АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17 АВГУСТ, 1981 ВЫПУСК 3

УДК 524.3—1/—8

О ЗАКОНЕ ДВИЖЕНИЯ СИЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ОБОЛОЧКАХ ЗВЕЗД

И. А. КЛИМИШИН, Б. И. ГНАТЫК

Поступила 3 сентября 1980
Принята к печати 25 мая 1981

На основании проведенных авторами расчетов предложены аппроксимационные формулы для определения скорости ударной волны, движущейся в неоднородной звездной оболочке. Обсуждены возможности использования в космической газодинамике приближенных аналитических методов Бринкли—Кирквуда и Уизема.

1. *Введение*. На протяжении уже многих лет теория ударных волн (УВ) используется для объяснения явлений самых различных масштабов — от атомных взрывов в земной атмосфере до вспышек Сверхновых и активности ядер галактик. Для расчета параметров нестационарных УВ, движущихся в неоднородных средах, разработан ряд аналитических и численных методов. Среди первых наибольшую известность получили автомодельный метод [1, 2], а также приближенные методы Бринкли-Кирквуда [3—5], Чизнелла [6, 5] и Уизема [7, 5]. Наиболее эффективным численным методом решения уравнений космической газодинамики, позволяющим, в частности, определять параметры ударных волн, если таковые в процессе движения возникают, является метод конечных разностей или метод сеток [8]. При этом расчет газодинамической задачи численным методом требует значительно больших затрат труда и времени, тогда как использование методов Бринкли-Кирквуда (Б-К), Чизнелла (Ч) или Уизема (У) сводится к численному интегрированию обычных дифференциальных уравнений.

Вместе с тем при решении некоторых конкретных астрофизических задач расчет параметров УВ, движущихся в заданной среде, является промежуточным результатом, на основании которого делаются дальнейшие исследования, причем существующая почти всегда некоторая условность исходной модели делает ненужной очень высокую точность решения этой промежуточной задачи. Поэтому представляет особый интерес установление аппроксимационных формул, которыми с достаточной степенью точности и можно было бы описать движение нестационарных ударных волн в среде с заданным распределением плотности.

Из анализа, проведенного различными авторами (см., например, обзор [9]), следовало, что в случае экстремально сильных УВ методы Б-К, Ч и У дают следующую зависимость скорости УВ D от геометрической координаты r и плотности среды $\rho(r)$:

$$D = C\rho^{-a} r^{-b}, \tag{1}$$

где показатели степеней a и b являются некоторыми функциями параметров γ (отношения удельных теплоемкостей) и N ($N = 0$, 1, 2 соответственно для плоской, цилиндрической и сферической УВ). Постоянная C определяется из условия, что $D = D_0$ при $r = r_0$ и $\rho = \rho(r_0) = \rho_0$. В частности, при $\gamma = 5/3$ имеем

$$a_{\text{БК}} = 0.273, \quad b_{\text{БК}} = b_{\text{У}} = 0.25\,N; \quad a_{\text{Ч, У}} = 0.236, \quad b_{\text{У}} = 0.225\,N,$$

тогда как в случае $\gamma = 4/3$ (главную роль за фронтом УВ играют эффекты излучения)

$$a_{\text{БК}} = 0.265, \quad b_{\text{БК}} = b_{\text{У}} = 0.244\,N; \quad a_{\text{Ч, У}} = 0.207. \quad b_{\text{Ч}} = 0.187\,N.$$

Исходя из этого, в 1967 г. С. А. Каплан [10] предложил следующую аппроксимационную формулу для расчета скорости экстремально сильной сферической УВ:

$$D = C(\rho r^2)^{-1/4}. \tag{2}$$

Принимая, однако, во внимание, что методы Б-К, Ч и У в случае политропной оболочки дают завышенное значение скорости УВ [4], С. А. Каплан еще в 1973 г. предложил авторам этой статьи попытаться установить закон движения УВ в неоднородной среде, используя численные методы, и на этом основании еще раз сопоставить различные приближенные методы, устанавливая тем самым условия их применимости при решении конкретных задач космической газодинамики. Это и было сделано нами после того, как в нашем распоряжении оказалась достаточно мощная ЭВМ. Результаты проведенных расчетов и обобщений и излагаются ниже.

