

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17

ФЕВРАЛЬ, 1981

ВЫПУСК 1

УДК 52-3/-7

ДЛИНА ТЕРМАЛИЗАЦИИ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ЧАСТИЧНОМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПО ЧАСТОТАМ

М. М. БАСКО

Поступила 27 февраля 1980

Принята к печати 20 мая 1980

Изучается распространение резонансного излучения в однородной бесконечной среде в случае, когда перераспределение по частоте обусловлено естественным уширением линии и доплеровским смещением при тепловом движении рассеивающих атомов. Методом Монте-Карло рассчитаны среднее смещение $\langle r(t) \rangle$ и среднее число рассеяний $P(t)$, испытываемые резонансными фотонами в чисто рассеивающей среде за время t . Показано, что в лоренцовских крыльях фойгтовского профиля как распространение излучения в пространстве, так и эволюция профиля линии носят диффузионный характер. Обсуждается роль эффекта отдачи при резонансном рассеянии.

1. *Введение.* Задача о переносе излучения в частотах спектральных линий к настоящему моменту аналитически исследована лишь в предположении о полном перераспределении по частоте в каждом акте резонансного рассеяния и лишь в простейших случаях однородной среды со сферической или плоской геометрией [1]. В более сложных ситуациях необходимо либо каждый раз заново численно решать уравнения переноса, либо ограничиваться простыми порядковыми оценками. В последнем случае на передний план выступает важное понятие длины термализации τ_{th} — среднего расстояния между местом рождения и местом гибели фотона, выраженного в длинах свободного пробега. Эту величину важно знать в тех случаях, когда сечения процессов «истинного» поглощения (приводящих к гибели фотонов) во много раз меньше сечения резонансного рассеяния.

Обычно выражения для длины термализации выводятся на основе асимптотического разложения точных решений уравнения переноса. Имен-

но таким образом были получены известные формулы для длины термализации τ_{th} резонансных линий в случае, когда можно применить гипотезу о полном перераспределении [1]. В астрофизике, однако, встречаются ситуации, когда эта гипотеза заведомо неприменима [2], и тогда особенно важно уметь оценивать τ_{th} , поскольку исследование точных решений уравнения переноса даже в рамках простейшей геометрии наталкивается на громадные математические трудности [3]. Ранее нами в работе [4] был предложен метод, позволяющий оценить длину термализации резонансных линий в некоторых случаях, когда не удается решить сложное уравнение распространения излучения в пространстве. Метод сводится к анализу поведения спектрального профиля линии в бесконечной однородной среде, заполненной изотропным полем излучения, и последующему усреднению выражений для смещения монохроматических фотонов по известному профилю. Этим методом были получены выражения для τ_{th} в случае, когда линия обладает конечной естественной шириной, а перераспределение по частоте обусловлено доплеровским смещением при рассеянии на атомах, имеющих максвелловское распределение по скоростям.

Однако предложенный способ оценки τ_{th} , строго говоря, математически не обоснован, и остаются некоторые сомнения в том, что он дает правильное асимптотическое поведение точного решения соответствующего кинетического уравнения. Кроме того, он не позволяет установить правильных численных коэффициентов перед соответствующими асимптотическими выражениями для τ_{th} и исследовать переходную область между двумя асимптотиками. С целью устранения всех этих недостатков нами была предпринята серия численных расчетов методом Монте-Карло, результаты которых приводятся во втором разделе данной статьи. Эти расчеты полностью подтвердили установленную в [4] функциональную зависимость τ_{th} , хотя различия в некоторых численных коэффициентах достигают множителя ~ 3 . Справедливость исследуемых асимптотических формул для τ_{th} была также недавно подтверждена прямым анализом асимптотического поведения решений стационарного уравнения переноса [5, 6].

В третьем разделе настоящей статьи обсуждается роль эффекта отдачи при резонансном рассеянии, который ранее в [4] во внимание не принимался.

2. Постановка задачи. Сначала дадим строгое определение физических величин, значения которых находились в процессе численных расчетов. Удобно ввести следующие безразмерные величины: частоту $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$, время $\bar{t} = tcN\Sigma$, радиус-вектор $\bar{r} = rN\Sigma$, сечение рассеяния в линии $\bar{\sigma}(x) = \sigma(x)/\Sigma$, скорость рассеивающих атомов $\bar{v} = v/(2kT/M)^{1/2}$. Выше ν_0 — частота центра профиля линии, $\Delta\nu_D =$

$= v_0 (2kT/Mc^2)^{1/2}$ — доплеровская ширина линии, M — масса рассеивающих атомов, N (см^{-3}) — их плотность. Величина

$$\Sigma \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x) dx = \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{f_{12}}{\Delta v_D} \quad (1)$$

имеет размерность сечения и определяется силой осциллятора f_{12} резонансного перехода $1 \rightarrow 2$. Безразмерные координаты \bar{r} и время \bar{t} выбраны таким образом, что за время $\Delta \bar{t}$ свет проходит расстояние $|\Delta \bar{r}| = \Delta \bar{t}$. Ниже всюду используются безразмерные единицы и знак надчеркивания опускается.

