АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17 ФЕВРАЛЬ, 1981 ВЫПУСК 1

УДК 52-3/-7

ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОЙ АТМОСФЕРЕ ПРИ АНИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ. СООТНОШЕНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

Э. Г. ЯНОВИЦКИЙ

Поступила 6 февраля 1979
Принята к печати 7 января 1981

Рассматривается плоская атмосфера оптической толщины τ_0, освещенная параллельными лучами. Получено соотношение инвариантности для приведенной функции источника $D(\tau, \mu, \tau_0)$ (см. (3)) и рассмотрены его следствия. Частными случаями соотношения (3) являются аналоги принципов инвариантности Чандрасекара. Дана модификация метода удвоения слоев ван де Хюлста, позволяющая непосредственно рассчитывать функции $X(\mu)$ и $Y(\mu)$. Показано, что с помощью модифицированного метода удвоения можно также легко рассчитать поле излучения внутри слоя. При этом не требуется решать какие-либо уравнения или использовать итерационную процедуру.

Настоящая статья является непосредственным продолжением предыдущей [1], где было выполнено разделение угловых переменных для приведенной интенсивности излучения в плоской однородной атмосфере конечной оптической толщины. Там же была дана схема этапов вычисления поля излучения в плоском слое. В настоящей работе мы получим соотношения инвариантности для приведенной функции источника и приведенной интенсивности и рассмотрим некоторые их следствия. Одно из них есть «векторная» модификация нового метода [2] численного расчета интенсивности излучения в плоском слое. Этот метод подробно описан в конце статьи. В заключение сделаны некоторые пояснения и библиографические замечания, относящиеся как к первой [1], так и ко второй частям настоящей работы.

Обозначения оставлены прежними. Ссылки вида (I. п) означают формулу (п) из [1].

1. *Соотношения инвариантности для псевдоуравнения переноса.* Соотношения инвариантности нового типа, сформулированные на основании физических соображений в работах Н. Б. Енгибаряна, М. А. Мнацаканяна [3] и В. В. Иванова [4], в качестве частных случаев дали ряд важных результатов и, что самое главное, новую неитерационную схему расчета поля излучения в полубесконечных средах [4]*. Для псевдоуравнения переноса мы уже не можем воспользоваться простыми физическими соображениями для записи соотношения инвариантности и получим его формально непосредственно из уравнения (I.7) так же, как это было сделано нами в случае полубесконечной среды [5]. Затем рассмотрим некоторые частные случаи.

Возвратимся к уравнению (I.7). Введем параметр $\tau_1 \geqslant 0$ и параметр $t\,(0 \leqslant t \leqslant \tau_1)$. Тогда это уравнение можно переписать так:

$$D(\tau + t, \mu_0; \tau_0 + \tau_1) = \int\limits_0^{\tau_0+\tau_1} D(\tau', \mu_0; \tau_0 + \tau_1)\, K(|\tau + t - \tau'|)\, d\tau' + \frac{\lambda}{4} e^{-(\tau+t)/\mu_0}. \tag{1}$$

Проведя замену $z = \tau' - t$, после несложных преобразований с использованием формул (I.13) и (I.14), вместо (1) получим

$$\begin{gathered}
D(\tau+t, \mu_0; \tau_0 + \tau_1) = \int\limits_0^{\tau_0} D(\tau' + t, \mu_0; \tau_0 + \tau_1)\, K(|\tau - \tau'|)\, d\tau' + \\
+ \int\limits_0^1 J(t, \mu, \mu_0; \tau_0 + \tau_1)\, e^{-\tau/\mu}\, \Psi(\mu)\, d\mu + \\
+ \int\limits_0^1 J(\tau_0 + t, -\mu, \mu_0; \tau_0 + \tau_1)\, e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\mu}}\, \Psi(\mu)\, d\mu + \frac{\lambda}{4} e^{-(\tau+t)/\mu_0}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Сопоставляя (2) и (I.7), с помощью принципа суперпозиции после переобозначения переменных будем иметь

$$\begin{gathered}
D(\tau + t, \mu_0; \tau_1) = D(\tau, \mu_0; \tau_0) e^{-t/\mu_0} + \\
+ \frac{4}{\lambda} \int\limits_0^1 D(\tau, \mu; \tau_0)\, J(t, \mu, \mu_0; \tau_1)\, \Psi(\mu)\, d\mu + \\
+ \frac{4}{\lambda} \int\limits_0^1 D(\tau_0 - \tau, \mu; \tau_0)\, J(\tau_0 + t, -\mu, \mu_0; \tau_1)\, \Psi(\mu)\, d\mu,
\end{gathered} \tag{3}$$

* Заметим, что формула сложения [3, 4], судя по всему, впервые была получена в работе Шимицу и Мизута [21].