2. *Расчеты*. При расчетах были рассмотрены три различных случая распределения плотности в неоднородной среде:

1) оболочка со степенным законом изменения плотности

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^m, \quad m_* = m = -\frac{d \ln \rho}{d \ln r}, \tag{3}$$

2) политропная оболочка

$$\rho = \rho_{00} \left(\frac{1-r}{r}\right)^n, \quad m_* = \frac{n}{1-r}, \tag{4}$$

3) экспоненциальная атмосфера

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{r-r_0}{H}\right), \quad m_* = \frac{r}{H}. \tag{5}$$

Здесь r — расстояние от центра звезды, r_0 — начальное положение фронта УВ, H — масштабная высота (r, r_0 и H выражены в единицах радиуса звезды), ρ_{00} — постоянная, n — индекс политропы. Вводя величину m_*, мы стремимся подчеркнуть тот факт, что в случае любого закона изменения плотности в окрестности точки r_* плотность ρ можно аппроксимировать степенной зависимостью $\rho = \rho(r_*) (r_*/r)^{m_*}$.

В каждом из случаев 1—3 предполагалось, что сильная УВ образуется в результате кратковременного движения поршня по направлению к внешним слоям звезды. Параметры УВ находились сначала численным методом, потом методами Бринкли-Кирквуда и Уизема. Для численного решения уравнений газодинамики использован метод конечных разностей с ведением искусственной вязкости, разностная схема аналогична описанной в [11]. Уравнения методов Б-К и У решались методом Рунге-Кутта с использованием начальных данных, полученных численным методом на момент остановки поршня.

Анализ проведенных расчетов показал, что 1) сильная УВ движется ускоренно, если $m_* = -(d \ln \rho)/(d \ln r) > N+1$, т. е. в сферическом случае при $m_* > 3$, и замедленно при $m_* < N+1$, и 2) закон движения сильной УВ в неоднородной среде с распределением плотности типа (3)–(5) можно аппроксимировать выражением

$$D = C(\rho r^{N+1})^{-1/2} \tag{6а}$$

для замедляющихся волн и

$$D = C(\rho r^{N+1})^{-1/5} \tag{6б}$$

для ускоряющихся УВ. Используя обозначение $m_* = -(d \ln \rho)/(d \ln r)$, можно формулы (6а) и (6б) в окрестностях произвольной точки r_* записать в виде

$$\frac{d\ln D}{d\ln r}=\alpha=\begin{cases}\dfrac{m_*-(N+1)}{2}, & m_*<N+1,\\[2mm] \dfrac{m_*-(N+1)}{5}, & m_*>N+1.\end{cases} \tag{7}$$

Если $m_*=\text{const}$, то выражения (7) можно использовать наравне с (6) для установления соотношения между скоростями УВ в произвольных точках r_1 и r_2. Сравнивая (6б) с (1), находим: $a_{(6)}=0.2$; $b_{(6)}=0.2(1+N)$.

3. *Результаты.* Вот некоторые результаты, на основании которых были получены аппроксимационные формулы (6а) и (6б).

а) *Движение УВ в оболочке звезды, плотность которой описывается степенным законом.* Из автомодельного решения, полученного Л. И. Седовым [1] для точечного взрыва в среде, плотность которой изменяется по закону (3), следует $\alpha_A=(d\ln D)/(d\ln r)=(m-(N+1))/2$, причем упомянутое решение может быть использовано при $m<(N+1)$. С другой стороны, из соотношения (2) имеем $\alpha_K=(m_*-N)/4$ и, следовательно, аппроксимация (2) вообще не может быть использована при $m_*<N+1$, в частности, при $m_*=0$.

