АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 16 АВГУСТ, 1980 ВЫПУСК 3

УДК 523.035

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ ЗАДАЧИ О МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ РАССЕЯНИИ СВЕТА В ПЛОСКОМ СЛОЕ

М. А. МНАЦАКАНЯН

Поступила 14 марта 1979

Найдены приближенные аналитические решения задачи о переносе монохроматического излучения в трехмерном плоском слое конечной оптической толщины при сферической индикатрисе рассеяния, справедливые для произвольного значения углового аргумента η на всей комплексной плоскости. Эти решения носят асимптотический по толщине слоя характер и обладают чрезвычайно высокой степенью точности. В худшем случае — малых толщин и консервативного рассеяния, погрешность не превышает нескольких десятых долей процента. С увеличением толщины слоя и уменьшением значения λ,-альбедо однократного рассеяния точность решений возрастает. При $\eta \to \infty$ из них следуют высокоточные решения задачи о среднем числе рассеяний кванта в слое. При больших толщинах слоя, в соответствующем приближении, найденные решения переходят в известные асимптотические решения как для значений $\eta < 1$, так и $\eta > 1$, а также для задачи о среднем числе рассеяний кванта.

1. *Введение.* Явное решение задачи о монохроматическом рассеянии света в плоско-параллельном слое известно только для случаев однородных бесконечной и полубесконечной сред [1—4]. Нахождение точных решений более общей задачи — для слоя конечной оптической толщины, разумеется, явилось бы важным шагом в аналитической теории переноса излучения. Тем не менее, такие решения в замкнутом виде до сих пор не найдены.

Однако, даже при наличии точных аналитических решений задачи о слое конечной толщины, для практических целей потребовались бы различные их аппроксимации сравнительно простыми выражениями. Судя по известным точным решениям для случая полубесконечного слоя, такая задача была бы далеко не из легких.

С этой точки зрения, несомненно, заслуживает внимания непосредственное получение приближенных, но достаточно точных аналитических решений задачи о монохроматическом рассеянии света в слое конечной толщины. Условие аналитичности, то есть, справедливости решений на всей комплексной плоскости значений углового аргумента η, представляется ценным в вопросах их анализа. К тому же, непосредственным физическим смыслом обладают значения η не только из интервала $(-1,1)$. Таковыми являются также случай $\eta = 1/k$ — корня характеристического уравнения [1]:

$$\Lambda(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2}\eta \ln \frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad \Lambda\left(\frac{1}{k}\right) = 0, \tag{1}$$

и предельный случай $\eta \to \infty$. Последний соответствует задаче о среднем числе рассеяний кванта в слое и представляет самостоятельный интерес.

Кроме того, подобные решения — для произвольного значения η, задачи о монохроматическом рассеянии окажутся полезными для вывода и понимания более общих решений, например, задачи о некогерентном рассеянии, где значения соответствующего аргумента $z = \alpha(x)/\eta$ являются физичными на всей бесконечной оси $(-\infty < z < \infty)$.

Настоящая статья посвящена выводу и обсуждению приближенных аналитических решений задачи о монохроматическом рассеянии света в однородном слое конечной оптической толщины. Эти решения обладают чрезвычайно высокой точностью при всех толщинах слоя и на всей комплексной плоскости (η). В частности, при $\eta \to \infty$ они определяют высокоточные решения задачи о среднем числе рассеяний кванта в слое конечной толщины.

Основной результат работы заключается в том, что решение произвольной задачи для слоя конечной толщины посредством элементарных выражений явным образом (но приближенно) сводится к известным точным решениям соответствующей задачи для полубесконечного слоя.