где $\tau_1 \geqslant \tau_0$; $0 \leqslant t \leqslant \tau_1 - \tau_0$; $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$. Это и есть искомое соотношение инвариантности в терминах приведенной функции источника. С помощью (I.13) и (I.14) из (3) легко получается также соотношение инвариантности в терминах приведенной интенсивности. Именно

$$
\begin{aligned}
J(\tau + t, \mu, \mu_0; \tau_1) &= J(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)\, e^{-t/\mu_0} + \\
&+ J(t, \mu, \mu_0; \tau_1)\, e^{-\tau/\mu}\theta(\mu) + J(\tau_0 + t, \mu, \mu_0; \tau_1)\, e^{(\tau_0-\tau)/\mu}\theta(-\mu) + \\
&+ \frac{4}{\lambda}\int_0^1 J(\tau, \mu, \mu', \tau_0)\, J(t, \mu', \mu_0; \tau_1)\, \Psi(\mu')\, d\mu' + \\
&+ \frac{4}{\lambda}\int_0^1 J(\tau_0 - \tau, -\mu, \mu'; \tau_0)\, J(\tau_0 + t, -\mu', \mu_0; \tau_1)\, \Psi(\mu')\, d\mu',
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $\theta(\mu)$ — единичная функция скачка: $\theta(\mu)=1$ $(\mu \geqslant 0)$; $\theta(\mu)=0$ $(\mu < 0)$.

Рассмотрим теперь частные случаи. Полагая в (3) $\tau = 0$ и переобозначая $t = \tau$, с учетом (1.13), (1.14), (1.33) имеем

$$
\begin{aligned}
D(\tau, \mu, \tau_1) &= \frac{\lambda}{4} X(\mu, \tau_0)\, e^{-\tau/\mu} + \int_0^\tau D(\tau', \mu; \tau_1)\, L(\tau - \tau', \tau_0)\, d\tau' + \\
&+ \int_{\tau_0+\tau}^{\tau_1} D(\tau', \mu; \tau_1)\, M(\tau' - \tau - \tau_0, \tau_0)\, d\tau',
\end{aligned} \tag{5}
$$

где

$$
M(x, y) = \int_0^1 e^{-x/\mu}\, Y(\mu, y)\, \frac{d\mu}{\mu}. \tag{6}
$$

Аналогично, полагая в (3) $\tau = \tau_0$ и переобозначая $t = \tau$, получаем

$$
\begin{aligned}
D(\tau_0 + \tau, \mu; \tau_1) &= \frac{\lambda}{4} Y(\mu, \tau_0)\, e^{-\tau/\mu} + \\
&+ \int_0^\tau D(\tau', \mu; \tau_1)\, M(\tau - \tau', \tau_0)\, d\tau' + \\
&+ \int_{\tau_0+\tau}^{\tau_1} D(\tau', \mu; \tau_1)\, L(\tau' - \tau - \tau_0, \tau_0)\, d\tau'.
\end{aligned} \tag{7}
$$

В уравнениях (5) и (7) $\tau_1 \geqslant \tau_0$; $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 - \tau_0$. Поэтому оба упомянутых уравнения совместно определяют функцию $D(\tau, \mu; \tau_1)$ на всем интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$. Ядерные функции (5) и (7) находятся после решения граничной задачи для слоя толщины $\tau_0 \leqslant \tau_1$. В частности, при $\tau_0 = 0$ из (5) и (7) следует основное уравнение (I.7). Кроме того, если положить в (5) $\tau = \tau_1 - \tau_0$, а в (7) $\tau = 0$, то придем соответственно к уравнениям (I.31) и (I.33).