Результаты наших расчетов приведены в табл. 1 и для случая $m=5$ — на рис. 1. Здесь $\alpha(6)$, $\alpha(2)$, $\alpha_{ЧМ}$, $\alpha_{БК}$ и $\alpha_У$ — соответствующие значения параметра $\alpha=(d\ln D)/(d\ln r)$, полученные из аппроксимаций (6) и (2), методом конечных разностей (ЧМ), методом Бринкли-Кирквуда (БК) и, наконец, методом Уизема (У). Так как метод Чизнелла дает практически одинаковую с методом Уизема зависимость скорости УВ D от плотности среды ρ, то расчеты этим методом не проводились.

Таблица 1

m	$\alpha(6)$	$\alpha(2)$	$\gamma=5/3$			$\gamma=4/3$		
			$\alpha_{ЧМ}$	$\alpha_{БК}$	$\alpha_У$	$\alpha_{ЧМ}$	$\alpha_{БК}$	$\alpha_У$
0	−1.50	−0.50	−1.54	−1.63	−0.45	−1.53	−1.66	−0.37
2	−0.50	0.00	−0.52	−0.47	0.02	−0.51	−0.54	+0.04
3	0.00	0.25	−0.07	−0.02	0.26	−0.04	−0.13	0.25
4	0.20	0.50	0.20	0.48	0.49			
5	0.40	0.75	0.40	0.78	0.73			
6	0.60	1.00	0.60	1.10	0.97	0.60	1.00	0.87

Как видно, результаты численного расчета неплохо согласуются с аппроксимационными формулами (6а)—(6б) и соответствуют автомодельному решению в области его применимости ($m < N + 1$). Некоторое отличие вызвано неточностью проведенных нами расчетов (ограничение счетного времени и возможностей ЭВМ «Минск-32»). На результаты расчета влияет также перестройка режима движения УВ после остановки поршня.

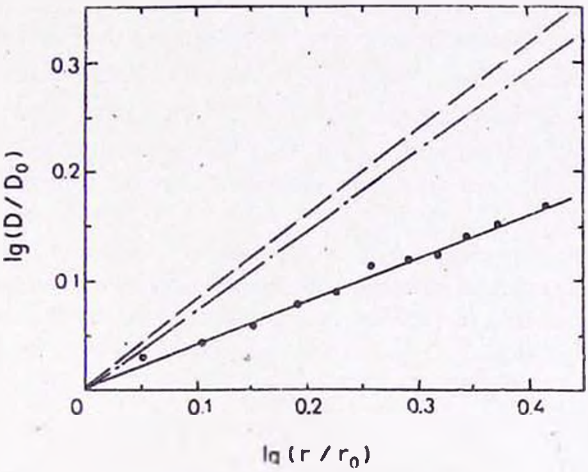

Рис. 1. Зависимость скорости сильной сферической ударной волны от расстояния в оболочке, плотность в которой изменяется по закону $\rho = \rho_0 (r_0/r)^m$, при $m = 5$. Черные кружки — результаты расчета численным методом, штриховая линия — методом Бринкли-Кирквуда, штрих-пунктирная — методом Уиземa, сплошная линия — предлагаемая аппроксимация (65).

Из расчетов следует, что метод БК полностью применим в случае $m \leqslant N + 1$, то есть для замедляющихся УВ. Это понятно, так как метод Б-К разработан для однородной среды. Но так как на проведение расчета методом Б-К расходуется примерно в 50 раз меньше машинного времени, чем при расчетах ЧМ, то можно ожидать, что метод Б-К и в дальнейшем будет полезным при решении отдельных астрофизических задач. То же обстоятельство, что при $m > N + 1$ он дает уже неверные результаты — скорость УВ оказывается существенно завышенной по сравнению с ее истинным значением, нетрудно устранить введением в основное дифференциальное уравнение метода Б-К некоторых «нормирующих коэффициентов», как это будет видно из нашей следующей заметки.

