

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 16

НОЯБРЬ, 1980

ВЫПУСК 4

УДК 524.8

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ВО ФРИДМАНОВСКИХ МОДЕЛЯХ ВСЕЛЕННОЙ

С. Ф. ШАНДАРИН

Поступила 14 июня 1979

Принята к печати 18 февраля 1980

В рамках космологических моделей Фридмана получены уравнения, описывающие эволюцию возмущений произвольной величины. Предполагается, что масштаб возмущений во много раз меньше горизонта, а амплитуда никогда не достигает релятивистских величин, поэтому гравитация описывается в ньютоновском приближении. Существенной чертой полученных уравнений является их независимость от основных параметров космологической модели H_0 и Ω_0 . Тем самым решается вопрос о подобии в эволюции возмущений в моделях с различными Ω_0 . Эволюция возмущений протекает в трех различных режимах в зависимости от типа космологической модели (открытая, критическая или замкнутая), поэтому поведение возмущений подобно лишь в пределах одного типа моделей. Однако переход к модели с конкретной величиной Ω_0 при фиксированном типе космологической модели осуществляется просто масштабным преобразованием.

1. *Введение.* В основе многих современных теорий образования крупномасштабной структуры Вселенной лежит анализ развития неоднородностей в расширяющейся Вселенной. Эволюция возмущений на линейной стадии достаточно хорошо исследована (см., например, [7]), там же можно найти ссылки на оригинальные работы. Законы роста малых возмущений существенно зависят от типа космологической модели, который определяется величиной $\Omega_0 = \bar{\rho}_0/\rho_c$, где $\bar{\rho}_0$ — средняя современная плотность вещества во Вселенной, а ρ_c — критическая плотность, которая выражается через постоянную Хаббла соотношением $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$. В замкнутых ($\Omega_0 > 1$) и критической ($\Omega_0 = 1$) моделях малые возмущения с течением времени всегда достигают нелинейной стадии, а в открытых моделях ($\Omega_0 < 1$) малые возмущения могут „замерзнуть“.

В данной работе показано, что в общем случае, когда возмущения не малы, их рост протекает в трех режимах, соответствующих трем типам Фридмановских космологических моделей: открытым, критической и замкнутым. Рассматриваются два типа моделей: 1) самогравитирующий газ с постоянной теплоемкостью и 2) бесстолкновительная самогравитирующая система частиц, описываемая кинетическим уравнением Власова. В обоих случаях получены уравнения, описывающие эволюцию возмущений в космологических моделях Фридмана. Уравнения не содержат коэффициентов, зависящих от параметров космологической модели, поэтому их решения также не зависят от этих параметров. Однако вид уравнений различен для разных типов космологических моделей. Поэтому при одинаковых начальных возмущениях существуют три типа законов роста неоднородностей в зависимости от типа модели. Переход к моделям с конкретной величиной Ω_0 осуществляется с помощью масштабного преобразования.

2. Самогравитирующий газ с постоянной теплоемкостью. Рассмотрим эволюцию возмущений в нерелятивистском газе. Такая ситуация важна во многих теориях образования галактик (адиабатическая и некоторые варианты энтропийной и вихревой теорий происхождения галактик). В интересующем нас диапазоне масштабов от 10^5 до $10^{15} M_\odot$ (от шаровых скоплений до сверхскоплений галактик) тяготение с достаточной точностью описывается в ньютоновском приближении*. Поэтому система уравнений газодинамики самогравитирующего газа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i} (\rho u_i) &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial r_k} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r_i}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_i^2} &= 4\pi G \rho, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} &= 0, \\ \varepsilon &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначения — общепринятые; t — время, r_i — эйлеровы координаты, ρ — плотность, u_i — скорость, Φ — гравитационный потенциал, P — дав-

* Рассматриваются возмущения с амплитудами, заведомо не достигающими релятивистских значений.

ление, ε — удельная внутренняя энергия, G — постоянная тяготения, $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме. Диссипативные процессы и потери энергии на излучение не рассматриваются.

Выделим явно среднее расширение Вселенной (см., например, [7]). Для этого представим скорость u_i и гравитационный потенциал в виде двух слагаемых:

$$\begin{aligned} u_i(t, r_i) &= H(t) r_i + v_i(t, r_i), \\ \Phi(t, r_i) &= \frac{2}{3} \pi \bar{\rho}(t) r_i^2 + \varphi(t, r_i), \end{aligned} \quad (2)$$

где $H(t)$ — постоянная Хаббла и $\bar{\rho}(t)$ — средняя плотность вещества во Вселенной в момент времени t . Первые слагаемые в равенствах (2) описывают однородно и изотропно расширяющуюся космологическую модель, а вторые — эволюцию неоднородностей.