В этом плане схожими представляются известные асимптотические решения [3—5] задачи о рассеянии света в слое большой оптической толщины. Последние, однако, обладают должной точностью, лишь начиная с определенной толщины слоя, причем эта толщина быстро растет с уменьшением альбедо однократного рассеяния λ и с ростом вытянутости индикатрисы рассеяния. Решения же, получаемые ниже и являющиеся по своему характеру также асимптотическими по толщине слоя, обладают существенно большей степенью точности при любой толщине слоя. При больших толщинах, в соответствующем приближении из них в частных случаях следуют асимптотические решения задачи о выходящем излучении [3—5] и о среднем числе рассеяний кванта. Отличительной особенностью наших решений является возрастание точности с уменьшением значения λ.

Рассматриваемые ниже решения фактически представляют собой аналитическое продолжение найденных ранее автором решений [6], действительных при $\eta \leqslant 1$, на всю комплексную плоскость (η). Напомним, что последние в качестве частного результата содержат в себе также «интуитивное» решение Ямамота, вызвавшее в литературе большой интерес своей высокой точностью и долгое время подозреваемое в качестве точного [6].

Ниже мы ограничимся рассмотрением только случая изотропного рассеяния; анизотропному рассеянию будет посвящена отдельная работа автора.

2. *Постановка задачи и исходные уравнения.* Пусть в слое конечной толщины τ_0 имеется квант, летящий на глубине τ в направлении ζ. Угловой аргумент ζ обозначает косинус угла между направлением полета кванта и нормалью к одной из границ слоя, так что значение $\zeta = 0$ соответствует поглощенному на данной глубине кванту. Мы рассмотрим более общий случай — произвольной функции распределения $g(\tau, \zeta)$ «первичного» кванта по глубине τ и направлению полета ζ, заменяющей обычную функцию распределения «первичных источников» $g(\tau)$.

Обозначим через $j(\tau, \eta) \equiv j(\tau, \tau_0, \eta; g)$ поле излучения в среде — плотность вероятности того, что квант когда-нибудь пролетит на глубине τ в направлении η. Через $j(\eta) \equiv j(0, \eta)$ обозначим угловое распределение выходящего через границу слоя излучения. Ниже мы придерживаемся вероятностной трактовки процессов рассеяния кванта в среде.

Добавим к рассматриваемому слою толщины τ_0 полубесконечную среду (без источников) и рассмотрим суммарную полубесконечную среду с заданным распределением $g(\tau, \zeta)$ первичных квантов в пограничном слое толщиной τ_0. Обозначим при этом через $J(\tau, \eta)$ поле излучения в суммарной полубесконечной среде. Введем также функцию Грина $\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta)$ для полубесконечного слоя — вероятность кванту, летящему на глубине τ в направлении ζ, когда-нибудь пролететь на глубине τ' в направлении η.

Тогда из простых физических соображений следует [6]:

$$J(\tau, \eta) = j(\tau, \eta) + \int_0^1 \Gamma(\tau, \tau_0, \eta, -\mu) j(\mu)\, d\mu. \tag{2}$$

Это соотношение позволяет явным образом свести решение задачи о внутреннем световом поле $j(\tau, \eta)$ в слое конечной толщины τ_0 к решению двух частных задач: о распределении излучения, выходящего через границу этого слоя и функцию Грина полубесконечноой среды.

Обратимся теперь к вопросу определения углового распределения излучений, выходящих через границы рассматриваемого слоя толщины τ_0

$$j^{+}(\eta) \equiv j(0, \eta), \quad j^{-}(\eta) \equiv j(\tau_0, -\eta)$$

при заданной функции распределения $g(\tau, \zeta)$.

Добавляя к одной или другой границе слоя полубесконечную среду и обозначая через $J^{+}(\eta)$ или $J^{-}(\eta)$ распределение излучения, выходящего через границу соответствующей суммарной полубесконечной среды, имеем [6]:

$$\begin{gathered} J^{+}(\eta) = j^{+}(\eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu) j^{-}(\mu)\, d\mu, \\ J^{-}(\eta) = j^{-}(\eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu) j^{+}(\mu)\, d\mu. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $Z(\tau, \eta, \mu) = \Gamma(0, \tau, \eta, -\mu)$ есть вероятность выхода из полубесконечной среды кванта, летящего на глубине τ в направлении μ вглубь среды.

