значение $u(\eta)$ при $\lambda = 1$, а величина δ определяется формулой

$$\delta = 4\int_0^1 u_0(\eta)\, \eta^2\, d\eta. \tag{65}$$

Имеем также

$$M = 8\sqrt{\frac{1-\lambda}{3-x_1}}, \qquad N = 1 - 3\delta\sqrt{\frac{1-\lambda}{3-x_1}}, \tag{66}$$

где с той же степенью точности принято $k = \sqrt{(3 - x_1)(1 - \lambda)}$. Разложения величины k и функции $i(\eta)$ могут быть значительно продвинуты до высоких степеней $1 - \lambda$. В то же время для $u(\eta)$ кроме (64) пока точных результатов нет. Некоторые новые формулы, связанные с этим кругом вопросов, получены в работе И. Н. Мельниковой и И. Н. Минина [53].

Интересную работу выполнил В. В. Иванов [54], рассмотревший задачу о поле излучения в оптически толстом слое, примыкающим к поверхности, отражающей свет по произвольному закону. Оказывается, что в частном случае ортотропной (ламбертовской) поверхности полученные формулы по виду существенно отличаются от формул, найденных традиционным путем. Заметим, что в статьях [53, 54] рассматривалось также поле излучения внутри слоя вдали от границ при $\tau \gg 1$ и $\tau_0 - \tau \gg 1$. В последнее время некоторые асимптотики для слоя конечной оптической толщины в случае неизотропного рассеяния получил О. В. Пикичян [55].

Неоднородная среда. Подробное изучение особенностей поля излучения в полубесконечной неоднородной среде выполнил Э. Г. Яновицкий [56]. В частности, найдены формулы, определяющие поле излучения в глубоких слоях ($\tau \gg 1$) при малом истинном поглощении света ($1 - \lambda \ll 1$), а также коэффициент отражения, альбедо, функция пропускания и некоторые другие величины. Ранее [57] были получены формулы для величин $\rho(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ и $\lambda = 1$. Они имеют вид

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta, \varphi) - \frac{4u_0(\eta)\, u_0(\zeta)}{(3 - \overline{x}_1)\tau_0 + 3\delta}, \tag{67}$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{4u_0^*(\eta)\, u_0(\zeta)}{(3 - \overline{x}_1)\tau_0 + 3\delta}, \tag{68}$$

где

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} x_1(\tau)\, d\tau, \qquad \delta = 2\int_0^1 [u_0(\eta) + u_0^*(\eta)]\, \eta^2 d\eta, \tag{69}$$

а функция $u_0^*(\eta)$ находится для „перевернутого“ слоя.

1.4. *Некоторые специальные задачи. Перенос поляризованного излучения.* При строгом рассмотрении процессов рассеяния света и отражения от поверхности необходимо учитывать состояние поляризации излучения. Оказывается, в большинстве случаев пренебрежение этим обстоятельством мало влияет на общую интенсивность излучения. Поэтому развитая теория не нуждается в значительной коррекции, но тем не менее исследование переноса поляризованного излучения представляет большой интерес. Дело в том, что анализ состояния поляризации излучения вносит дополнительную информацию о физических свойствах рассеивающей среды и отражающей поверхности.

Первые работы в этом направлении были выполнены В. В. Соболевым [58] и С. Чандрасекаром [8]. Задача рассматривалась для случая закона рассеяния Рэлея. Новые существенные результаты получил Х. Домке [59], который исследовал также более общий случай матрицы рассеяния света [60]. Подробное изложение основ теории переноса поляризованного излучения содержится в книге С. Чандрасекара [8]. Некоторые дополнительные сведения можно найти в книгах В. В. Соболева ([14], глава V; [33], глава IX).

Перенос излучения в многослойной среде. Естественным обобщением модели однородного плоского слоя рассеивающей и поглощающей свет среды служит модель неоднородного слоя. Однако при этом необходимо задавать изменение оптических свойств по всей толщине и в теоретическом рассмотрении здесь иногда трудно достичь обобщающих результатов. С другой стороны, для применений часто полезно избегать излишней детализации и рассматривать модель слоя, в котором можно выделить ряд однородных слоев. Простейший случай состоит в анализе модели из двух смежных слоев с различными оптическими свойствами. Такая задача рассматривалась в ряде работ и приводит к сложным соотношениям. В общем виде для случая неизотропного рассеяния света уравнения получены недавно в работе А. К. Колесова [61], из которой видны трудности практической реализации такого подхода.