Подставив (2) в систему уравнений (1) и учитывая соотношения для невозмущенных величин, нетрудно получить систему уравнений, описывающих эволюцию неоднородностей в расширяющейся космологической модели. Полученная таким образом система уравнений содержит коэффициенты, зависящие от современных значений параметров космологической модели H_0 и Ω_0 . Следовательно, и решения этой системы, описывающие эволюцию неоднородностей, также будут зависеть от H_0 и Ω_0 .

Перейдем к новым безразмерным переменным, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_i &= \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0}; & \tilde{dt} &= \frac{1}{a^2} \frac{dt}{t_0}; \\ \tilde{\rho} &= a^3 \frac{\rho}{\rho_0}; & \tilde{v}_i &= a \frac{v_i}{v_0}; & \tilde{\varphi} &= a^2 \frac{\varphi}{\varphi_0}; \\ \tilde{P} &= a^5 \frac{P}{P_0}; & \tilde{\varepsilon} &= a^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Величины с индексом нуль — зависящие только от H_0 и Ω_0 единицы, в которых измеряются соответствующие физические величины. Введение множителя $a \propto (1+z)^{-1}$, описывающего увеличение в ходе расширения линейных масштабов космологической модели, означает переход к сопутствующим координатам и исключает среднее расширение [3—5].

Выберем в качестве единиц следующие величины:

r_0 — произвольная величина размерности длины,

$$t_0 = \frac{2\alpha^{-3/2}}{H_0 \sqrt{\Omega_0}}; \quad v_0 = \frac{r_0}{t_0}; \quad \rho_0 = \frac{3\Omega_0 H_0^2}{8\pi G};$$

$$P_0 = \rho_0 v_0^2; \quad \varepsilon_0 = \varphi_0 = v_0^2, \quad (4)$$

где параметр α зависит только от Ω_0 и имеет различный вид в моделях разного типа

$$\alpha(\Omega_0) = \begin{cases} \frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} & \text{при } \Omega_0 < 1, \\ 1 & \text{при } \Omega_0 = 1, \\ \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} & \text{при } \Omega_0 > 1. \end{cases} \quad (5)$$

При этом масштабный фактор a , зависящий от безразмерного времени t , определяется соотношениями (рис. 1, сплошные кривые)

$$a(\tilde{t}) = \begin{cases} (\tilde{t}^2 - 1)^{-1} & \text{при } \Omega_0 < 1 \\ \tilde{t}^{-2} & \text{при } \Omega_0 = 1 \\ (\tilde{t}^2 + 1)^{-1} & \text{при } \Omega_0 > 1 \end{cases} \quad (6)$$

Безразмерное время \tilde{t} отрицательно, причем рост физического времени t от 0 (космологическая сингулярность) соответствует росту безразмерного времени \tilde{t} от $-\infty$. В открытых моделях бесконечность физического времени соответствует безразмерному времени $\tilde{t} = -1$, в критической модели бесконечность физического времени соответствует $\tilde{t} = 0$, а в замкнутых моделях при $\tilde{t} = 0$ расширение сменяется сжатием (рис. 1). В новых переменных система (1) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}_i} (\rho \tilde{v}_i) = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_k \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{r}_k} = - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}_i}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}_i^2} = 6 \cdot \alpha(\tilde{t}) (\rho - 1),$$

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{d\tilde{t}} = h(\tilde{t}) \left(2\tilde{\varepsilon} - 3 \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} \right) + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}^2} \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}}. \quad (7)$$