Соотношения (3) устанавливают связь между решением задачи об излучении, выходящем из слоя конечной толщины, и решением такой же задачи для полубесконечного слоя. Мы будем считать характеристики полубесконечной среды $J^{\pm}$ и Z известными и рассматривать соотношения (3) в качестве уравнений для определения характеристик $j^{\pm}(\eta)$ слоя толщины τ_0.

Из (3) следуют раздельные уравнения

$$S(\eta) = s(\eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, s(\mu)\, d\mu, \tag{4}$$

$$H(\eta) = h(\eta) - \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, h(\mu)\, d\mu, \tag{5}$$

для суммы и разности искомых величин

$$s(\eta) \equiv j^{+}(\eta) + j^{-}(\eta), \quad h(\eta) \equiv j^{+}(\eta) - j^{-}(\eta), \tag{6}$$

где

$$S(\eta) \equiv J^{+}(\eta) + J^{-}(\eta), \quad H(\eta) \equiv J^{+}(\eta) - J^{-}(\eta). \tag{7}$$

Здесь и ниже заглавные буквы обозначают величины, относящиеся к полубесконечной среде, а соответствующие прописные — к слою толщины τ_0.

Уравнения (4), (5) представляют собой линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Примечательно, что в них величины τ, τ_0 и ζ, равно как и распределение $g(\tau, \zeta)$, служат параметрами. Это обстоятельство делает особенно эффективным непосредственное численное решение уравнений (4), (5) методом дискретизации по направлениям. При этом, независимо от конкретной постановки задачи, при данной толщине слоя обращению подлежат всегда одни и те же две матрицы $(I + Z(\tau_0))_{ij}$ и $(I - Z(\tau_0))_{ij}$.

Очевидно, что соотношения, аналогичные (2)—(7), могут быть написаны и в более общих случаях — анизотропном рассеянии, произвольном законе перераспределения по частотам, с учетом поляризации и т. д.

3. *Приближенные аналитические решения.* Приведем окончательные выражения для приближенных аналитических решений уравнений (4), (5), записываемые посредством характеристик полубесконечного слоя. Вывод этих выражений дается в Приложении II.

Пусть $P(\tau, \eta)$ есть вероятность выхода в направлении η кванта, поглощенного на глубине τ полубесконечной среды, и $P(0, \eta) = (\lambda/2)\varphi(\eta)$ — функция Амбарцумяна. С их помощью построим следующие „поправочные“ функции:

$$a(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} C(\tau) \frac{\eta\varphi(\eta)}{1 - k\eta}, \quad \beta(\tau, \eta) = P(\tau, \eta) - a(\tau, \eta), \tag{8}$$

где k — корень характеристического уравнения (1), а $C(\tau)$ — некая характеристика полубесконечного слоя, определение которой дано ниже (п. 5).

Введем следующие обозначения для интегральных операторов:

$$f_{\pm\eta} = \int_0^1 \frac{f(\mu)\, d\mu}{\eta \pm \mu}, \qquad f_{\pm k} = \int_0^1 \frac{f(\mu)\, d\mu}{1 \pm k\mu}. \tag{9}$$

Заметим, что

$$f_{\pm k} = \lim_{\eta \to 1/k} (\eta f_{\pm\eta}). \tag{10}$$

Приближенные решения задачи об излучении, выходящем через границу слоя толщины τ_0, записываются при помощи поправок a и β в виде