Кинетическое уравнение, описывающее эволюцию поля резонансного излучения в однородной бесконечной среде, в общем случае имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \Omega \cdot \frac{\partial n}{\partial r} = -[\beta + \sigma(x)]n + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{4\pi} n(t, x', r, \Omega') \frac{d^2 \sigma(x' \rightarrow x, \mu)}{dx' d\Omega'} d\Omega' dx' \quad (2)$$

Здесь $n(t, x, r, \Omega) dx d\Omega$ ($\text{фот}/\text{см}^3$) — объемная плотность фотонов в интервале частот $(x, x + dx)$, распространяющихся в направлении единичного вектора Ω в телесном угле $d\Omega$; β — сечение поглощения в континууме, нормированное на Σ ; λ — вероятность фотону „выжить“ в единичном акте резонансного рассеяния (альbedo однократного рассеяния); $\mu \equiv \Omega \cdot \Omega'$. Уравнение (2) написано в пренебрежении процессами индуцированного рассеяния и в предположении, что в пределах контура линии $|x \Delta v_D| \ll v_0$. Предполагается также, что поле излучения не меняется за времена порядка времени жизни возбужденного состояния и учитывается лишь задержка фотонов при пролете.

Используемое в данной работе дифференциальное сечение резонансного рассеяния

$$\frac{d^2 \sigma(x \rightarrow x', \mu)}{dx' d\Omega'} = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha \exp(-v^2)}{a^2 + (x - v \cdot \Omega)^2} \beta [x' - x - v \cdot (\Omega' - \Omega) + \varepsilon(1 - \mu)] d^3 v \quad (3)$$

получено в предположении, что в системе покоя рассеивателя рассеяние происходит изотропно с дифференциальным сечением

$$\frac{d^2\sigma(x \rightarrow x')}{dx' d\Omega'} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{a}{a^2 + x^2} \delta(x - x'), \quad (4)$$

где постоянная затухания $a = l'/4\pi\Delta v_D$ представляет собой отношение естественной ширины линии u удвоенной доплеровской. Допущение об изотропном рассеянии практически не влияет на значения длины термализации — результаты расчетов с рэлеевской индикатрисой $d\sigma/d\Omega' \sim \sim 3/8(1 + \mu^2)$, характерной для дипольных переходов, в пределах статистических ошибок совпадают с результатами, полученными для изотропного сечения. В выражении для изменения частоты при рассеянии

$$x' - x = v(\Omega' - \Omega) - \varepsilon(1 - \mu) \quad (5)$$

учтен лишь эффект Доплера в первом порядке по v/c и эффект отдачи, роль которого обсуждается в разделе 3. В разделах 1 и 2 эффектом отдачи пренебрегается, и постоянная

$$\varepsilon = h\nu_0/(2kTMc^2)^{1/2} \ll 1 \quad (6)$$

полагается равной нулю. Пренебрежение эффектами, приводящими к сдвигу частоты $\sim v^2/c^2 \sim kT/Mc^2$ (доплеровское смещение $\sim v^2/c^2$, абберация при переходе из системы покоя атома в лабораторную систему, неинвариантность сечения), оправдано тем, что в физически интересных ситуациях эффективное рождение и рассеяние резонансных фотонов происходит при $kT \lesssim 0.1 h\nu_0$, когда степень ионизации рассеивающих атомов не слишком высока.

Понятие длины термализации имеет смысл лишь тогда, когда наряду с резонансным рассеянием действует какой-либо механизм «истинного» поглощения. Каждый конкретный процесс «истинного» поглощения может быть отнесен к одному из двух типов: (А) слабое поглощение в континууме, сечение которого $\beta \ll 1$ не зависит от частоты; (Б) слабое нарушение консервативности резонансного рассеяния, когда альбеда однократного рассеяния $i < 1$, но $1 - i \ll 1$. В случае (А) длину термализации τ_{th} естественно определить как среднее смещение фотонов в стационарной задаче:

$$\tau_{th} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} r n(x, r, \Omega) d\Omega dx dr}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} n(x, r, \Omega) d\Omega dx dr} \quad (7)$$

Здесь $n(x, r, \Omega)$ — решение уравнения (2) в стационарном случае $\partial n/\partial t = 0$ при $\lambda = 1$ и одном из граничных условий

$$n(x, r, \Omega)|_{r \rightarrow 0} = \frac{S}{4\pi r^2} \delta(\Omega - r/r) \left\{ \begin{array}{l} \delta(x) \\ \sigma(x) \end{array} \right\}, \quad (8a)$$

$$(8b)$$

S — мощность источника фотонов в начале координат, $r = |r|$. Условие (8a) описывает ситуацию, когда фотоны рождаются лишь в центре линии $x = 0$, тогда как при условии (8b) они первоначально распределены по частоте с плотностью вероятности $\sigma(x)$. Наибольший физический интерес представляет случай б), который соответствует реальным процессам возбуждения резонансных переходов (электронный удар, рекомбинация и т. п.). Однако случай а) легче поддается исследованию и приводит к более быстрому установлению асимптотического режима.