Строгие асимптотические формулы получены в работах Т. А. Гермогеновой и Н. В. Коновалова [62] и В. В. Иванова [63] для системы оптически толстых слоев, позволяющие сравнительно просто находить характеристики поля излучения на границах и внутри каждого слоя. Возникающие при этом функции и соотношения аналогичны тем, которые характерны для асимптотической теории в случае одного слоя, но получение соответствующих простых явных выражений встречается с трудностями.

Метод последовательных приближений. Наиболее простой способ решения интегральных уравнений теории переноса излучения — метод последовательных приближений — по физической сущности состоит в представлении поля многократно рассеянного света в виде суммы компонент различной кратности рассеяния. Математически этому соответствует разложение решения интегрального уравнения в ряд Неймана. Так, например, решение уравнения (29) будет иметь вид

$$B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n B_n(\tau). \tag{70}$$

Очевидно, что когда λ мало или когда оптическая толщина слоя невелика, этот ряд быстро сходится и метод весьма эффективен. Однако, если λ близко к единице (а так часто бывает на практике!), сходимость ряда очень медленная и использование такого способа оказывается затруднительным.

Все же в последнее время интерес к этому направлению возродился в связи с тем, в частности, что удается получать при больших n в простой асимптотической форме соответствующие члены разложения, например, $B_n(\tau)$. Задачи такого рода обсуждаются в статьях Г. ван де Хюлста [64], В. В. Иванова и Ш. А. Сабашвили [65] и В. В. Иванова [66].

Рассеяние света в шаре. До сих пор мы рассматривали перенос излучения только в плоских слоях. Задача о многократном изотропном рассеянии света в однородном шаре по математической структуре уравнений сходна с задачей о плоском слое. Поэтому в ряде работ известные методы для плоского слоя успешно применяются к анализу свечения шара (например, в работе В. В. Соболева [67]). Оказывается, что значения ряда величин представляются через фундаментальную функцию $\Phi(\tau)$. Рассеяние света в шаре при произвольном распределении источников исследовал также Н. Б. Енгибарян [68].

Если не ограничиваться однородными средами, то важное значение имеет задача о рассеянии света в сферической планетной атмосфере. Уравнения и их приближенные решения получены в работах В. В. Соболева и И. Н. Минина ([33], глава XI). Кстати говоря, в задачах о многократном рассеянии света в оптически неоднородных средах возникает вопрос о рефракции. Анализ роли рефракции выполнен в статье И. Н. Минина [69].

Заканчивая раздел о переносе монохроматического излучения, заметим, что кроме строгих аналитических решений, о которых шла речь, найдены также приближенные решения. Уже в начальных работах К. Шварцшильда [1], А. Шустера [2] и А. Эддингтона [4] сформулированы методы, которые затем были обобщены и развиты другими исследователями. Подробное изложение полученных результатов можно найти в книгах С. Чандрасекара [8] и В. В. Соболева ([14], глава X; [33], глава VIII). Авторы этих книг внесли существенный вклад в развитие приближенных аналитических методов теории переноса монохроматического излучения. Построением приближенных аналитических решений задачи о монохроматическом изотропном рассеянии света в плоском слое недавно вновь занимался М. А. Мнацаканян [70].

Как точные, так и приближенные методы широко используются в различных применениях теории. В особенности это относится к исследованию атмосфер планет. Сама теория продолжает развиваться на прочном фундаменте изложенных основных принципов и идей. Так, внутренние поля излучения в полубесконечных атмосферах недавно снова изучались в работе В. В. Иванова [71] с применением новых соотношений инвариантности. Получены, в частности, обобщения формул (54) и (55), а также указана простая возможность для практического расчета интенсивности на произвольной оптической глубине. Аналогичные результаты независимо от этой работы найдены Н. Б. Енгибаряном и М. А. Мнацаканяном [72].

Недавно Р. Рыым [73] использовал строгое аналитическое решение В. В. Соболева [35] для составления практического алгоритма расчета характеристик многократно рассеянного света в плоском слое рассеивающей и поглощающей среды при произвольной индикатрисе, в частности, сильно вытянутой вперед. Было показано, что такой метод дает хорошие результаты. Значение этого факта несомненно и знаменует собой достижение качественно нового уровня развиваемой теории, когда она начинает эффективно использоваться.