Заметим также, что с помощью (I.42) из (5) и (7) можно получить ряд новых уравнений, определяющих функцию Соболева $\Phi(\tau, \tau_0)$; некоторые из них заметно проще уравнения, приводимого в [6] (гл. VI, § 3).

Перейдем теперь к соотношению (4). Полагая в нем поочередно $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, переобозначая $t = \tau$, при учете (I.21) для $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ соответственно получаем

$$\begin{aligned} J(\tau, -\mu, \mu_0; \tau_1) &= r(\mu, \mu_0; \tau_0) e^{-\tau/\mu_0} \mu_0 + \\ &+ J(\tau_0 + \tau, -\mu, \mu_0; \tau_1) e^{-\tau_0/\mu} + \\ &+ \frac{4}{\lambda} \int_0^1 r(\mu, \mu', \tau_0) J(\tau, \mu', \mu_0; \tau_1) \Psi(\mu') \mu' \, d\mu' + \\ &+ \frac{4}{\lambda} \int_0^1 s(\mu, \mu'; \tau_0) J(\tau_0 + \tau, -\mu', \mu_0; \tau_1) \Psi(\mu') \mu' \, d\mu'; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} J(\tau_0 + \tau, \mu, \mu_0; \tau_1) &= s(\mu, \mu_0; \tau_0) e^{-\tau/\mu_0} \mu_0 + J(\tau, \mu, \mu_0; \tau_1) e^{-\tau_0/\mu} + \\ &+ \frac{4}{\lambda} \int_0^1 s(\mu, \mu'; \tau_0) J(\tau, \mu', \mu_0; \tau_1) \Psi(\mu') \mu' d\mu' + \\ &+ \frac{4}{\lambda} \int_0^1 r(\mu, \mu', \tau_0) J(\tau_0 + \tau, -\mu', \mu_0; \tau_1) \Psi(\mu') \mu' \, d'\mu' \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\tau_1 \geqslant \tau_0$; $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 - \tau_0$. Полагая в (8) и (9) $\tau = \tau_1 - \tau_0$ и $\tau = 0$ соответственно получим (поменяв обозначения переменных):

$$\begin{aligned} J(\tau, -\mu, \mu_0; \tau_0) &= r(\mu, \mu_0; \tau_0 - \tau) e^{-\tau/\mu_0} \mu_0 + \\ &+ \frac{4}{\lambda} \int_0^1 r(\mu, \mu'; \tau_0 - \tau) J(\tau, \mu', \mu_0; \tau_0) \Psi(\mu') \mu \, d\mu', \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} J(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) &= s(\mu, \mu_0; \tau) \mu_0 + \\ &+ \frac{4}{\lambda} \int_0^1 r(\mu, \mu'; \tau) J(\tau, -\mu', \mu_0; \tau_0) \Psi(\mu') \mu' \, d\mu'. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично, полагая в (8) и (9) соответственно $\tau = 0$ и $\tau = \tau_1 - \tau_0$, найдем

$$r(\mu, \mu_0; \tau_0)\,\mu_0 = r(\mu, \mu_0; \tau)\,\mu_0 + J(\tau, -\mu, \mu_0; \tau_0)\,e^{-\tau/\mu} + $$

$$+ \frac{4}{\lambda}\int_0^1 s(\mu; \mu'; \tau)\,J(\tau, -\mu', \mu_0; \tau_0)\,\Psi(\mu')\,\mu'\,d\mu', \tag{12}$$

$$s(\mu, \mu_0, \tau_0)\,\mu_0 = s(\mu, \mu_0; \tau_0 - \tau)\,e^{-\tau/\mu_0}\mu_0 +$$

$$+ J(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)\,e^{-(\tau_0-\tau)/\mu} + \tag{13}$$

$$+ \frac{4}{\lambda}\int_0^1 s(\mu, \mu'; \tau_0 - \tau)\,J(\tau, \mu', \mu_0; \tau_0)\,\Psi(\mu')\,\mu'\,d\mu'.$$