$$\begin{aligned} s(\eta) &= S(\eta) - a(\tau_0, \eta)\, s_k - \eta\beta(\tau_0, \eta)\, s_\eta, \\ h(\eta) &= H(\eta) + a(\tau_0, \eta)\, h_k + \eta\beta(\tau_0, \eta)\, h_\eta, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$s_\eta = \left\{ (S_\eta - a_\eta(\tau_0)\, s_k) - \eta\beta_\eta(\tau_0) \left[S_{-\eta} + \frac{2}{\lambda} \frac{\Lambda(\eta)}{\eta} a(\tau_0, \eta)\, s_k \right] \right\} / D(\tau_0, \eta),$$
$$h_\eta = \left\{ (H_\eta + a_\eta(\tau_0)\, h_k) + \eta\beta_\eta(\tau_0) \left[H_{-\eta} - \frac{2}{\lambda} \frac{\Lambda(\eta)}{\eta} a(\tau_0, \eta)\, h_k \right] \right\} / D(\tau_0, \eta), \tag{12}$$

$$D(\tau, \eta) = 1 - \eta\beta_\eta(\tau) \left[e^{-\tau/\eta} - \frac{2}{\lambda} \Lambda(\eta)\, \beta(\tau, \eta) \right], \tag{13}$$

а s_k и h_k определяются из (12) предельным переходом (10) $\eta \to 1/k$:

$$s_k = (S_k - \beta_k(\tau_0)\, S_{-k})/d^+(\tau_0), \quad h_k = (H_k + \beta_k(\tau_0)\, H_{-k})/d^-(\tau_0), \tag{14}$$

где

$$d^\pm(\tau) = (1 - \beta_k(\tau)\, e^{-k\tau}) \pm a_k(\tau). \tag{15}$$

Решения для случая консервативного рассеяния, $\lambda = 1$, следуют отсюда предельным переходом $k \to 0$ (см. Приложение II). Они имеют тот же вид (11—15), с той разницей, что вместо $f_{\pm k}$ нужно подставить

$$f_{\pm k} \to f_0 \equiv \int_0^1 f(\mu)\, d\mu,$$

причем,

$$s_0 = 1, \quad h_0 = \frac{G}{\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)}, \tag{16}$$

где $G = (\tau_0 - 2\tau)\,\alpha + 2\,[q(\tau_0 - \tau) - q(\tau)] + \frac{2}{\sqrt{3}} [F(\tau, \zeta) + \tilde{F}(\tau_0 - \tau, \zeta) - \zeta C(\tau_0)]$. Здесь $\alpha = 2 - C(\tau_0)/\sqrt{3}$, $q(\tau)$ — функция Хопфа, а $F(\tau, \eta)$ и $\tilde{F}(\tau, \zeta)$ — функции, также являющиеся характеристиками полубесконечной среды (см. п. 5).

Итак, искомые решения для слоя конечной толщины элементарным образом (алгебраически) выражаются посредством величин S, H, a, β, $C(\tau_0)$, характеризующих полубесконечную среду, и их определенные интегралы типа (9). Последние же, в конечном счете, весьма просто выражаются через две функции $F(\tau, \eta)$ и $\tilde{F}(\tau, \zeta)$, играющие фундаментальную роль в нашем подходе к решению задач о переносе излучения в плоском слое [7]. Эти выражения приводятся в Приложении I.

4. *Частные задачи и численные результаты.* Рассматриваемая нами задача при $g(\tau', \zeta') = \delta(\tau' - \tau)\,\delta(\zeta' - \zeta)$ переходит в задачу определения

функции Грина слоя конечной толщины и, в частности, поверхностной функции Грина

$$r(0, \tau, \tau_0, \eta, \zeta) = \begin{cases} y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta), & \zeta \geqslant 0, \\ z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta), & \zeta \leqslant 0. \end{cases}$$

При $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ мы имеем отсюда задачу об отражении $y(\tau_0, \tau_0, \eta, \zeta) = q(\tau_0, \eta, \zeta)$ и пропускании $z(0, \tau_0, \eta, \zeta) = r(\tau_0, \eta, \zeta)$, а при $\zeta = 0$ — об определении вероятности выхода кванта, поглощенного на глубине τ слоя толщины τ_0. Решение последней задачи следует из (11)—(16) подстановкой $\zeta = 0$:

$$p(\tau, \tau_0, \eta) = P(\tau, \eta) - a(\tau_0, \eta) M(\tau, \tau_0) - \eta\beta(\tau_0, \eta)[P_\eta(\tau_0 - \tau) - a_\eta(\tau_0) M(\tau_0 - \tau, \tau_0)],$$