В случае (Б), когда $\beta = 0$ и $\lambda < 1$, определение длины термализации (7) теряет смысл, поскольку, как легко понять, соответствующие интегралы расходятся. Действительно, при граничном условии (8b) доля излучения, испускаемая в интервале частот $(x, x + dx)$, пропорциональна $\sigma(x)$, смещение фотонов до первого рассеяния $\sim x^{-1}(x)$ и среднее смещение, вычисленное согласно (7), бесконечно. Имея в виду последнее обстоятельство, а также ряд других соображений, мы подойдем к вопросу определения длины термализации с другой стороны. Сначала определим среднее смещение $\langle r(t) \rangle$ и среднее число рассеяний $\langle \Pi(t) \rangle$, испытываемые фотонами за время t при консервативном рассеянии:

$$\langle r(t) \rangle = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{4\pi} n(t, x, r, \Omega) d\Omega dx d^3r, \quad (9a)$$

$$\langle \Pi(t) \rangle = \int_0^t \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{4\pi} \sigma(x) n(t', x, r, \Omega) d\Omega dx d^3r dt', \quad (9b)$$

где $n(t, x, r, \Omega)$ — решение уравнения (2) при $\beta = 0$, $\lambda = 1$ и одном из начальных условий

$$n(t, x, r, \Omega)|_{t \rightarrow 0} = \frac{\delta(r-t)}{4\pi t^2} \delta(\Omega - r/r) \left\{ \begin{array}{l} \delta(x) \\ \sigma(x) \end{array} \right\}. \quad (10a)$$

$$(10b)$$

Физический смысл начальных условий (10) следующий: в момент $t = 0$ из начала координат испускается один фотон в центре линии (или с профилем $\sigma(x)$), причем все направления вылета равновероятны.

Опираясь на введенные выше понятия $\langle r(t) \rangle$ и $\langle \Pi(t) \rangle$, мы примем следующие определения длины термализации: в случае (А)

$$\tau_{th} = \langle r(\beta^{-1}) \rangle; \quad (11)$$

в случае (Б)

$$\langle \tau_{th} \rangle = \langle r(t_{th}) \rangle. \quad (12a)$$

$$\langle \Pi(t_{th}) \rangle = (1 - \lambda)^{-1}. \quad (12b)$$

Физический смысл (11) состоит в том, что длина термализации есть среднее смещение фотона за время $t = \beta^{-1}$, которое равно среднему времени жизни фотона в среде с сечением поглощения в континууме β . Легко понять, что по своему физическому смыслу определения (7) и (11) эквивалентны и могут отличаться не более чем на численный множитель, значение которого близко к 1, поскольку закон изменения $\langle r(t) \rangle$ слабо отличается от закона $\langle r(t) \rangle \sim t$ (см. ниже), при котором обсуждаемый численный множитель в точности равен 1. Этот вывод подтверждается результатами непосредственных численных расчетов по формулам (7) и (11), которые никогда не отличаются более чем на 10%. Аналогично, длина термализации в случае (Б) согласно (12) есть среднее смещение за время t_{th} , за которое среднее число рассеяний достигает значения $(1 - \lambda)^{-1}$, равного среднему числу рассеяний фотона в бесконечной среде при $\beta = 0$ и $0 < \lambda < 1$.

Отметим, что с целью унификации формул в данной работе в отличие от [4] сечение рассеяния и прочие величины нормированы на Σ , а не на сечение поглощения в центре линии. В результате, чтобы от (11) и (12) перейти к общепринятым выражениям для длины термализации, выраженной в длинах пробега в центре профиля, необходимо учесть поправочный множитель.

$$\sigma(0) = \begin{cases} \pi^{-1/2}, & a \ll 1, \\ (\pi a)^{-1}, & a \gg 1. \end{cases} \quad (13)$$