Легко видеть, что формулы (10)—(13) представляют собой аналоги соответственно I—IV принципов инвариантности Чандрасекара ([7], § 50). Двум последним из них с помощью формул

$$X(\mu, \tau) = 1 + \frac{4}{\lambda}\,\mu\int_0^1 r(\mu, \mu'; \tau)\,\Psi(\mu')\,d\mu', \tag{14}$$

$$Y(\mu, \tau) = e^{-\tau/\mu} + \frac{4}{\lambda}\,\mu\int_0^1 s(\mu, \mu'; \tau)\,\Psi(\mu')\,d\mu' \tag{15}$$

можно придать вид

$$X(\mu_0, \tau_0) = X(\mu_0, \tau) + \frac{4}{\lambda}\int_0^1 Y(\mu', \tau)\,J(\tau, -\mu', \mu_0; \tau_0)\,\Psi(\mu')\,d\mu'; \tag{16}$$

$$Y(\mu_0, \tau_0) = Y(\mu_0, \tau_0 - \tau)\,e^{-\tau/\mu_0} +$$

$$+ \frac{4}{\lambda}\int_0^1 Y(\mu', \tau_0 - \tau)\,J(\tau, \mu', \mu_0; \tau_0)\,\Psi(\mu')\,d\mu'. \tag{17}$$

Эти формулы можно назвать векторными аналогами соотношений инвариантности (12) и (13), поскольку при дискретизации по μ и μ_0 они определяют два вектора $X(\mu)$ и $Y(\mu)$ вместо матриц $r(\mu, \mu_0)$ и $s(\mu, \mu_0)$. Можно показать, что векторными аналогами соотношений (8) и (9) будут соответственно уравнения (I.31) и (I.32).

На этом мы заканчиваем рассмотрение частных случаев полученных нами аналогов (3) и (4) соотношений инвариантности, записанных ранее в [2]. Отметим лишь, что из них можно также получить ряд важных интегральных соотношений для приведенной интенсивности. Однако их вывод совершенно аналогичен тому, который был использован нами [2] при получении соответствующих выражений для обычной интенсивности и при желании может быть легко выполнен.

Теперь остановимся еще на одном численном методе расчета поля излучения в плоском слое конечной оптической толщины, освещенном параллельными лучами (имеется в виду метод расчета всех азимутальных гармоник приведенной функции источника).

2. *Модификация метода удвоения слоев для расчета приведенной функции источника.* Как известно, в случае полубесконечной атмсферы можно получить формулу сложения для интенсивности [4] (или для приведенной функции источника [5]), которая позволяет легко рассчитать поле излучения в полубесконечной атмосфере переходом от малых оптических глубин ко все бóльшим и бóльшим. Очень важно, что такой алгоритм не требует решения каких-либо уравнений или проведения итерационной процедуры. Эффективность этого метода расчета была продемонстрирована в работе [8].

Однако в случае среды конечной оптической толщины, как это видно из соотношения (4), получить столь простой алгоритм расчета, к сожалению, уже не удается, поскольку под знаком интеграла стоит произведение приведенных интенсивностей для слоев *различной* оптической толщины. Иными словами, при расчете поля излучения в конечном слое уже не удается избежать процедуры решения интегрального уравнения (обратное утверждается по непонятным причинам в работе [9]). Тем не менее, как будет показано ниже, и в этом случае может быть получен весьма простой и эффективный метод расчета внутренних полей излучения при анизотропном рассеянии.

Уже давно [10] в вычислительной практике для расчета коэффициентов отражения и пропускания плоского слоя был предложен метод удвоения слоев, который получил особо широкое распространение после переоткрытия его ван де Хюлстом [11] и большого ряда численных реализаций (см., например, [12]).

Суть этого метода состоит в следующем (в «векторной» модификации, излагаемой ниже). Положим в (10), (11), (16) и (17) $\tau_0 = 2\tau$. В таком случае формулы (16) и (17) дают возможность рассчитать X и Y функции для слоя оптической толщины 2τ, коль скоро они известны для слоя толщины τ, а также известна приведенная интенсивность в середине слоя оптической толщины 2τ. Последняя находится из системы уравнений (10) и (11), свободные члены и ядерные функции которых известны (см. формулы (I.19) и (I.20)). Алгоритм расчета $I(\tau, \mu, \mu_0; 2\tau)$ подробно описан в [12]. Вычисления начинаются с достаточно малого τ, так что функции X и Y могут быть взяты в приближении однократного рассеяния, а затем переходят к толщине 2τ и т. д.