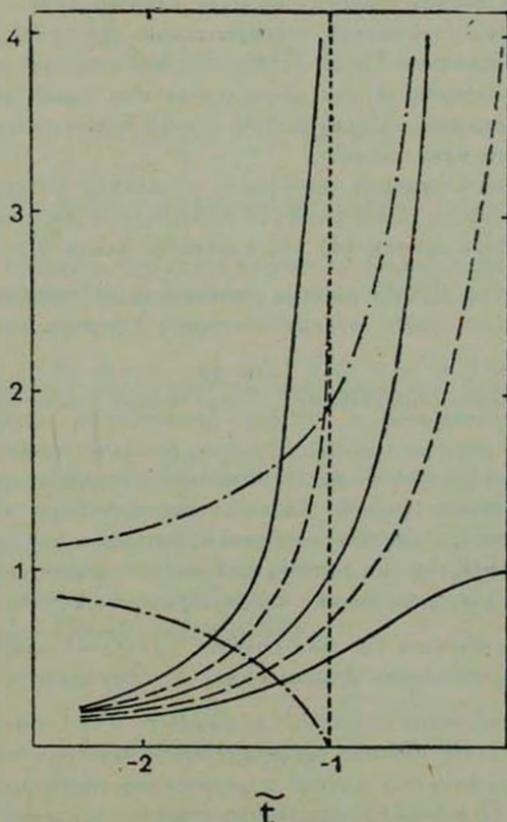


Рис. 1. Сплошные кривые показывают зависимость функции α от \tilde{t} в моделях трех типов: открытых — верхняя кривая, критическая — средняя кривая и замкнутых — нижняя кривая. Штриховые кривые — функции $b_2(\tilde{t})$, описывающие рост возмущений: верхняя кривая соответствует $\Omega < 1$, нижняя — $\Omega > 1$, при $\Omega = 1$ функция $b_2(\tilde{t}) = \alpha(\tilde{t})$. Штрихпунктирные кривые показывают ход Ω в зависимости от \tilde{t} для замкнутых ($\Omega > 1$) и открытых ($\Omega < 1$) моделей.

Функция $\bar{h}(t)$ определяется аналогично постоянной Хаббла:

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}. \quad (8)$$

Полученная система уравнений (7) не зависит от величины параметров космологической модели H_0 и Ω_0 . Однако функции $\bar{a}(t)$ и $\bar{h}(t)$ имеют различный вид в космологических моделях разного типа.

Три уравнения (уравнения непрерывности, Эйлера и уравнение состояния) не изменили своего вида. Уравнение, описывающее эволюцию энергии в наиболее интересном для рассматриваемых задач случае $\gamma = 5/3$, также остается прежним, так как в этом случае первое слагаемое в правой части тождественно равно нулю.

Существенные изменения претерпело уравнение Пуассона. В правой части вместо плотности стоит разность плотности и постоянной величины (при данном выборе единиц (4) эта константа равна 1), умноженной на функцию времени $\bar{a}(t)$. Множитель, зависящий от времени, приводит к относительному усилению взаимодействия с течением времени, так как с ростом времени \bar{t} от $-\infty$ до 0 (или до -1 при $\Omega_0 < 1$) $\bar{a}(t)$ растет. Однако это усиление происходит с различной скоростью при разных Ω_0 (6).

Разность $\bar{\rho} - 1$ в правой части может быть отрицательна в областях, где плотность меньше средней. Казалось бы, появление в правой части уравнения Пуассона величины, которая может быть как положительной, так и отрицательной, делает систему похожей на плазму, но другой знак (здесь плюс, а в электродинамике минус) приводит к тому, что одноименно «заряженные» области (то есть области, где $\bar{\rho} - 1$ одного знака) притягиваются, а разноименно «заряженные» — отталкиваются. В результате происходит разделение областей, где разность $\bar{\rho} - 1$ имеет разный знак. Это хорошо известное явление гравитационной неустойчивости.

Следует отметить, что важное с физической точки зрения изменение вида уравнений Пуассона несущественно с вычислительной точки зрения. поэтому при численном решении системы уравнений (7) можно использовать обычные методы.

В случае модели с критической плотностью ($\Omega_0 = 1$) система уравнений (7) обладает симметрией относительно некоторого масштабного преобразования. Пусть функции $\bar{\rho}^{(1)}$, $\bar{v}^{(1)}$, $\bar{\sigma}^{(1)}$, $\bar{P}^{(1)}$ и $\bar{\varepsilon}^{(1)}$ являются решением системы (7), тогда

$$\tilde{\rho}^{(2)}(\tilde{t}, \tilde{r}_i) = \tilde{\rho}^{(1)}(\tilde{t}, \mu \tilde{r}_i),$$

$$\tilde{v}^{(2)}(\tilde{t}, \tilde{r}_i) = \frac{\lambda}{\mu} \tilde{v}^{(1)}(\tilde{t}, \mu \tilde{r}_i),$$

$$\tilde{\varphi}^{(2)}(\tilde{t}, \tilde{r}_i) = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \tilde{\varphi}^{(1)}(\tilde{t}, \mu \tilde{r}_i),$$

$$\tilde{P}^{(2)}(\tilde{t}, \tilde{r}_i) = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \tilde{P}^{(1)}(\tilde{t}, \mu \tilde{r}_i),$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(2)}(\tilde{t}, \tilde{r}_i) = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \tilde{\varepsilon}^{(1)}(\tilde{t}, \mu \tilde{r}_i)$$

(где λ и μ — постоянные коэффициенты) также удовлетворяют системе уравнений (7).