где

$$M(\tau, \tau_0) = \frac{(1 - \beta_k(\tau_0) e^{-k\tau_0}) m(\tau, \tau_0) - a_k(\tau_0) m(\tau_0 - \tau, \tau_0)}{(1 - \beta_k(\tau_0) e^{-k\tau_0})^2 - a_k^2(\tau_0)},$$
$$m(\tau, \tau_0) = P_k(\tau_0 - \tau) - \beta_k(\tau_0) e^{-k\tau}. \tag{17}$$

Полагая в этих решениях $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, получаем следующие приближенные выражения для φ- и ψ-функций Амбарцумяна:

$$\frac{\lambda}{2}\varphi(\tau_0, \eta) = \frac{\lambda}{2}\varphi(\eta) - \frac{s_k - h_k}{2} a(\tau_0, \eta) - \eta\beta(\tau_0, \eta)\left[P_\eta(\tau_0) - \frac{s_k + h_k}{2} a_\eta(\tau_0)\right],$$
$$\frac{\lambda}{2}\psi(\tau_0, \eta) = P(\tau_0, \eta) - \frac{s_k + h_k}{2} a(\tau_0, \eta) - \eta\beta(\tau_0, \eta)\left[\frac{\lambda}{2}\varphi_\eta - \frac{s_k - h_k}{2} a_\eta(\tau_0)\right], \tag{18}$$

где

$$s_k = 1 - \frac{1}{d^+(\tau_0)\varphi(1/k)}, \qquad h_k = 1 - \frac{1}{d^-(\tau_0)\varphi(1/k)}.$$

В случае консервативного рассеяния в (18) полагаем $k = 0$,

$$s_0 = 1, \quad h_0 = \pm\left(\frac{2/\sqrt{3}}{\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)}\right), \tag{19}$$

причем знак „плюс" относится к выражению для φ, а знак „минус" — для ψ.

Ниже мы приводим таблицы 1, 2 функций $\varphi_\lambda(\tau_0, 1)$ и $\psi_\lambda(\tau_0, 1)$ для ряда значений τ_0 и λ, посчитанных по приближенным формулам (18), (19). Для сравнения в таблицах даются их точные значения, заимствованные из [8].

Таблица 1

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $\varphi_\lambda(\tau_0, 1)$

τ_0 \ λ	1	0.99	0.95	0.9	0.5	
0	1.0002 1.0000	1.0001 1.0000	0.9999 1.0000	1.0000 1.0000	1.0000 1.0000	прибл. точн.
0.1	1.162 ?	1.160 ?	1.152 ?	1.143 ?	1.073 ?	прибл. точн.
0.2	1.268 1.265	1.265 1.261	1.250 1.247	1.233 1.230	1.114 1.113	прибл. точн.
0.4	1.432 1.429	1.425 1.422	1.398 1.395	1.366 1.363	1.1645 1.1639	прибл. точн.
1	1.759 1.757	1.740 1.739	1.673 1.672	1.5980 1.5972	1.2263 1.2262	прибл. точн.
2	2.0708 2.0707	2.0313 2.0311	1.8948 1.8947	1.7607 1.7606	1.24776 1.24774	прибл. точн.