Новые возможности открываются в самом аппарате теории. Так, например, в работе Э. Х. Даниеляна и М. А. Мнацаканяна [74] получено выражение для интенсивности излучения в полубесконечной атмосфере с изотропным рассеянием непосредственно через функцию источника без интегрирования по оптической глубине.

II. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ С ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПО ЧАСТОТАМ

Одним из важнейших разделов теоретической астрофизики является *теория звездных спектров*, поскольку большинство наших сведений о звездах получено именно путем изучения их спектров. Теория звездных спектров в сущности основывается на исследовании процессов *переноса излучения в плазме*. Такие же задачи возникают и при изучении других астрофизических объектов: планетарных туманностей, расширяющихся оболочек звезд, межзвездной среды, планетных атмосфер, квазаров и т. д.

Однако при этом оказывается, что теория переноса излучения в частотах спектральных линий и полос не может основываться на модели монохроматического переноса, на что указал еще в 1929 г. А. Эддингтон. Дальнейшими исследованиями было установлено, что в действительности при элементарном акте рассеяния происходит *перераспределение излучения по частотам*. При этом конкретные обстоятельства указанного перераспределения обуславливаются рядом физических причин. Поэтому в задаче о многократном рассеянии кроме изменения направления полета и возможного поглощения фотон при каждом элементарном акте рассеяния еще изменяет частоту. Это значительно усложняет теорию, которая получила развитие уже на основе общих приемов и способов, разработанных в исследовании более простого случая — переноса монохроматического излучения.

II.1. *Основы теории.* Здесь мы будем рассматривать не физическую теорию элементарного акта рассеяния, а математическую теорию многократного рассеяния. Именно эта часть и относится в сущности к теории переноса излучения в рассматриваемом аспекте. Поскольку речь пойдет об аналитической теории, то следует ввести ограничение: будет рассмотрен только случай *полного перераспределения* излучения по частотам, при котором вероятность излучения фотона данной частоты элементарным объемом не зависит от того, какой частоты фотон был им поглощен.

Пионерские работы в развитии этого раздела, основанные на использовании точных аналитических методов и связанные с астрофизическими применениями, выполнил В. В. Соболев [75—77]. Сначала исследовалась задача о переносе L_α-излучения в планетарной туманности, расширяющейся с градиентом скорости [75], а затем [76, 77] было получено точное решение задачи об образовании линий поглощения в звездных спектрах. Подробное изложение этих работ, а также работ других авторов, относящихся к начальному периоду развития данного раздела теории, содержится в книге В. В. Соболева [14] (глава VIII).

Основное интегральное уравнение, возникающее в теории переноса излучения с полным перераспределением по частотам, имеет общий вид (29), ядро которого $K(\tau)$ приводится к форме (30). Первоначальный вид ядра уравнения следующий:

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)\tau]\, dx, \tag{71}$$

где $E_1(\tau)$ определяется формулой (2), $\alpha(x)$ — безразмерный коэффициент поглощения света в спектральной линии, x — безразмерная частота, а величина A определяется соотношением

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\, dx = 1. \tag{72}$$

Отсюда вытекает, что математическая структура главных соотношений теории и основные методы решения различных задач могут быть взяты из общей теории решения уравнений вида (29), которую мы уже рассматривали на примере переноса монохроматического излучения. Это, конечно, не означает, что в развитии теории не было сложных задач и конкретных трудностей. Дело в том, что поведение ядра (71) существенно отличается, например, от поведения ядра (2). Так, если (2) при $\tau \gg 1$ убывает по экспоненте с ростом τ, то ядро (71) для доплеровской формы коэффициента $\alpha(x)$ имеет в тех же условиях вид

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{4\sqrt{\pi}\,\tau^2\sqrt{\ln \tau}}. \tag{73}$$

В другой форме отличие случаев переноса монохроматического излучения и переноса излучения с полным перераспределением по частотам может быть выражено в том, что поведение функции $\overline{\Phi}(s)$, являющейся преобразованием Лапласа от функции $\Phi(\tau)$, в комплексной области существенно различается. Это главным образом выражается в том, что первому случаю соответствует $\overline{\Phi}(s)$, имеющая самой правой особенностью полюс, а не правый конец линии ветвления, как обнаруживается во втором случае. Тем не менее к настоящему времени достигнут большой прогресс в решении сформулированной задачи.