Если теперь, кроме функций $X(\mu)$ и $Y(\mu)$ мы хотим вычислить также и функцию $D(\tau, \mu)$ (и тем самым найти поле излучения внутри слоя), то оказывается, что с помощью соотношения инвариантности (3) это сделать очень просто. Действительно, полагая в (3) $t = \tau_0$; $\tau_1 = 2\tau_0$ и $t = 0$, соответственно получим

$$D(\tau_0 + \tau, \mu_0; 2\tau_0) = D(\tau, \mu_0; 2\tau_0)\, e^{-\tau_0/\mu_0} + \frac{4}{\lambda}\int_0^1 D(\tau, \mu; \tau_0)\, J(\tau_0, \mu, \mu_0; 2\tau_0)\, \Psi(\mu)\, d\mu, \tag{18}$$

$$D(\tau, \mu_0; 2\tau_0) = D(\tau, \mu_0; \tau_0) + \frac{4}{\lambda}\int_0^1 D(\tau_0 - \tau, \mu; \tau_0)\, J(\tau_0, -\mu, \mu_0; 2\tau_0)\, \Psi(\mu)\, d\mu. \tag{19}$$

Положим в (18) и (19) $\tau = \tau_0/2$. Так как величины $J(\tau_0/2, \mu, \mu_0; \tau_0)$ и $J(\tau_0, \mu, \mu_0; 2\tau_0)$ (т. е. и величины $D(\tau_0/2, \mu_0; \tau_0)$ и $D(\tau_0, \mu_0; 2\tau_0)$) нам известны из схемы удвоения, формулы (18) и (19) дают значения приведенной функции источника (кроме ее величины в середине слоя) еще в двух точках внутри слоя толщины $2\tau_0$, а именно в точках $\tau = \tau_0/2$ и $\tau = 3/2\,\tau_0$. Теперь, после проведения очередной процедуры удвоения (т. е. перехода к слою тощины $4\tau_0$), с помощью (18) и (19) мы уже можем рассчитать функцию $D(\tau, \mu)$ на шести оптических глубинах, а именно, $\tau = 1/2\,\tau_0$; τ_0; $3/2\,\tau_0$; $5/2\,\tau_0$; $3\,\tau_0$; $7/2\,\tau_0$ и т. д. Этим самым, если вспомнить формулы (I.16) и (I.17), мы определили и приведенную интенсивность.

Очевидно, что минимальная величина градации по оптическим глубинам есть исходная оптическая толщина слоя, с которой начинается расчет методом удвоения слоев. Однако практически вряд ли имеет смысл вычислять поле излучения так подробно. Расчет по формулам (18) и (19) можно включить в изложенную выше модифицированную схему метода удвоения слоев с любого момента в зависимости от степени детальности, с которой мы хотим знать поле излучения внутри окончательного слоя. Очень важным является также то, что при использовании формул (18) и (19) не требуется решать каких-либо уравнений или использовать итерационную процедуру. Как уже отмечалось, этим замечательным свойством отличается также метод удвоения [4, 5] для расчета полей излучения в полубесконечных атмосферах.

Таким образом, формально говоря, предлагаемая схема расчета внутреннего поля излучения также является безытерационной. Ведь использованная нами схема удвоения слоев ван де Хюлста, которая включает в себя итерационную процедуру, есть всего лишь метод вычисления коэффициентов отражения и пропускания и, как побочный результат,— интенсивности излучения внутри слоя. Для полубесконечной атмосферы процесс итераций входит в процедуру вычисления коэффициента отражения.