С другой стороны, скорость УВ, найденная по методу Уизема, не соответствует результату численного расчета ни при каких m — она всегда завышена, хотя и несколько меньше, чем получается по методу Б-К.

Очевидно, что записанные здесь выводы имеют общий характер, то есть они пригодны в случае сред с произвольным законом изменения плотности, так как любой закон изменения плотности в окрестности некоторой точки r_*, как уже отмечалось, можно аппроксимировать степенным законом.

б) *Движение УВ в политропной оболочке.* Для случая движения сильных УВ во внешних слоях политропы (плоская задача: $N=0$, $r \approx 1$, так что $m_* = n/(1-r) \gg 1$) автомодельное решение дает следующее значение параметра α в законе (1): при $\gamma = 5/3$ $\alpha_A = 0.214$, если $n = 3.25$ (лучистая оболочка) и $\alpha_A = 0.22$ при $n = 1.5$ (конвективная оболочка). При $\gamma = 4/3$ имеем соответственно 0.185 и 0.191. Таким образом, в области значений параметра γ, представляющих астрофизический интерес $(4/3 \leqslant \gamma \leqslant 5/3)$, эти решения довольно хорошо аппроксимируются формулой (6б).

Анализ задачи о распространении УВ, возникающей во внешних слоях политропы в результате кратковременного движения поршня, был дан в работе [4], результаты наших расчетов показаны на рис. 2. Как видно, ме-

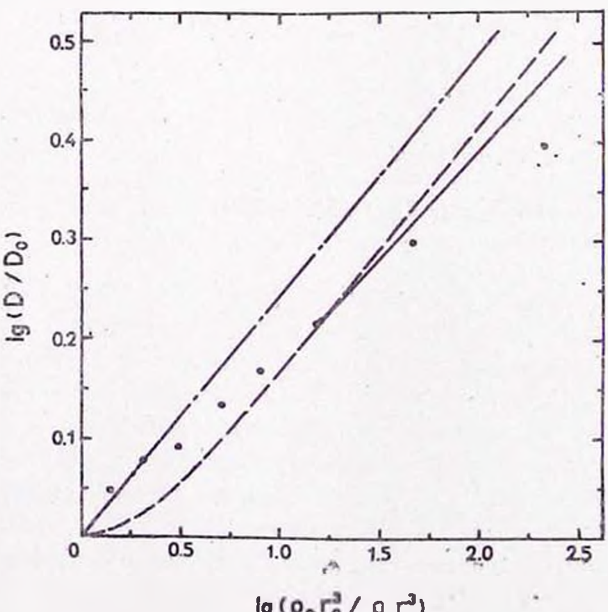

Рис. 2. Изменение скорости сильной сферической ударной волны, движущейся в политропной оболочке индекса $n = 3.25$. Сплошная линия — ход автомодельного решения в области его применения, остальные обозначения как и на рис. 1.

тоды Б-К и У дают завышенные, по сравнению с автомодельным, значения скорости УВ. Численный же метод соответствует показателю степени α соотношения (1), равному $\alpha_{ЧМ} = 0.17$. Это занижение параметра α, по-видимому, связано с неточностью расчетов (которые начинались с расстояния $r \approx 0.8$), так как во внешних слоях звезды ширина фронта УВ становится сравнимой с характерным масштабом изменения плотности. Поэтому и в данном случае аппроксимацию (6) следует считать вполне удовлетворительной.

в) *Движение УВ в атмосфере с экспоненциальным законом изменения плотности.* Распространению УВ в атмосфере с распределением плотности по закону (5) посвящено много работ (см. обзоры в [2, 12, 13]). В частности, было установлено, что коэффициент a, входящий в соотношение (1), равен при $\gamma = 5/3$: $a_А = 0.204$, $a_{ЧМ} = 0.195$, $a_У = 0.236$, тогда как при $\gamma = 4/3$ путем интерполяции данных работы [13] можно получить: $a_А = 0.164$, $a_{ЧМ} = 0.165$, $a_У = 0.207$.