3. *Результаты расчетов.* В случае, когда естественное уширение отсутствует ($a = 0$), распространение фотонов линии в пространстве происходит следующим образом [7]: фотон много раз рассеивается вблизи центра профиля, оставаясь практически на месте, пока случайно не сдвигается по частоте на $|x| \geq [\ln(r\pi^{-1/2})]^{1/2}$, после чего он в одном пролете напрямую покрывает расстояние r . В этом случае, как показано в [4], асимптотические формулы для $\langle r(t) \rangle$ и $\langle \Pi(t) \rangle$ имеют вид:

$$\langle r(t) \rangle = \Lambda_D t (\ln t)^{-1}, \quad (14a)$$

$$\langle \Pi(t) \rangle = \frac{1}{2} t (\ln t)^{-1/2}. \quad (14b)$$

Если естественная ширина резонансной линии того же порядка, что и доплеровская ($a \sim 1$), то распространение фотонов в пространстве носит диффузионный характер и

$$\langle r(t) \rangle = \Lambda_a a^{-1/4} t^{3/4}, \quad (15a)$$

$$\langle \Pi(t) \rangle = \frac{4}{3} \frac{(2\pi)^{1/4}}{\Gamma(1/4)} a^{-1/4} t^{3/4} = 0.582 a^{-1/4} t^{3/4}. \quad (15b)$$

При $0 < a \ll 1$ и не слишком больших $t < t^*$ сначала устанавливается асимптотический режим (14), а затем при $t > t^{**}$ асимптотический режим (15). Причем, как указывалось в [4], области применимости асимптотик (14) и (15) не стыкуются, и t^* может сильно отличаться от t^{**} . Значения коэффициентов Λ_D и Λ_a в [4] установлены не были.

На рис. 1 и 2 представлены результаты расчетов величины $\langle r(t) \rangle / t^{3/4}$ соответственно при начальных условиях (10а) и (10б), а на рис. 3 изображены рассчитанные значения $\langle \Pi(t) \rangle / t^{3/4}$. Сплошными линиями соединены точки, рассчитанные методом Монте-Карло, тогда как пунктирные кривые представляют графики асимптотических формул (14) и (15). Указанные пределы статистических ошибок соответствуют $\pm 1\sigma$. Более подробно метод расчета освещен в Приложении.

Сравнение сплошных и пунктирных кривых показывает, что выражения (14) и (15) правильно описывают асимптотическое поведение величин $\langle r(t) \rangle$ и $\langle \Pi(t) \rangle$, определяемых соотношениями (9). Значения постоянных Λ_D и Λ_a , найденные методом наименьших квадратов по данным расчетов для $t \geq 10^4$, составляют

$$\Lambda_D = 1.71 \pm 0.04 (1\sigma), \quad \Lambda_a = 1.267 \pm 0.007 (1\sigma). \quad (16)$$

Мы позволим себе высказать догадку, что, по-видимому, $\Lambda_D = \sqrt{\pi}$.

Анализируя поведение кривых $\langle r(t) \rangle / t^{3/4}$ для $a = 0.1; 0.01$ на рис. 1 и 2, мы сразу убеждаемся, что в полном соответствии с выводом работы [4] переход с асимптотики (14а) на асимптотику (15а) в случае $a \ll 1$ происходит не совсем обычным образом: существует промежуточная область $t_r < t < t_r^{**}$, в которой график функции $\langle r(t) \rangle / t^{3/4}$ уходит вверх (а не вниз, как можно было бы ожидать) от возрастающей асимптотики (14а), прежде чем устремиться к горизонтальной асимптотике, соответствующей выражению (15а). Значение t_r^{**} можно оценить, просто приравняв выражения (14а) и (15а), откуда

$$t_r^{**} (\ln t_r^{**})^{-4} = 0.26 a^{-1}. \quad (17)$$

Для оценки t_r^* удобно воспользоваться следующим физическим доводом: формула (14а) должна быть справедлива до тех пор, пока полуширина контура линии, возрастающая при $a = 0$ по закону $x_m(t) = [\ln(t\pi^{-1/2})]^{1/2}$, не превосходит полуширины доплеровского ядра $x_D(a)$, определяемой соотношением

$$x_D^2 \exp(-x_D^2) = \pi^{-1/2} a; \quad (18)$$

другими словами

$$t_r^* / \ln t_r^* = \pi a^{-1}. \quad (19)$$

При $a = 0.01$ значения t_r^* и t_r^{**} , вычисленные согласно (19) и (17), составляют соответственно $2.45 \cdot 10^3$ и $9.26 \cdot 10^5$.