Используя изложенный алгоритм (см. также [2]), Ж. М. Длугач составила программу и провела ряд численных расчетов поля излучения в плоских слоях конечных оптических толщин. Эксплуатация программы показала, что предлагаемый нами метод расчета является весьма эффективным. Так, введение в стандартную программу метода удвоения слоев подпрограммы расчета внутреннего поля излучения при начальной градации по оптическим глубинам $\Delta\tau = 0.125$ увеличило время счета всего лишь примерно на 20%. При этом внутреннее поле излучения рассчитывалось в слоях оптических толщин $\tau_0 = 0.5$; 1.0; 2.0. При интегрировании использовалась восьмиточечная квадратурная формула Гаусса. В качестве примера в таблицах 1 и 2 приведены результаты расчета функций $B(\tau, \mu; \tau_0)$ и $Z(\tau, \mu, \tau_0)$ для консервативно рассеивающего слоя оптической толщины $\tau_0 = 1$ при изотропном рассеянии. Это позволяет с помощью формул (I.16) и (I.17) легко вычислить интенсивность излучения внутри слоя. Численные результаты даны с точностью одной-двух единиц последней значащей цифры, что было установлено как с помощью интегральных соотношений (I.26) и (I.27), так и путем сравнения с имеющимися точными расчетами X и Y функций.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА $B(\tau, \mu; \tau_0) \cdot 10$ ПРИ ИЗОТРОПНОМ КОНСЕРВАТИВНОМ РАССЕЯНИИ ($\tau_0 = 1$)

τ \ μ	0.0198	0.1016	0.2372	0.4082	0.5917	0.7627	0.8983	0.9801
0	2.631	2.992	3.419	3.790	4.054	4.226	4.329	4.382
0.125	0.0916	1.279	2.651	3.549	4.108	4.449	4.648	4.747
0.250	0.0698	0.6698	2.009	3.128	3.868	4.328	4.598	4.733
0.375	0.0593	0.4431	1 551	2.712	3.548	4.086	4.407	4.568
0.500	0.0512	0.3406	1.220	2.325	3,191	3.771	4.124	4.303
0.625	0.0441	0.2795	0.9720	1.969	2.816	3.405	3.771	3.959
0.750	0.0375	0.2327	0.7766	1.637	2.425	2.995	3.356	3.544
0.875	0.0309	0.1899	0.6100	1.319	2.012	2.535	2.873	3.050
1.000	0.0232	0.1418	0.4407	0.9661	1.515	1.944	2.229	2.380

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\frac{1}{8}Z(\tau, \mu; \tau_0)\cdot 10$ ПРИ ИЗОТРОПНОМ КОНСЕРВАТИВНОМ РАССЕЯНИИ ($\tau_0=1$)

τ \ μ	0.0198	0.1016	0.2372	0.4082	0.5917	0.7627	0.8983	0.9801
0	0.0624	0.2078	0.3470	0.4558	0.5335	0.5859	0.6186	0.6356
0.125	0.0363	0.1486	0.2704	0.3707	0.4441	0.4943	0.5259	0.5423
0.250	0.0301	0.1262	0.2342	0.3248	0.3920	0.4382	0.4675	0.4827
0.375	0.0259	0.1099	0.2058	0,2873	0.3482	0.3903	0.4169	0.4309
0.500	0.0225	0,0960	0.1809	0.2536	0.3082	0.3460	0.3700	0.3825
0.625	0.0194	0.0834	0.1577	0.2216	0.2698	0.3033	0.3246	0.3357
0.750	0.0165	0.0712	0.1350	0.1902	0.2318	0,2608	0.2793	0.2889
0.875	0.0137	0.0589	0.1119	0,1578	0.1926	0,2169	0.2323	0.2404
1.000	0.0103	0.0443	0.0843	0.1191	0.1455	0.1639	0.1756	0.1818

3. *Заключительные замечания.* Итак, в настоящей работе мы показали, что для нахождения азимутальной гармоники интенсивности излучения $I^m(\tau, \mu, \mu_0)$ в слое конечной оптической толщины, так же, как и в полубесконечной атмосфере [5], достаточно рассчитать функцию $D^m(\tau, \mu)$, зависящую только от одной угловой переменной. При этом не требуется проводить интегрирования по τ. Иными словами, в случае анизотропно рассеивающей атмосферы мы провели разделение переменных для интенсивности. Следует отметить, что при изотропном рассеянии разделение переменных для интенсивности в плоском слое впервые выполнил Малликин [13] (см. формулы (4.4) этой работы). Позже такие же формулы были получены в [16]. Для полубесконечной среды этот результат был повторен в работах [14] и [15]. При этом было впервые обнаружено, что нисходящая интенсивность излучения выражается через функцию источника $B(\tau, \mu)$ путем простого алгебраического соотношения.