Таблица 2

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $\psi_\lambda(\tau_0, 1)$

τ_0 \ λ	1	0.99	0.95	0.9	0.5	
0	0.9998 1.0000	0.9999 1.0000	1.0001 1.0000	1.0000 1.0000	1.0000 1.0000	прибл. точн.
0.1	1.065 ?	1.063 ?	1.055 ?	1.046 ?	0.977 ?	прибл. точн.
0.2	1.078 1.074	1.075 1.071	1.061 1.057	1.044 1.041	0.928 0.927	прибл. точн.
0.4	1.070 1.066	1.063 1.059	1.037 1.034	1.007 1.004	0.8193 0.8187	прибл. точн.
1	0.968 0.966	0.952 0.950	0.8926 0.8913	0.8283 0.8273	0.5276 0.5274	прибл. точн.
2	0.7810 0.7808	0.7494 0.7494	0.6431 0.6428	0.5439 0.5437	0.23324 0.23318	прибл. точн.

Мы видим, что наибольшая погрешность приближенных решений достигается при $\lambda = 1$ и малых толщинах τ_0 и составляет $\sim 0.3 - 0.4\,\%$.

С ростом τ_0 и уменьшением значения λ точность приближенных решений сильно возрастает. Например, при $\tau_0 = 2$ и $\lambda = 0.5$ относительная ошибка равна 0.002 % и 0.02 % для φ- и ψ-функции, соответственно, в то время как погрешность известных асимптотических решений (см. п. 7) в этом случае составляет ~ 1 % для φ-функции и свыше 200 % для ψ-функции.

Такую же погрешность имеют функции $\varphi(\tau_0, \eta)$ и $\psi(\tau_0, \eta)$ при всех значениях η. В частности, при $\eta \to \infty$ (среднее число рассеяний) в случае консервативного рассеяния из (18) имеем

$$\varphi(\tau_0, \infty) = \psi(\tau_0, \infty) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,[\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)], \quad \lambda = 1. \tag{20}$$

В таблице 3 приводятся численные значения, посчитанные по формуле (20), точные значения, взятые из [9], и, для сравнения, значения, даваемые асимптотической формулой [4, 10], соответствующей большим τ_0 в (20):

$$\varphi(\tau_0, \infty) = \psi(\tau_0, \infty) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\tau_0 + 2q(\infty)).$$

В таблице указаны также соответствующие относительные ошибки Δ в (%).

Таблица 3

ТОЧНЫЕ, ПРИБЛИЖЕННЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ $\varphi_1(\tau_0, \infty)$

τ_0	Точн.	Прибл.	Δ %	Асимпт.	Δ %
0	1.000	1.000	0	1.23	23
0.1	?	1.169	?	1.32	13
0.2	1.287	1.291	0.3	1.40	8
1	2.067	2.069	0.1	2.10	1.4

5. *Основное приближение.* Каждое приближенное решение задачи (4), (5) соответствует некой аппроксимации ядра Z этих уравнений. Например, асимптотические решения [3—5] отвечают приближению $Z(\tau, \eta, \zeta) \approx$ $\approx \dfrac{Ae^{-k\tau}\eta}{(1-k\eta)(1+k\zeta)}$. Величина Z выражается посредством двух функций F и $\tilde{F}$ по формуле (П. I. 1). Последние определяются как

$$F(\tau, \eta) = \eta\int_0^1 Y(\tau, \mu, \eta)\,d\mu/\mu, \qquad \tilde{F}(\tau, \eta) = \eta\int_0^1 Z(\tau, \mu, \eta)\,d\mu/\mu, \tag{21}$$

и допускают следующую физическую интерпретацию. Квант, поглощенный на границе полубесконечного слоя, создает на глубине τ поле излучения, описываемое фукцией $F(\tau, \eta)$ при $\eta \leqslant 0$ и $\breve{F}(\tau, \eta)$ при $\eta \geqslant 0$. При больших τ в функции $\breve{F}(\tau, \eta)$ происходит ряздeление переменных $\breve{F}(\tau, \eta) \approx Ae^{-k\tau}\eta/(1+k\eta)$. В работе [6], исходя из физического смысла величины $\breve{F}$, было установлено, что разделение переменных в ней происходит с достаточно высокой точностью при всех $\tau \geqslant 0$, так что

$$\breve{F}(\tau, \eta) \approx C(\tau)\frac{\eta}{1+k\eta}, \tag{22}$$

в то время, как разделение переменных в функции $F(\tau, \eta)$ с той же гочностью имеет место лишь при сравнительно больших τ.

