АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17 ФЕВРАЛЬ, 1981 ВЫПУСК 1

УДК 52.3/-7

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНСЕРВАТИВНОГО АНИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ

1. *Введение.* Линейно-анизотропное рассеяние с индикатрисой

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma \tag{1}$$

зачастую может служить хорошим приближением к реальному закону рассеяния, достаточно правильно отражая при этом свойства решений задач анизотропного рассеяния. В качестве примера такого рода укажем на предложенную В. А. Амбарцумяном [1] интерпретацию закона рассеяния Ламберта, гласящего о независимости отражательной способности «белой поверхности» от направлений. Рассматривая функцию отражения от полубесконечной среды при законе рассеяния (1) в консервативном случае $\lambda = 1$, В. А. Амбарцумян показал, что, усредненная по азимуту, она в точности совпадает с функцией отражения при изотропном рассеянии. Последняя же удовлетворительно объясняет закон Ламберта.

Усредненная по азимуту индикатриса (2) представима в виде [2]:

$$p(\eta, \zeta) = 1 + x_1 \eta \zeta, \tag{2}$$

где η и ζ обозначают косинусы углов, отсчитываемых от нормали к границе плоского слоя. При этом функция

$$K(\eta, \zeta) = \varphi_0(\eta) + x_1 \varphi_1(\eta) \zeta, \tag{3}$$

обобщающая φ функцию Амбарцумяна изотропного рассеяния, в консервативном случае оказывается тождественно совпадающей с последней [1]

$$\varphi_0(\eta) \equiv \varphi(\eta), \quad \varphi_1(\eta) \equiv 0, \quad \lambda = 1. \tag{4}$$

Фактически, отмеченное В. А. Амбарцумяном свойство независимости функции отражения $R(\eta, \zeta)$ от вытянутости индикатрисы x_1 для консервативных сред является следствием свойства (4) — независимости функции $K(\eta, \zeta)$ от коэффициента x_1 при $\lambda = 1$.

Величину $(\lambda/2) K(\eta, \zeta)$ можно интерпретировать как вероятность того, что квант, поглощенный на границе полубесконечной среды (в направлении ζ), выйдет из нее в направлении η. В известном смысле величина $R(\eta, \zeta)$ является ее обобщением: в изотропном случае $(\lambda/2)\varphi(\eta) = R(\eta, 0)$.

Зададимся вопросом о наиболее общей по постановке задаче, решение которой обладает указанной особенностью — независимостью от степени вытянутости индикатрисы x_1. Имеется в виду, понятно, случай консервативного рассеяния, а интересующие нас величины подразумеваются усредненными по азимутальному углу. Множество явных и неявных примеров независимости решений от x_1 содержится в книге В. В. Соболева [3].

В данной заметке мы покажем, что, в общем случае, свойством независимости от x_1 обладает функция, равная сумме угловых распределений излучений, выходящих с обеих границ плоскопараллельного однородного слоя любой оптической толщины при произвольном распределении в нем первичных источников. Под первичными источниками мы понимаем как поглощенные, так и летящие в разных направлениях внутри слоя и на границах первичные кванты. Мы обсудим также случай индикатрисы более общего вида (9), а также другие азимутальные гармоники решений (п. 5).

2. *Полубесконечная среда.* В работе [4] введено понятие оператора инвариантности $\tilde{G}$, на основе которого построен математический аппарат, позволяющий непосредственно получать решения задач о выходящем из среды излучении при различных первичных источниках. Оператор $\tilde{G}$ описывает то изменение в распределении выходящего излучения, которое происходит при добавлении к среде бесконечно тонкого слоя.

В [4] же показано, что решение всякой задачи о выходящем излучении однозначно определяется заданием оператора $\tilde{G}$. Последний для линейных задач является линейным интегральным оператором, ядро которого выражается через обобщенную функцию Амбарцумяна. Например, для полубесконечной среды при анизотропном рассеянии оно имеет вид:

$$G(\eta, \zeta) = \frac{\delta(\eta - \zeta)}{\eta} - \frac{\lambda}{2} \frac{K(\eta, \zeta)}{\zeta}. \tag{5}$$

Поскольку в консервативном случае функция $K(\eta, \zeta)$ для линейно-анизотропного рассеяния совпадает с функцией $\varphi(\eta)$ для изотропного рассеяния, то отсюда следует, что решение произвольной консервативной задачи о выходящем из полубесконечной среды излучении при линейно-анизотропном рассеянии в точности совпадает с решением той же задачи при изотропном рассеянии.