Итоги проделанной работы по применению общих аналитических методов к получению точных и асимптотических результатов для уравнений с ядрами (71) подведены в книге В. В. Иванова [27]. Значительная часть приведенных результатов получена автором книги, а также Д. И. Нагирнером. Следует подчеркнуть, что в изложении полученные математические результаты часто сопровождаются истолкованием физического содержания с учетом того, что особенности полей излучения возникают при взаимодействии с веществом. Это определяет пользу проведенного исследования для дальнейших конкретных применений к задачам астрофизики.

Простейший случай здесь можно проиллюстрировать на таком примере. При прохождении слоя оптической толщины τ_0 в случае переноса монохроматического излучения фотон в среднем испытывает τ_0^2 рассеяний, тогда как при полном перераспределении (доплеровский вид коэффициента поглощения) всего $\tau_0\sqrt{\ln\tau_0}$. Это объясняется возможностью для фотона при перераспределении перейти в крыло линии, где среда более прозрачна. Эффект «проскальзывания» на большие расстояния в частотах крыльев линий — основной феномен, связанный с переносом излучения, когда имеется перераспределение по частотам.

Отмеченная математическая полнота исследования основана на ряде упрощений, отвлечении от возможных конкретных ситуаций. Например, в книге [27] не рассматривается случай неоднородных сред.

II.2. *Перенос излучения в неоднородных средах.* Случай переноса излучения с перераспределением по частотам в неоднородной среде изучен пока сравнительно мало. Можно указать работу Д. И. Нагирнера и К. И. Селякова [78], в которой рассмотрен перенос излучения в линии при условии, что профиль коэффициента поглощения меняется с глубиной. Недавно появилась новая работа, выполненная В. В. Соболевым и Э. Г. Яновицким [79]. В ней рассмотрен перенос излучения в спектральной линии в атмосфере, где отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту поглощения зависит от оптической глубины. При решении этой задачи применяется общий подход, разработанный для случая уравнений вида (29). Следует, однако, иметь в виду, что после вынесения за знак интеграла

$\lambda(\tau)$, чему соответствует условие задачи, получится более сложный вид уравнения, нежели (29). Поэтому сначала предстояло сделать обобщение известного способа.

Выполнив это, авторы статьи [79] рассмотрели также некоторые частные вопросы. Так, для случая переноса излучения в изотермической атмосфере исследован вопрос о степени возбуждения атомов. Найден также профиль спектральной линии для излучения, выходящего из атмосферы.

II.3. *Перенос излучения в движущихся средах.* Еще один фактор — движение — часто необходимо учитывать при решении астрофизических задач, связанных с переносом излучения в спектральных линиях. Это обусловлено эффектом Доплера при дифференциальном движении различных областей рассматриваемой среды. Исследование переноса излучения при полном перераспределении по частотам в движущихся средах было начато В. В. Соболевым [75]. Затем он же сформулировал основные уравнения этого раздела теории [80]. Решением такого рода задач занимались в последнее время В. В. Витязев [81] и С. И. Грачев [82]. Полученные результаты были применены к изучению планетарных туманностей и квазаров.

Заканчивая раздел, заметим, что астрофизические применения часто связаны с отдельными спектральными линиями (например, перенос излучения в частотах линии L_α). Однако, например, в исследовании атмосфер планет дело усложняется тем, что появляется необходимость рассматривать перенос излучения в частотах сложных молекулярных полос. Обобщением теории на один из таких случаев занимался Г. М. Швед [83].

Нельзя не отметить еще одну работу, по постановке задачи не связанную с темой этого раздела, выполненную В. В. Ивановым и А. Г. Хейнло [84]. В ней рассматривается лучистое равновесие несерых атмосфер. Напомним, что серая атмосфера это такая модель, в которой постулируется коэффициент поглощения, не зависящий от частоты излучения. В этом случае задача сводится к решению уравнения (1). В работе [84] соответствующее уравнение имеет ядро типа (30), причем функция $A(y)$ определяется конкретной моделью частотной зависимости коэффициента поглощения. Оказалось, что полученное уравнение по форме (и не случайно) совпадает с соответствующим уравнением консервативного рассеяния фотонов в спектральной линии при полном перераспределении по частотам. Уместно также отметить, что работа [84] в некотором смысле связана с исследованиями В. А. Амбарцумяна [85] и А. И. Лебединского [86].

III. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ

В настоящее время хорошо известно, что явления нестационарности в различных объектах Вселенной не представляют исключения, а довольно широко распространены. Поэтому естественным шагом в развитии теории переноса излучения было начало разработки методов для изучения нестационарных процессов. К тому же достигнутые успехи в решении задач о стационарном свечении составили прочную основу для этого. В одном случае даже оказалось необходимым рассматривать нестационарное свечение при решении вопросов, связанных со стационарным полем излучения. Речь идет о формировании спектров поглощения в частотах сложных молекулярных полос, неразрешимых на отдельные компоненты. Существо дела состоит в том, что решение задачи о нестационарном свечении одновременно позволяет получить функцию, дающую распределение фотонов по длинам пробега в среде.

Теория нестационарных процессов переноса излучения состоит из двух разделов. В первом из них рассматривается случай, когда оптические свойства среды с течением времени не изменяются. Исследование такого случая составляет предмет теории нестационарного поля излучения. Другой раздел включает изучение переноса излучения в средах, оптические свойства которых изменяются с течением времени.

III.1. *Основы теории.* Систематическое рассмотрение вопросов теории нестационарного поля излучения было начато В. В. Соболевым [14] (глава IX). Сначала в теорию были введены параметры, определяющие длительность пребывания фотона в среде: t_1 — среднее время пребывания фотона в поглощенном состоянии и t_2 — среднее время, проводимое фотоном в пути между двумя последовательными рассеяниями. Очевидно, что для определения порядка величины среднего времени пребывания фотона в среде следует умножить $t_1 + t_2$ на среднее число рассеяний, испытываемое фотоном при распространении в среде. Если полученная длительность мала по сравнению со временем заметного изменения источников (внутренних и внешних), а также свойств среды, то можно считать, что поле излучения стационарно. В других случаях необходимо рассмотрение нестационарных процессов переноса излучения.

Далее В. В. Соболев подробно изучил случай модели одномерной среды, часто используемой в теории переноса излучения для предварительного анализа существенных особенностей решений в особо сложных задачах Это делалось не только в теории нестационарного переноса, но также в случае переноса излучения с перераспределением по частотам. При решении задач в указанных работах применялись как обычные уравнения переноса излучения, так и вероятностный подход, который оказался здесь весьма эффективным. При получении точных аналитических решений было применено преобразование Лапласа по времени.

Затем в работах И. Н. Минина [87—89] использовалось то обстоятельство, что преобразование Лапласа по времени легко находится, когда известно соответствующее решение задачи о стационарном свечении. Если ввести обозначения

$$u = \frac{t}{t_1 + t_2}, \quad \beta_1 = \frac{t_1}{t_1 + t_2}, \quad \beta_2 = \frac{t_2}{t_1 + t_2}, \tag{74}$$

где t — время, то из уравнения переноса излучения находится следующее соотношение:

$$\overline{I}_\delta(\tau, \eta, \varphi, s, \lambda) = I\left|\tau(1 + \beta_2 s), \eta, \varphi, \frac{\lambda}{(1 + \beta_1 s)(1 + \beta_2 s)}\right|, \tag{75}$$

где $I(\tau, \eta, \varphi, \lambda)$ — интенсивность излучения в полубесконечной среде при стационарном свечении на оптической глубине τ в направлении, составляющим с нормалью к слоям угол, косинус которого равен η, и имеющим азимут φ, s — параметр преобразования Лапласа по безразмерному времени u, $\overline{I}_\delta(\tau, \eta, \varphi, s, \lambda)$ — преобразование Лапласа от искомой интенсивности излучения $I_\delta(\tau, \eta, \varphi, u, \lambda)$. Принято, что воздействие источников освещения среды носит импульсный характер в форме δ — функции Дирака. Если слой имеет конечную оптическую толщину τ_0, то при получении преобразования Лапласа по схеме (75) следует также заменить τ_0 на $\tau_0(1 + \beta_2 s)$. Для более сложной геометрии так надо поступать со всеми оптическими расстояниями, входящими в решение задачи. Здесь мы для простоты привели случай однородных сред.