Нетрудно показать, что соотношения на фронте адиабатической ударной волны в безразмерных имеют тот же вид, что и в физических переменных.

3. *Бесстолкновительное кинетическое уравнение Власова.* При исследовании процесса образования галактик и формирования современной структуры Вселенной большое распространение получили численные эксперименты с системами, состоящими из большого числа частиц, взаимодействующих лишь гравитационно. Разные авторы используют различные подходы: как расчет попарных взаимодействий частиц, так и расчет усредненного гравитационного поля. Здесь будет рассмотрено описание гравитирующей среды в рамках кинетического подхода Власова. В этом случае система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial r_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,$$

$$u_i = dr_i/dt, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_i^2} = 4\pi G \int f d^3 u,$$

где $f(t, r_i, u_i)$ — одночастичная функция распределения, r_i — координаты, u_i — скорости, Φ — гравитационный потенциал.

После перехода к новым переменным (3) система уравнений (9) имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \tilde{v}_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r_i} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r_i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_i} = 0, \quad (10)$$

$$\tilde{v}_i = d\tilde{r}_i/dt, \quad \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r_i^2} = 6 \cdot a(\tilde{t}) \left(\int \tilde{f} d^3 \tilde{v} - 1 \right).$$

где $\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{r}_i, \tilde{v}_i) = f(t, r_i, v_i)$.

С помощью системы уравнений (10) обычным путем можно получить уравнение, связывающее изменение кинетической и потенциальной энергий возмущений [1, 2, 9].

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{d\tilde{U}}{dt} - h(\tilde{t})\tilde{U}, \quad (11)$$

где $\tilde{T} = \frac{1}{2} \int \tilde{v}^2 \tilde{f} d^3 \tilde{v} d^3 \tilde{r}$ — кинетическая энергия возмущений и $\tilde{U} = \frac{1}{2} \int \tilde{\rho} \left(\int \tilde{f} d^3 \tilde{v} - 1 \right) d^3 \tilde{r}$ — потенциальная энергия возмущений.

4. Эволюция возмущений потенциального типа в среде без давления. Эволюция возмущений потенциального типа, имеющих масштаб во много раз превосходящий длину Джинса, описывается приближенным решением Зельдовича [6] (область применимости и точность этого решения исследовались в работах [3, 4, 8]).

В безразмерных переменных (4) вещество движется в соответствии с уравнением

$$\tilde{r}_i = \tilde{q}_i - b(\tilde{t}) \cdot s_i(\tilde{q}_i), \quad (12)$$

где \tilde{r}_i и \tilde{q}_i — эйлеровы и лагранжевы координаты частицы, $s_i(\tilde{q}_i)$ — вектор, задающий возмущение в каждой частице, функция $b(\tilde{t})$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 b}{d\tilde{t}^2} - 6 \cdot a(\tilde{t}) \cdot b = 0. \quad (13)$$

Напомним, что функция $a(\tilde{t})$ имеет различный вид в космологических моделях разного типа (6). Одно решение уравнения (13) (нормировка произвольна),

$$b_1(\bar{t}) = -\bar{t}/a(\bar{t}), \quad (14)$$

описывает эволюцию затухающей моды, а другое,

$$b_2(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{5}{2} [1 + 3(\bar{t}^2 - 1)(1 - \bar{t} \cdot \text{Arcth } \bar{t})] & \text{при } \Omega_0 < 1, \\ \bar{t}^{-2} & \text{при } \Omega_0 = 1, \\ \frac{5}{2} \left[-1 + 3(\bar{t}^2 + 1) \left(1 + \bar{t} \left(\text{arctg } \bar{t} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] & \text{при } \Omega_0 > 1, \end{cases} \quad (15)$$

соответствует растущей моде. Множитель $5/2$ в случаях $\Omega_0 < 1$ и $\Omega_0 > 1$ выбран с тем расчетом, что при $\bar{t} \rightarrow -\infty$ все три функции $b_2(\bar{t}) \approx \bar{t}^{-2}$ (рис. 1).