Результаты проведенных нами расчетов движения сферической УВ в экспоненциальной атмосфере показаны на рис. 3. Как видно, результаты, полученные ЧМ, аппроксимируются прямой с наклоном $a_{ЧМ} = 0.18$, что близко к значению 0.20, следующему из соотношения (6б). Но при $\gamma = 4/3$ более подходит аппроксимация $D = C\,(\rho r^3)^{-1/6}$.

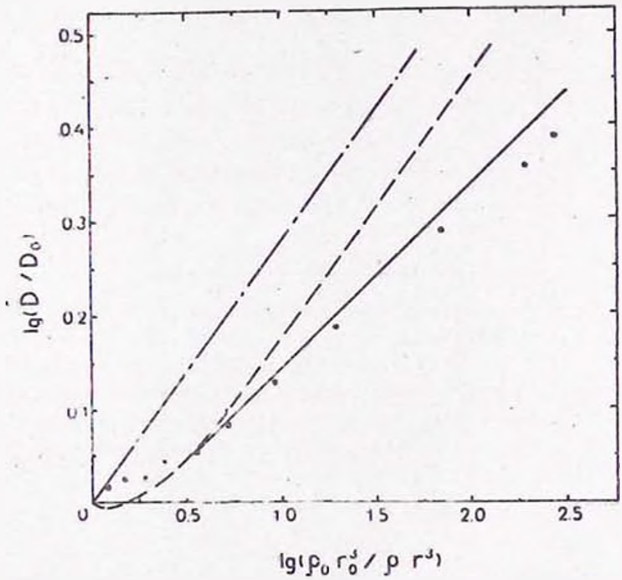

Рис. 3. Изменение скорости сильной сферической ударной волны в атмосфере с экспоненциальным законом изменения плотности. Сплошная линия — аппроксимация (6б), остальные обозначения как и на рис. 1.

Здесь также уместно привести результат расчета движения плоской УВ в экспоненциальной атмосфере (рис. 4). Масштабная высота принята нами равной $H = 150$ км, скорость движения поршня $u = 30$ км/с, продолжительность движения поршня $t = 2$ с. Таким образом, смещение поршня составляет всего $0.4\ H$. Между тем переход УВ на режим свободного ускоренного движения происходит лишь при $z = h/H \approx 4$.