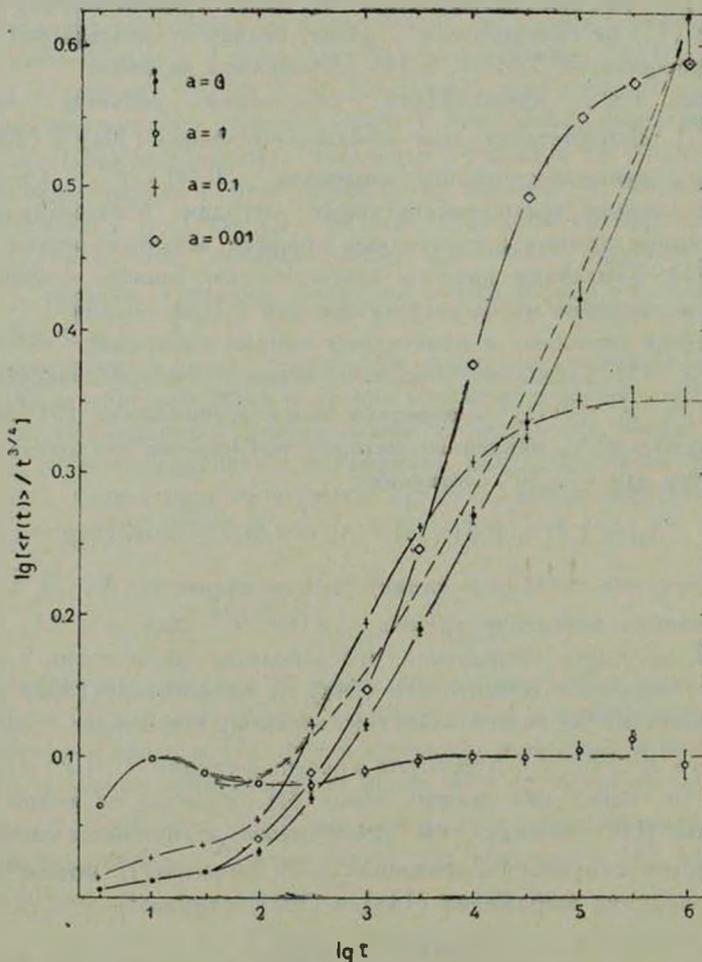


Рис. 1. Среднее смещение фотонов линии $\langle r(t) \rangle$ [в единицах $(\Sigma N)^{-1}$] в бесконечной однородной среде за время t (в единицах $(\Sigma N c)^{-1}$), деленное на $t^{3/4}$, при начальном условии (10а). Сплошными линиями соединены значения, рассчитанные методом Монте-Карло. Пунктир—асимптотика (14а) при $\Lambda_D = \sqrt{\pi}$.

В случае среднего числа рассеяний $\langle \Pi(t) \rangle$ описанная выше ситуация, как видно из рис. 3, существенно упрощается: переход с асимптотики

(146) на асимптотику (156) происходит самым обычным образом при $t \sim t_{II}^* = t_{II}^{**}$, где

$$t_{II}^* (\ln t_{II}^*)^{-2} = 2\pi \left[\frac{8}{3\Gamma(1/4)} \right]^4 a^{-1} = 1.84 a^{-1}. \quad (20)$$

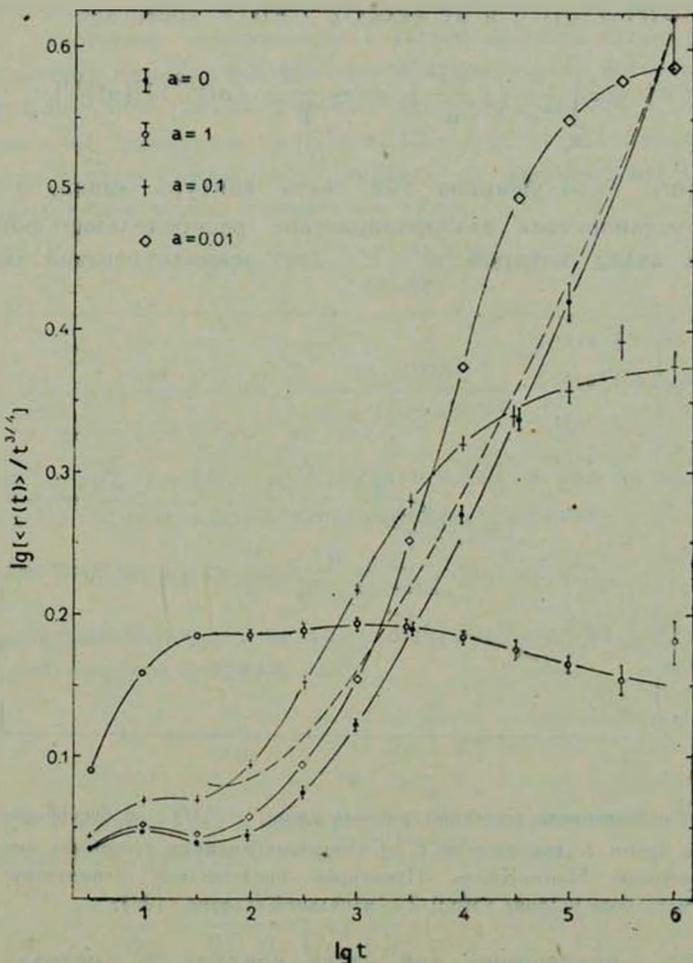


Рис. 2. Те же величины, что и на рис. 1, но при начальном условии (106).