Скорость и плотность в частице с лагранжевыми координатами определяются по формулам

$$\tilde{v}_i(\bar{t}, \tilde{q}_i) = \tilde{d}r_i/\tilde{d}\bar{t} = -\frac{db_2}{d\bar{t}} s_i(\tilde{q}_i), \quad (16)$$

$$\tilde{\rho}(\bar{t}, \tilde{q}_i) = 1/\left| \tilde{v}_{,ik} - b_2(\bar{t}) \frac{\partial s_i}{\partial q_k} \right|. \quad (16a)$$

Из формул (12) и 16a) видно, что в рамках рассматриваемого приближения при одинаковом начальном возмущении (то есть функции $s_i(\tilde{q}_i)$) распределение вещества определяется лишь значением функции $b_2(\bar{t})$. Поэтому распределение вещества, которое достигается в модели с критической плотностью в любой момент времени, при котором $b_2 < 2.5$, возможно и в открытых моделях, но, конечно, в другой момент времени. Однако в открытых и критических моделях соответствующие частицы, имея одинаковые координаты, обладают различными скоростями, так как скорость определяется величиной производной $db_2/d\bar{t}$ (см. (16)), а не величиной b_2 . Следует подчеркнуть, что указанные особенности эволюции неоднородностей в различных космологических моделях справедливы лишь в рамках приближенного решения (12).

В заключение приведем формулы, связывающие красное смещение z и текущее значение безразмерной плотности Ω с безразмерным временем \bar{t} (рис. 1).

$$1+z = \frac{\alpha}{a} = \begin{cases} \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0} (\tilde{t}^2-1) & \text{при } \Omega_0 < 1, \\ \tilde{t}^2 & \text{при } \Omega_0 = 1, \\ \frac{\Omega_0-1}{\Omega_0} (\tilde{t}^2+1) & \text{при } \Omega_0 > 1, \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 1 - \tilde{t}^{-2} & \text{при } \Omega_0 < 1, \\ 1 + \tilde{t}^{-2} & \text{при } \Omega_0 > 1. \end{cases}$$

5. **Вывод.** Описанное в настоящей работе преобразование уравнений газодинамики, бесстолкновительной кинетики и тяготения приводит к уравнениям, описывающим эволюцию возмущений во фридмановской модели, независимым от параметров космологической модели H_0 и Ω_0 . Это означает, что и развитие возмущений не зависит от конкретной величины H_0 и Ω_0 .

Функциональное различие $a(t)$ в различных типах космологических моделей приводит к трем принципиально различным типам эволюции возмущений в открытых, критической и замкнутых моделях. Естественно, что это отличие существенно лишь в области, где Ω заметно отличается от единицы.

Полученные уравнения, прежде всего, решают вопрос о подобии эволюции возмущений в космологических моделях с разными Ω_0 , который был ранее решен в предельном случае малых возмущений.

Данные уравнения могут быть использованы в различных численных экспериментах, моделирующих процесс возникновения крупномасштабной структуры Вселенной. В связи с этим стоит подчеркнуть, что безразмерные уравнения практически сохранили вид исходных уравнений, что позволяет применять хорошо разработанные методы численного решения уравнений такого типа.

В данной работе были рассмотрены простейшие модели догалактической среды (идеальный газ, бесстолкновительная система), однако можно надеяться, что аналогичные преобразования будут полезны и в более сложных моделях.

Автору приятно выразить благодарность Я. Б. Зельдовичу и А. Г. Дорошкевичу за полезные обсуждения и замечания.

ON THE EVOLUTION OF PERTURBATIONS IN
FRIEDMAN MODELS OF THE UNIVERSE

S. F. SHANDARIN

In the frame of Friedman cosmological models the equations of evolution of perturbation of arbitrary amplitude have been analysed. The scale of perturbations is supposed to be small in comparison of the horizon and the amplitude is smaller than the relativistic limit so that the Newtonian description of gravitation is used. The important feature of the equations is their independence of fundamental parameters of the cosmological model H_0 and Ω_0 . Thus the question of similarity of evolution of perturbation in models with arbitrary Ω_0 has been solved. The evolution of perturbation goes in three different behaviours depending on the type of the cosmological model (open, critical or closed). Therefore the behaviour of perturbation is similar only in the frame of the same type of the model. However the transition to the model having the particular Ω_0 within the same type of cosmological models is realized with the help of scaling transformation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Дмитриев, Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 45, 1150, 1963.
2. Н. А. Дмитриев, Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 48, 79, 1964.
3. А. Г. Дорошкевич, Э. В. Коток, И. Д. Новиков, А. Н. Полюдов, Ю. С. Сизов, С. Ф. Шандарин, МН, 192, 321, 1980.
4. А. Г. Дорошкевич, В. С. Рябенский, С. Ф. Шандарин, Астрофизика, 9, 258, 1973.
5. А. Г. Дорошкевич, С. Ф. Шандарин, Астрофизика, 9, 549, 1973.
6. Я. Б. Зельдович, Астрофизика, 6, 119, 1970.
7. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Строение и эволюция Вселенной, Наука, М., 1975.
8. И. Д. Новиков, Астрон. ж., 62, 1038, 1975.
9. W. M. Irvine, Doctoral Thesis, Harvard Univ., 1961.