Приближение (22) верно, вообще говоря, при малых η, скажем, $\eta \lesssim 1$. При больших значениях η оно нарушается. Поэтому, с целью получения высокоточных решений задачи (4), (5), нужно использовать приближение (22) только на интервале $\eta \in (0.1)$. Это оказывается возможным, поскольку интегрирование в уравнения (4), (5) ведется как раз на этом интервале.

При решении уравнений (4), (5), описанном в Приложении II, мы сохраняем в выражении для $Z(\tau_0, \eta, \mu)$ функцию $F(\tau_0, \eta)$ точной, а для $\breve{F}(\tau_0, \mu)$ используем приближение (22), но только на интервале $\mu \in (0, 1)$. Другими словами, в основе решений (11—16) лежит единственное приближение:

$$\int_0^1 \breve{F}(\tau_0, \mu) f(\mu)\, d\mu \approx C(\tau_0)\int_0^1 \frac{\mu}{1+k\mu} f(\mu)\, d\mu, \tag{23}$$

где τ_0 — толщина слоя, а в роли $f(\mu)$ выступают функции $s(\mu)/(\eta \pm \mu)$, $h(\mu)/(\eta \pm \mu)$.

Интеграл в левой части (23) не имеет особенностей, за исключением случая $\eta = 1$, когда мы имеем дело с функциями типа $f(\mu) \sim 1/(1-\mu)$. В этом случае он расходится на верхнем пределе, и чтобы обеспечить совпадение поведений обеих частей приближения (23) в окрестности $\eta = 1$, мы обязаны наложить на функцию $C(\tau_0)$ (в некоторой степени произвольную) требование

$$C(\tau_0) = (1+k)\breve{F}(\tau_0, 1). \tag{24}$$

При таком выборе $C(\tau_0)$ приближение (23) обеспечивает, очевидно, достаточно высокую точность решений для всех значений η.

Приближение (23) выполняется тем лучше, чем больше толщина τ_0. Поэтому приведенные выше решения носят асимптотический характер — их точность возрастает с увеличением τ_0. Другим свойством приближения (23) является увеличение его точности с уменьшением значения λ — альбедо однократного рассеяния. Этим объясняется возрастание точности наших решений с уменьшением λ, отмеченное в п. 4. Таким образом, случай малых толщин и консервативного рассеяния является наихудшим в смысле точности рассматриваемых в статье решений.

На рис. 1 приведен график функции $\tilde{F}_\lambda(\tau_0, \eta)$ для случая консервативного рассеяния, $\lambda = 1$, при значениях $\tau_0 = 0$ и $\tau_0 = \infty$ на интервале $\eta \in (0, 1)$. Соответствующая (22) аппроксимация $\tilde{F}(\tau_0, \eta) \approx C(\tau_0)\eta$ изображена прямой 1. При $\tau_0 = \infty$ имеет место точное совпадение $\tilde{F}(\infty, \eta) = \sqrt{3}\,\eta$.

Найденные нами в п. 3 приближенные решения допускают улучшение. Оно основано на более точной аппроксимации функции $\tilde{F}(\tau, \eta)$ на интервале $(0 < \eta < 1)$. Например, ее можно представить в форме

$$\tilde{F}(\tau_0, \eta) = \frac{c_1(\tau_0)\,\eta - c_2(\tau_0)\,\eta^2}{1 + k\eta}. \tag{25}$$

При $\lambda = 1$ эта аппроксимация указана на рис. 1 пунктирной кривой 3; для нее

$$c_1(\tau_0) = 2\tilde{F}(\tau_0, 1) - \tilde{F}'_\eta(\tau_0, 1), \quad c_2(\tau_0) = \tilde{F}'_\eta(\tau_0, 1) - \tilde{F}(\tau_0, 1), \tag{26}$$

В этом случае уравнения (4), (5) также допускают решение в замкнутом виде, причем оно обладает исключительно высокой точностью. Это решение мы здесь не приводим ввиду его громоздкости.