Обращение преобразования Лапласа удается получить в общем виде для одномерной среды, что дает точное решение задачи в явном виде [87, 88]. Случай неизотропного рассеяния света в одномерной среде исследовал В. П. Гринин [90]. При изучении трехмерных сред [89] находятся обобщения различных функциональных соотношений, имеющихся в теории переноса излучения при стационарном свечении. Рассмотрим теперь более подробно некоторые выводы теории нестационарного поля излучения.

III.2. *Нестационарное поле излучения*. Свойства преобразования Лапласа дают возможность легко получать некоторые общие важные результаты. Так, например, удается выразить интенсивность излучения при наличии поглощения света в среде ($\lambda < 1$) через интенсивность излучения в чисто рассеивающей среде ($\lambda = 1$). Строгие связи такого рода имеются в трех случаях: $\beta_1 = 1$ ($\beta_2 = 0$); $\beta_2 = 1$ ($\beta_1 = 0$); $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$. Результат при $\beta_1 = 1$ другим, неформальным путем, с использованием вероятностной трактовки исследованных процессов, нашел В. Ю. Теребиж [91].

Далее, простая процедура получается из (75) для нахождения временных моментов интенсивности излучения. Следует продифференцировать по s известную правую часть равенства необходимое число раз, а затем положить $s = 0$. Разумеется, при практическом выполнении таких действий могут возникать конкретные трудности, но важно то, что имеется общий и строгий подход.

Пожалуй, наиболее важным действием следует считать получение асимптотических результатов при $u \gg 1$. Особенно простая процедура может быть указана для $\lambda = 1$. Дело в том, что разложению по малым s преобразованной функции соответствует разложение решения о стационарном свечении по малым $1 - \lambda$. Так что, заменяя $1 - \lambda$ на s и произведя обращение преобразования Лапласа, находим поведение искомой величины при $u \gg 1$. Подробный анализ вопросов, связанных с асимптотическими свойствами различных величин, выполнен в статье В. В. Иванова и С. Д. Гутшабаша [92].

Обзоры результатов, полученных в теории нестационарного поля излучения, содержатся в статьях И. Н. Минина [93, 94]. В первой из них приведены некоторые применения теории к исследованию нестационарного свечения звезд. В работах Н. Б. Енгибаряна [95] для решения задачи о получении распределения по времени вероятности диффузного отражения фотона от неоднородной среды использован принцип инвариантности.

III.3. *Перенос излучения в нестационарных средах.* Для астрофизических применений теории представляет интерес исследование переноса излучения в нестационарных средах. Уравнения, определяющие поле излучения в нестационарных средах, можно получить обычными способами, применяемыми в теории переноса излучения. Однако нахождение точных аналитических решений этих уравнений представляет большие трудности. Решения получены лишь для одномерной полубесконечной среды. При этом в одном случае считалось, что граница среды движется, а в другом — что оптическая глубина в каждой точке среды изменяется с течением времени по экспоненциальному закону.

Свечение среды с движущейся границей исследовалось в работе С. А. Каплана, И. А. Климишина и В. Н. Сиверса [96]. Использован вероятностный метод, оказавшийся чрезвычайно полезным в решении задач такого рода. Постановка вопросов в [96] возникла при изучении свечения на фронте ударной волны, распространяющейся в межзвездном газе. Затем В. В. Леонов [97] при исследовании вопросов, связанных с излучением новой звезды после отрыва оболочки, использовал аналогичную модель и получил некоторые точные решения.

Задача о диффузном отражении излучении от плоского неоднородного слоя нестационарной среды рассматривалась Н. Б. Енгибаряном [98] с применением принципа инвариантности.

Наконец, в статье И. Н. Минина [99] рассмотрен нестационарный плоский слой с изотропным рассеянием света. Сначала принято, что оптическая глубина каждого элемента объема изменяется с течением времени произвольным образом, а затем особо исследован случай экспоненциального закона. Там же указаны результаты, полученные раньше для одномерной среды.

Заканчивая обзор работ по теории *нестационарного* переноса излучения, заметим, что в изложении рассматривался только перенос монохроматического излучения. Разработанные способы успешно применяются также и к случаю переноса излучения с перераспределением по частотам. Полный обзор работ, связанных с нестационарным переносом излучения, выполнен Д. И. Нагирнером [100]. Там же указаны статьи, в которых сделаны применения к решению задач астрофизики.