Асимптотические формулы (14) и (15) справедливы для обоих вариантов начального условия (10). Однако при условии (106) выход на соответствующую асимптоту может осуществляться гораздо медленнее, чем при условии (10а), как это имеет место, например, при $a = 1$ (ср. рис. 1 и рис. 2). На рис. 2 видно, что даже при $t = 10^6$ значение

$\langle r \rangle / t^{3/4}$ еще существенно ($\geq 10\%$) отличается от асимптотического значения (15а). Такое поведение можно легко пояснить простой порядковой оценкой. Доля фотонов, которая первоначально излучается в крыльях линии в интервале частот $(x, x + dx)$, составляет $\sim (a/\pi x^2) dx$. За время t эти фотоны диффузионным образом распространяются на расстояние $r \sim (t(\pi x^2/a))^{1/2}$, и их вклад в $\langle r(t) \rangle$ достигает

$$\Delta \langle r \rangle = 2 \int_{x_m}^{x_1} \frac{a}{\pi x^2} \left(t \frac{\pi x^2}{a} \right)^{1/2} dx \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} (at)^{1/2} \ln [(at)^{1/4}], \quad (21)$$

где $x_m \approx (at)^{1/4}$ — полуширина той части контура линии, в которой успевает установиться квазиравновесное распределение фотонов по частоте и вклад которой в $\langle r \rangle$ дает асимптотический член (15а),

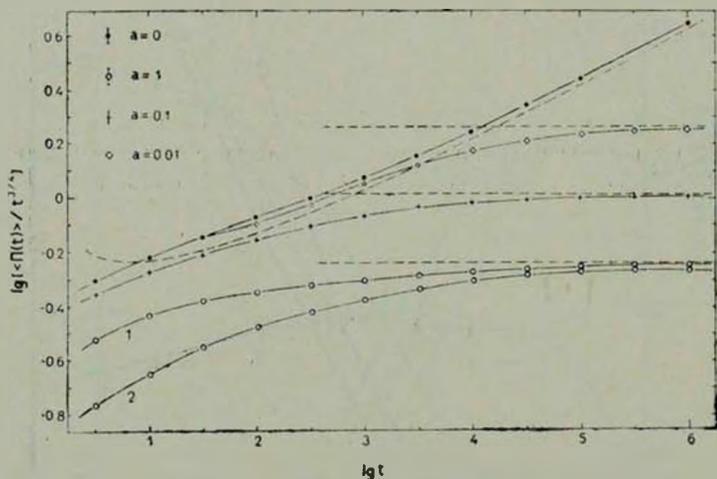


Рис. 3. Среднее число рассеяний фотонов линии $\langle \Pi(t) \rangle$ в бесконечной однородной среде за время t , деленное на $t^{3/4}$. Сплошными линиями соединены значения, рассчитанные методом Монте-Карло. Пунктиром представлены асимптотики (146) и (156): 1 — начальное условие (10а); 2 — начальное условие (10б).

а $x_1 \approx (at)^{1/2}$ — полуширина той части контура, в пределах которой перемещение фотонов в пространстве происходит диффузионным образом. Как видно из (21), относительный вклад области частот $x_m < |x| < x_1$ в среднее смещение

$$\Delta \langle r \rangle / \langle r \rangle \approx a^{3/4} t^{-1/4} \ln [(at)^{1/4}] \quad (22)$$

довольно медленно убывает с ростом t , и при $t = 10^6$ как раз и составляет $\sim 10\%$.

4. *Эффект отдачи при резонансном рассеянии.* Анализ функции перераспределения с учетом эффекта отдачи для случая $a = 0$ проведен Филдом [8]. Адамс [9] привел ряд веских качественных аргументов в пользу того, что эффект отдачи совершенно неважен при $a = 0$, тогда как при $a \neq 0$ его надо учитывать, начиная с таких больших значений оптической толщи, которые на практике никогда не реализуются. В данном разделе выведено уравнение, описывающее с учетом эффекта отдачи эволюцию профиля линии в крыльях фойгтовского контура, анализ которого не только подтверждает, но и усиливает вывод, сделанный Адамсом.