С помощью введения понятия приведенной интенсивности при анизотропном рассеянии разделение переменных для поля излучения в полубесконечной среде было осуществлено автором [5], а затем для слоя конечной оптической толщины — в работе Фимата и Калабы [17]. Однако в [17] приведенная интенсивность выражена не через хорошо изученную функцию $D(\tau, \mu)$, а через вводимую этими авторами функцию $b(\tau, \mu)$, представляющую собой интенсивность излучения в слое, освещенном изотропным источником. По нашему мнению, проведенное в настоящей работе сведение задачи к вычислению функции $D(\tau, \mu)$ является более простым и естественным путем решения проблемы, поскольку, как мы видели, функция $D(\tau, \mu)$ весьма хорошо изучена и может быть сравнительно легко рассчитана путем решения уравнений, приведенных во 2-м разделе [1], либо путем использования модифицированного метода удвоения слоев, изложенного в предыдущем разделе. Впрочем, авторы [17] сами указывают, что возможны вычислительные трудности при расчете функции $b(\tau, \mu)$.

Далее заметим, что при изотропном рассеянии соотношения (I.23) и (I.43) были получены автором [18], а уравнение (I.28) — в той же работе [18] и независимо Малликином [19] для более общего случая функции $B_i^m(\tau, \mu)$. Уравнение (I.28) для функции $D(\tau, \mu; \tau_0)$, насколько нам известно, в литературе не встречалось. В частном случае $\tau_0 = \infty$ оно было получено автором ранее [5]. Что же касается (I.31), то для полубесконечной изотропно рассеивающей атмосферы оно сводится к уравнению, найденному Э. Х. Даниеляном и М. А. Мнацаканяном [14] и иным путем в работе В. И. Иванова [20]. Уравнение (I.32) ранее, по-видимому, не встречалось. Частный случай соотношения инвариантности (4) для изотропно рассеивающего плоского слоя был получен Э. Х. Даниеляном [16]. Наконец отметим, что метод расчета обычной интенсивности излучения в конечном слое, «векторная» модификация которого изложена в предыдущем разделе, дан в работе автора [2].

Главная астрономическая
обсерватория АН УССР

THE FIELD OF RADIATION IN A PLANE ATMOSPHERE WITH ANISOTROPIC SCATTERING. AN INVARIANCE RELATION

E. G. YANOVITSKIJ

A plane atmosphere of optical thickness τ_0 illuminated by parallel rays is considered. New invariance relation for reduced source function $D(\tau, \mu; \tau_0)$ is obtained (see (3)) and its consequences are considered. The analogues of Chandrasekhar invariance principles are particular cases of the formula (3). The modification of van de Hulst doubling method for direct calculation of the function $X(\mu)$ and $Y(\mu)$ is given. It is shown that with the help of modified doubling method one can easily calculate the internal radiation field. Neither solving any equations nor iterations are needed in this case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Г. Яновицкий*, Астрофизика, 16, 363, 1980.
2. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 56, 833, 1979.
3. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 217, 533, 1974.

4. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 52, 217, 1975.
5. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 53, 1063, 1976.
6. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
7. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
8. *Ж. М. Длугач*, Астрон. ж., 53, 1295, 1976.
9. *О. В. Пикичян*, Астрофизика, 14, 169, 1978.
10. *G. H. Peebles, M. S. Plesset*, Phys. Rev., 81, 430, 1951.
11. *H. G. van de Hulst*, A New Look at Multiple Scattering, Rep. Inst. Space Studies, New York, 1963.
12. *J. E. Hansen*, Ap. J., 155, 565, 1969.
13. *T. W. Mullikin*, Proc. Interdisciplinary Conference on Electromagnetic Scattering Univ. Massachusetts, 1965, p. 697.
14. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 101, 1975.
15. *Э. Г. Яновицкий*, ДАН СССР, 227, 1319, 1976.
16. *Э. Х. Даниелян*, Астрофизика, 12, 579, 1976.
17. *A. L. Fymat, R. E. Kalaba*, Astropys. Space Sci., 47, 195, 1977.
18. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 41, 898, 1964.
19. *T. W. Mullikin*, Ap. J., 139, 379, 1964.
20. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 13, 505, 1977.
21. *A. Shimizu, H. Mizuta*, J. Nucl. Sci. and Technology, 3, 57, 1966.