* * *

Обзор содержит анализ развития основных направлений теории переноса излучения, в которых существенные результаты получены представителями *ленинградской школы*. Сравнительно мало говорится о соотношении этих работ с прогрессом мировой науки в рассматриваемой области знания, хотя такие связи существуют и непрерывно расширяются. В итоге можно сказать, что основные методы разработаны и главные результаты в теории уже получены. Однако назначение теории, развитие которой определялось постановкой соответствующих задач астрофизики, состоит в том, чтобы служить средством для исследования различных объектов Вселенной. В настоящее время в связи с открывшимися новыми возможностями получения наблюдательного материала (и даже новыми объектами исследования) намечается оживление и в области применений теории к анализу конкретных объектов и происходящих в них процессов и явлений.

В качестве примера можно указать на исследования полей излучения в атмосферах планет, ведущиеся на кафедре физики атмосферы Ленинградского университета. Кстати говоря, наиболее впечатляющие успехи в развитии теории переноса излучения за последнее время связаны именно с вопросами, характерными для решения задач оптики планетных атмосфер.

Таким образом, *теория переноса излучения*, которую сейчас уже можно считать *классическим разделом математического естествознания*, служит делу эффективного развития астрофизического знания.

Ленинградский государственный
университет

THE LENINGRAD SCHOOL OF THE THEORY OF RADIATIVE TRANSFER

I. N. MININ

A review of publications on the theory of radiative transferas a section of theoretical astrophysics has been made. The attention has been concentrated on the results obtained by the scientists of the Leningrad University Astronomical Observatory. Monochromatic radiative transfer, radiative transfer with frequency redistribution and nonstationary radiative transfer are considered. Papers describing fundamental ideas and new methods have been specially pointed out. Results of primary importance for further development of the theory and its applications have been presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Schwarzschild*, Göttinger Nachr., 41, 1, 1906.
2. *A. Schuster*, Ap. J., 21, 1, 1905.
3. *E. A. Milne*, M. N., 81, 361, 1921.
4. *A. S. Eddington*, Internal Constitution of the Stars, Cambridge, 1926.
5. *О. Д. Хвольсон*, Изв. Петербургской Академии наук, 33, 221, 1890.
6. *В. А. Амбарцумян*, Астрон. ж., 19, 30, 1942.
7. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
8. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
9. *R. Bellman*, "Transport Theory", Am. Math. Soc., Providence, 1969.
10. *В. А. Фок*, Математ. сб., 14 (56), 3, 1944.
11. *E. Hopf*, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, 1934.
12. *В.В. Соболев*, Астрон. ж., 28, 355, 1951.
13. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, 8, 149, 1948.
14. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
15. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 116, 45, 1957.
16. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
17. *В. В. Соболев*, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 11, 39, 1958.
18. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 36, 573, 1959.
19. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
20. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 120, 69, 1958.
21. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 111, 1000, 1956.
22. *R. E. Bellman, R. E. Kalaba*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 42, 629, 1956.
23. S. *Ueno*, Ap. J., 132, 729, 1960.
24. *I. W. Busbridge*, Ap. J, 133, 198, 1961.
25. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, Ереван, 1960.
26. *M. A. Heaslet, R. F. Warming*, Astrophys. Space Sci., 1, 460, 1968.
27. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
28. *В. А. Амбарцумян*, Уч. зап. ЛГУ, № 82, 64, 1941.
29. *В. А. Амбарцумян*, ЖЭТФ, 13, 323, 1943.

30. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 43, 106, 1944.
31. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 46, 512, 1969.
32. *Д. И. Нагирнер*, Астрон. ж., 41, 669, 1964.
33. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
34. *И. Н. Минин*, Астрон. ж., 43, 1244, 1966; 45, 264, 1968.
35. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 5, 343, 1969.
36. *I. W. Busbridge*, Mathematics of Radiative Transfer, Cambridge, 1960.
37. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 69, 353, 1949.
38. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 69, 547, 1949.
39. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 61, 803, 1948.
40. *H. C. van de Hulst*, Ap. J., 107, 220, 1948.
41. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 38, 912, 1961.
42. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 316, 1964.
43. *В. А. Амбарцумян*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 6, 97, 1942.
44. *В. В. Соболев*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 8, 273, 1944.
45. *В. М. Лоскутов*, Вести. ЛГУ, № 13, 143, 1969.
46. *М. В. Масленников*, Труды Математического ин-та АН СССР, т. 97, 1968.
47. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 179, 41, 1968.
48. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 184, 318, 1969.
49. *А. С. Аниконов*, Астрон. ж., 50, 137, 1973.
50. *Ж. М. Длугач, Э. Г. Яновицкий*, Изв. АН СССР, сер. физ. атмосф. и океана, 13, 699, 1977.
51. *H. C. van de Hulst*, Bull. Astron. Inst. Netherl., 20, 77, 1968.
52. *Т. А. Гермогенова*, Журн. вычислит. мат. и мат.-физ., 1, 1001, 1961.
53. *И. Н. Мельникова, И. Н. Минин*, Изв. АН СССР, сер. физ. атмосф. и океана, 13, 254, 1977.
54. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 53, 589, 1976.
55. *О. В. Пикичян*, Астрофизика, 16, 351, 1980.
56. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 55, 713, 1084, 1978.
57. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 48, 323, 1971.
58. *В. В. Соболев*, Уч. зап. ЛГУ, № 116, 3, 1949.
59. *Х. Домке*, Астрон. ж., 48, 341, 777, 1971.
60. *Х. Домке*, Астрофизика, 10, 205, 1974.
61. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 12, 83, 1976.
62. *Т. А. Гермогенова, Н. В. Коновалов*, Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 14, 928, 1974.
63. *В. В. Иванов*, Труды Астрон. обс. ЛГУ, 32, 3, 1976.
64. *H. C. van de Hulst*, Astron. Astrophys., 9, 374, 1970.
65. *В. В. Иванов, Ш. А. Сабашвили*, Астрофизика, 9, 333, 1973.
66. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 10, 193, 1974.
67. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 8, 197, 1972.
68. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 8, 149, 1972.
69. *И. Н. Минин*, Изв. АН СССР, сер. физ. атмосф. и океана, 9, 829, 1973.
70. *М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 16, 513, 1980.
71. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 52, 217, 1975.
72. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 217, 533, 1974.
73. *Р. Рыым*, Труды Тартуской обс., 1979, стр. 3—39.
74. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 101, 1975.
75. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 21, 143, 1944.

76. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 26, 129, 1949.
77. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 31, 231, 1954.
78. *Д. И. Нагирнер, К. И. Селяков*, Астрофизика, 11, 61, 1975.
79. *В. В. Соболев, Э. Г. Яновицкий*, в сб. «Вопросы физики и эволюции космоса», Ереван, 1978, стр. 359.
80. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 694, 1957.
81. *В. В. Витязев*, Астрофизика, 8, 235, 1972.
82. *С. И. Грачев*, Астрофизика, 14, 111, 1978.
83. *Г. М. Швед*, Астрон. ж., 51, 841, 1974.
84. *В. В. Иванов, А. Г. Хейнло*, Астрон. ж., 52, 1252, 1975.
85. *V. Ambarzumian*, Publ. de l'Observatoire Astron. de l'Université de Leningrad 6, 7, 1936.
86. *А. И. Лебединский*, Уч. зап. ЛГУ, № 31, 152, 1939.
87. *И. Н. Минин*, Вестн. ЛГУ, № 13, 137, 1959.
88. *И. Н. Минин*, Вестн. ЛГУ, № 19, 124, 1962.
89. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 154, 1059, 1964.
90. *В. П. Гринин*, Астрофизика, 7, 203, 1971.
91. *В. Ю. Теребиж*, Астрофизика, 4, 141, 1968.
92. *В. В. Иванов, С. Д. Гутшабаш*, Изв. АН СССР, сер. физ. атмосф. и океана, 10, 851, 1974.
93. *И. Н. Минин*, в сб. «Теория звездных спектров», Наука, М., 1966, стр. 159.
94. *И. Н. Минин*, в сб. «Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света», Наука и техника, Минск, 1971, стр. 59.
95. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 167, 1965; 2, 197, 1966.
96. *С. А. Каплан, И. А. Климишин, В. Н. Сиверс*, Астрон. ж., 37, 9, 824, 1960.
97. *В. В. Леонов*, Астрофизика, 6, 89, 1970.
98. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 2, 267, 1966.
99. *И. Н. Минин*, Вестн. ЛГУ, № 7, 122, 1971.
100. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 10, 445, 1974.