Пусть поле излучения $n(t, x, r, \Omega) = n(t, x)$ изотропно и не зависит от r . В этом случае, отталкиваясь от выражения (3), функцию перераспределения можно привести к виду

$$R(x, x') \equiv \int_{4\pi} \frac{d^2z(x-x', z)}{dx' d\Omega'} d\Omega' = \tag{23}$$

$$= \frac{a}{\pi^{3/2}} \exp(-2\varepsilon u - \varepsilon^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(2sp)}{a^2 + (p-s-\varepsilon)^2} \int_{|z|+|u|}^{\infty} e^{-y^2} dy dp,$$

где $u = (x' - x)/2$, $s = (x' + x)/2$. Разлагая (23) в ряд по малым параметрам ε и $|s|^{-1}$, приходим к следующему выражению

$$R(x, x') \approx \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{a}{a^2 + s^2} (1 - 2\varepsilon u) \psi(|u|), \tag{24}$$

хорошо аппроксимирующему функцию перераспределения (23) в далеких крыльях фойгтовского профиля; здесь

$$\psi(y) = e^{-y^2} - 2y \int_y^{\infty} e^{-x^2} dx. \tag{25}$$

Переходя с помощью (24) к диффузионному приближению, как это было ранее сделано в [4], при $\beta = 0$ и $\nu = 1$ из (2) получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{a}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{a^2 + x^2} \left(\frac{\partial n}{\partial x} + 2\varepsilon n \right) \right]. \tag{26}$$

Равновесное решение уравнения (26) имеет вид

$$n(x) = \text{const } e^{-2\varepsilon x} = \text{const } e^{-h\nu/kT} \tag{27}$$

— в полном соответствии с результатами Филда [8] для $a = 0^*$.

* Чтобы вместо закона Вина (27) получить формулу Планка, необходимо наряду с эффектом отдачи учесть индуцированное рассеяние и эффекты $\sim v^2/c^2$, описывающие передачу фотонам тепловой энергии атомов.

Сравнивая (27) с равновесным решением $n = \text{const}$ уравнения (26) при $\varepsilon = 0$, приходим к выводу, что эффект отдачи необходимо учитывать начиная с момента времени, когда полуширина расширяющейся линии $x_m \approx (at)^{1/4}$ становится сравнимой с ε^{-1} . К тому же выводу приводит и более детальное исследование уравнения (26). Полагая $\varepsilon = 0$ и учитывая, что в интересующей нас области $|x| \gg a$, переписываем (26) в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{a}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2} \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) при начальном условии $n(0, x) = \delta(x - x_0)$ имеет вид

$$n(t, x, x_0) = \frac{\pi}{4at} \exp\left(-\pi \frac{x^2 + x_0^2}{8at}\right) \left| (x^2 x_0^2)^{3/4} I_{-3/4}\left(\pi \frac{x^2 x_0^2}{4at}\right) + (x x_0) (x^2 x_0^2)^{1/4} I_{3/4}\left(\pi \frac{x^2 x_0^2}{4at}\right) \right|, \quad (29)$$

что при $x_0 = 0$ сводится к выражению (24) из [4]. (Выше $I_\nu(y)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента). Проведя соответствующие выкладки, убеждаемся, что $|\partial n / \partial x|$ становится сравнимым с членом $2\pi n$ во всей физически важной области профиля (29), начиная с момента времени

$$t \sim t_\varepsilon = a^{-1} \varepsilon^{-4} \quad x_m(t_\varepsilon) \approx \varepsilon^{-1}. \quad (30)$$

А поскольку условие $x_m \sim \varepsilon^{-1}$ означает, что ширина линии становится $\sim kT$, то рассматривать времена $t \gg t_\varepsilon$ вообще не имеет смысла, так как при этом нарушается условие применимости теории резонансного рассеяния $|\Delta\nu| \ll \nu$.

В качестве примера приведем значения основных параметров для линии $L_{\alpha 1}$ водорода, находящегося при температуре 10^4 К: $a = 4.74 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon = 2.54 \cdot 10^{-4}$, $t_\varepsilon = 5.1 \cdot 10^{17}$. Чтобы фотон мог просуществовать в облаке плазмы время t_1 , оптическая толщина последнего должна превышать значение $\tau \sim a^{-1/4} t_1^{3/4} \sim 10^{11}$, что более чем на три порядка превышает аналогичную оценку Адамса [9] и полностью подтверждает вывод о том, что в практически интересных случаях эффект отдачи роли не играет.

5. *Заключение.* В данной работе мы сконцентрировали внимание на изучении поведения двух величин, характеризующих перенос излучения в резонансных линиях в чисто рассеивающей среде, — среднего смещения

$\langle r(t) \rangle$ и среднего числа рассеяний $\langle \Pi(t) \rangle$, испытываемых фотонами линии за время t . Поскольку использование этих понятий при анализе конкретных физических ситуаций не является общепринятым, мы хотим подчеркнуть некоторые преимущества, связанные с их применением. Прежде всего, эти величины имеют очень ясный физический смысл, что существенно облегчает обращение с ними, позволяет строго их определить [см. (9)] и воспользоваться простым алгоритмом для нахождения их численных значений методом Монте-Карло. Выше, в разделе 2, уже отмечалось, что, например, понятие длины термализации τ_{th} в случае (5), когда $\lambda < 1$, этими преимуществами не обладает. Важно и то, что в совокупности две величины, $\langle r(t) \rangle$ и $\langle \Pi(t) \rangle$, несут больше информации, чем, скажем, одна величина τ_{th} . Зная $\langle r(t) \rangle$ и $\langle \Pi(t) \rangle$, можно легко оценить значения τ_{th} как при наличии слабого поглощения в континууме, так и в случае слабого нарушения консервативности рассеяния, по формулам (11) или (12). В качестве примера, демонстрирующего удобство рассуждений в терминах $\langle r(t) \rangle$ и $\langle \Pi(t) \rangle$, укажем также, что из формул (15а) и (15б) непосредственным образом вытекает закономерность, установленная в работе [10] на основании довольно громоздких численных расчетов: среднее число рассеяний фотона, испущенного в центре плоскопараллельного слоя с поперечной оптической толщиной в центре линии $2\tau_0$, пропорционально τ_0 при $\tau_0 \gg 1$, причем коэффициент пропорциональности не зависит от постоянной затухания a .