3. *Слой конечной толщины*. Как отмечено в работах автора [5, 6], для произвольного распределения первичных источников, распределение $j^{\pm}(\eta)$ излучения, выходящего с одной или другой границы слоя толщины τ_0, связано с распределением излучения $J^{\pm}(\eta)$, выходящего через границу полубесконечной среды, при том же или обратном распределении первичных источников в пограничном слое толщиной τ_0, уравнениями

$$
\begin{aligned}
J^{+}(\eta) &= j^{+}(\eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, j^{-}(\mu)\, d\mu, \\
J^{-}(\eta) &= j^{-}(\eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, j^{+}(\mu)\, d\mu.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Здесь $Z(\tau, \eta, \mu)$ — поверхностная функция Грина полубесконечной среды — вероятность того, что квант, летящий на глубине τ в глубь среды в направлении μ, выйдет через границу среды в направлении η.

Складывая уравнения (6) друг с другом, находим

$$
S(\eta) = s(\eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, s(\mu)\, d\mu, \tag{7}
$$

где обозначено $S = J^{+} + J^{-}$, $s = j^{+} + j^{-}$.

Поскольку заданием характеристик Z и S полубесконечной среды из уравнения (7) однозначно определяется и величина $s(\eta)$ для слоя толщины τ_0, то из сформулированного в предыдущем пункте для полубесконечной среды правила вытекает более общее правило для слоя произвольной толщины: в консервативном случае, при любых первичных источниках, суммарное распределение излучений $s(\eta) = j^{+}(\eta) + j^{-}(\eta)$, выходящих с обеих границ слоя, при линейно-анизотропном рассеянии совпадает с таковым для изотропного рассеяния.

Следует отметить, что аналогичное заключение для разности этих величин $h(\eta) = j^{+}(\eta) - j^{-}(\eta)$ из уравнений (6) сделать нельзя, поскольку соответствующее уравнение, следующее из (6) вычитанием,

$$
H(\eta) = h(\eta) - \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, h(\mu)\, d\mu, \tag{8}
$$

при $\lambda = 1$ вырождается, коль скоро при этом норма оператора $\hat{Z}$ обращается в 1. Иначе имела бы место независимость от x_1 величин $j^+(\eta)$ и $j^-(\eta)$ в отдельности, однако рассмотрение простейшего примера отражения и пропускания тонким слоем показывает, что это не так.

4. *Среднее число рассеяний.* Уравнение (7) справедливо для произвольного значения аргумента η, а не только $\eta \leqslant 1$, в частности, и при $\eta \to \infty$. В этом случае величина $s(\infty)$ дает нам решение задачи о среднем числе рассеяний кванта в слое при заданных первичных источниках (безотносительно к тому, с какой границы выходит квант). Кстати, можно показать, что, при любом λ, $h(\infty) = 0$. Мы приходим к замечательному выводу: среднее число рассеяний кванта в слое конечной толщины при консервативном линейно-анизотропном рассеянии равно среднему числу рассеяний кванта при консервативном изотропном рассеянии.

5. *Общие заключения.* Итак, мы доказали следующее правило для консервативно рассеивающего слоя конечной оптической толщины: при любом распределении первичных источников усредненная по азимуту сумма угловых распределений излучений, выходящих с обеих границ слоя, при линейно-анизотропном рассеянии совпадает с таковой для изотропного рассеяния. Другими словами, эта сумма не зависит от степени вытянутости индикатрисы x_1. Можно показать, что в последней формулировке правило действует и в более общем случае произвольной индикатрисы, представимой в виде конечного ряда по полиномам Лежандра:

$$p(\eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i(\eta) P_i(\zeta). \tag{9}$$

Возникает вопрос, является ли независимость $s(\eta)$ от x_1 отличительной особенностью только этого коэффициента, или аналогичное правило может быть верным и для других коэффициентов x_r разложения (9)?

Можно доказать следующее общее правило: независимость $s(\eta)$ от значения коэффициента x_r (r фиксировано) имеет место только в том случае, когда предыдущий коэффициент x_{r-1} удовлетворяет условию

$$\lambda x_{r-1} = 2r - 1. \tag{10}$$

Однако, поскольку $\lambda \leqslant 1$ и, как известно, имеет место неравенство [3]: $x_i < 2i + 1$ при всех $i > 0$, то условие (10) не может выполняться ни для какого r, за исключением $r = 1$. И в этом случае равенство (10), $\lambda x_0 = 1$, может достигаться только при $\lambda = 1$, так как, независимо от значения λ, согласно условию нормировки индикатрисы, $x_0 = 1$.