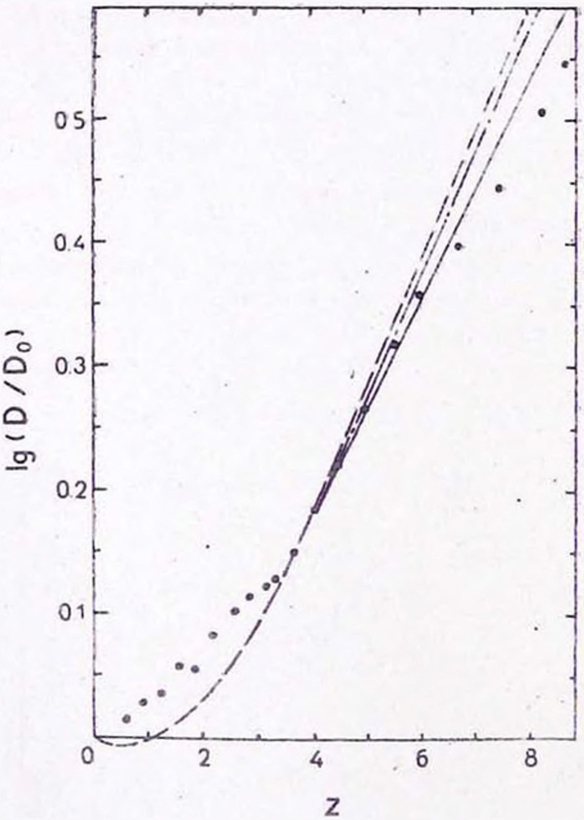

Рис. 4. Изменение скорости сильной плоской ударной волны в атмосфере с экспоненциальным законом распределения плотности. Автомодельное решение (сплошная линия) и решение методом Уизема (штрих-пунктирная линия) построены от точки пересечения численного решения (черные кружки) с решением по методу Бринкли-Кирквуда (штриховая линия).

Резюмируя вышеизложенное, отметим, что, как показывают расчеты, для оценки скорости ударной волны, движущейся в неоднородной космической среде, в частности, в оболочке звезды, с достаточной степенью точности можно пользоваться аппроксимацией (6).

Примечание при корректуре. Уместно подчеркнуть, что, как и в [1], соотношения (6а)—(6б) и (7) получены в предположении о центральном взрыве. Поэтому они, в частности, адекватно описывают движение сильной сферической УВ от *центра* звезды к ее поверхности. В этом случае координата фронта УВ r и координата r, которой определяется изменение плотности среды, являются одной и той же. Если же УВ возникла под действием поршня, движение которого началось с некоторого начального расстояния r_0 от центра звезды, то формула (6б) примет вид

$$D(R) = \mathrm{const}\,[\rho(R)\,R\,(R + r_0)^N]^{-a},$$

где $R = r - r_0$ — расстояние УВ от места взрыва. Как и раньше, $a = 1/2$ и $1/5$ соответственно для замедляющейся $\left(\text{при } m(R) = -\dfrac{d \ln \rho(R)}{d \ln R} < 1 + N\dfrac{R}{R + r_0}\right)$ и ускоряющейся $\left(\text{при } m(R) > 1 + N\dfrac{R}{R + r_0}\right)$ УВ. Подробнее эти результаты будут обсуждены в следующей заметке авторов.

Ивано-Франковский пединститут,
ИППМиМ АН УССР, Львов

THE LAW OF MOVEMENT OF STRONG SHOCK WAVES IN STELLAR ENVELOPES

I. A. KLIMISHIN, B. I. GNATYK

On the basis of calculations that were carried out by the authors the approximate formulae for the determination of the velocity of shock wave moving in nonuniform stellar envelopes are proposed. The use in cosmic gasdynamic of approximate analytical methods of Brinkley-Kirkwood and Whithem are discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. И. Седов,* Методы подобия и размерности в механике, Наука, М., 1977.
2. *Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер,* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Наука, М., 1966.
3. *S. R. Brinkley, J. G Kirkwood,* Phys. Rev., 71, 606, 1947.
4. *Д. К. Надежин, Д. А. Франк-Каменецкий,* Астрон. ж., 42, 290, 1965.
5. *І. А. Климишин,* Ударні хвилі в неоднорідних середовищах, изд. Львовск. ун-та, 1972.
6. *R. F. Chisnell,* Proc. Roy. Soc, A232, 350, 1955.
7. *G. B. Whithem.* J. Fluid Mech., 4, 337, 1958.
8. *А. А. Самарский, Ю. П. Попов,* Разностные схемы газовой динамики, Наука, М., 1975.
9. *J. Hazlehurst,* Adv. Astron. Astrophys., 1, 3, 1962.
10. *С. А. Каплан,* Астрон. ж., 44, 384, 1967.
11. *Д. К. Надежин, Д. А. Франк-Каменецкий,* Вопросы космогонии, 10, 154, 1964.
12. *Х. С. Кестенбойм, Г. С. Росляков, Л. А. Чудов,* Точечный взрыв, Наука, М., 1974.
13. *Г. Броуд,* в сб. «Расчеты взрывов на ЭВМ», Мир, М., 1976.