В заключение напомним, что в работе [4] асимптотические формулы (15) были получены в предположении, что в крыльях фойгтовского профиля блуждание фотонов как по частоте, так и по координатам происходит диффузионным образом. В этом плане согласие результатов численных расчетов с формулами (15) служит своего рода обоснованием возможности (априори далеко не очевидной) применять диффузионное приближение по частоте и эддингтоновское приближение в пространстве, что было сделано, например, в [11].

Приложение

Основной блок программы, предназначенный для расчета одной истории от момента рождения фотона до истечения промежутка времени t , включал следующие этапы:

- а) розыгрыш начальной частоты x и начального направления вылета Ω ;
- б) розыгрыш длины свободного пробега в направлении Ω по известному сечению рассеяния $\sigma(x)$;

в) розыгрыш компонентов скорости рассеивающего атома $v_{\parallel} = v \cdot \Omega$, $v_{\perp} = |v - v_{\parallel} \Omega|$ и азимута φ_V скорости v согласно плотностям распределения вероятности

$$p(v_{\parallel}) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{a}{\pi^{3/2}} \frac{e^{-v_{\parallel}^2}}{a^2 + (x - v_{\parallel})^2}, \quad -\infty < v_{\parallel} < +\infty;$$

$$p(v_{\perp}) = 2v_{\perp} e^{-v_{\perp}^2}, \quad 0 < v_{\perp} < +\infty;$$

$$p(\varphi_V) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 < \varphi_V < 2\pi;$$

г) розыгрыш нового направления вылета фотона Ω' и вычисление новой частоты x' ; если история не окончена, то возврат к этапу б). В фактическом исполнении розыгрыш длины свободного пробега при $a \neq 0$ производился одновременно с розыгрышем v_{\parallel} методом фиктивных рассеяний [12]. С целью экономии машинного времени описанный блок программы был оформлен на автокоде БЕМШ. Псевдослучайные числа γ_k вырабатывались по следующей рекуррентной процедуре [12]:

$$m_0 = 1; \quad m_{k+1} = 5^{17} m_k \pmod{2^{40}}; \quad \gamma_k = 2^{-40} m_k.$$

При длительности истории $t = 10^6$ за 10 часов счета на БЭСМ-6 удалось просчитать ~ 1200 историй для $a = 1$ и ~ 280 историй для $a = 0.01$.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

THE THERMALIZATION LENGTH OF RESONANCE RADIATION WITH PARTIAL FREQUENCY REDISTRIBUTION

M. M. BASKO

The propagation of resonance line radiation in an infinite homogeneous medium is studied when the frequency redistribution by resonance scattering is determined by the natural broadening of the line and by the thermal Doppler shift. Monte-Carlo simulations are performed to calculate the mean displacement $\langle r(t) \rangle$ and the mean number of scatters $\langle \Pi(t) \rangle$ experienced by resonance photons in a purely scattering medium within a time interval t . The propagation of radiation in a coordinate space, as well as the line spectral evolution in Lorentz wings of the Voigt profile are shown to be of the diffusive type. The effect of recoil by resonance scattering is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел. Наука. М., 1969.
2. М. М. Баско, Препринт ИКИ АН СССР, № 410, 1978.
3. С. van Trigt, Phys. Rev., A, 13, 734, 1976. *
4. М. М. Баско, ЖЭТФ, 75, 1278, 1978.
5. H. Frisch, Preprint of Center for Astrophys., No. 1131, 1979.
6. H. Frisch, "Scaling laws for Resonance Line Photons in an Absorbing Medium", preprint, 1979.
7. D. E. Osterbrock, Ap. J., 135, 195, 1962.
8. G. B. Field, Ap. J., 129, 551, 1959.
9. T. F. Adams, Ap. J., 168, 575, 1971.
10. T. F. Adams, Ap. J., 174, 439, 1972.
11. J. P. Harrington, M. N., 161, 43, 1973.
12. И. М. Соболев, Численные методы Монте-Карло, Наука, М., 1973.