На рис. 1 указана также прямая 2, представляющая другую аппроксимацию $\tilde{F}(\tau_0, \eta) \approx (c(\tau_0)\,\eta + d(\tau_0))/(1 + k\eta)$ при $\lambda = 1$: $c = c_1 - 2c_2$, $d = c_2$. Две аппроксимации — использованная в статье (прямая 1) и указанная (прямая 2), ограничивают точное поведение функции $F(\tau_0, \eta)$ при $0 < \eta < 1$ сверху и снизу. Комбинируя решения, соответствующие этим двум приближениям, можно получить для решения задачи (4, 5) оценки сверху и снизу, а по ним и оценить погрешность полученных нами решений. Как показывает анализ, эта погрешность заведомо не превышает 1% для всех значений τ_0, η и λ.

Следует отметить, однако, что погрешность приближенных решений, ввиду их асимптотического характера, меняется в зависимости от конкретной постановки задачи, то есть, от распределения $g(\tau, \zeta)$. Наибольшая погрешность в задаче о выходящем излучении соответствует, понятно, случаю, когда источники сосредоточены у дальней границы слоя, например, случаю решения задачи о ψ-функции. Ясно также, что это различие должно быть мало при малых толщинах слоя.

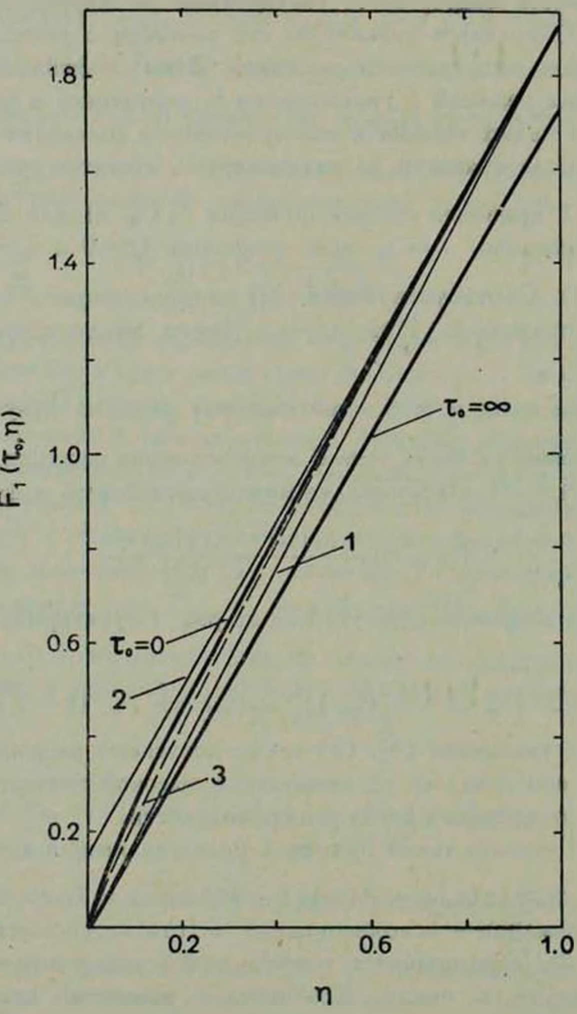

Рис. 1. $\tilde{F}_\lambda(\tau_0, \eta)$ при консервативном рассеянии для значений $\tau_0 = 0$ и $\tau_0 = \infty$ и ее различные аппроксимации на интервале $0 < \eta < 1$.

6. *Решения при малых* η. При малых значениях углового аргумента $\eta \leqslant 1$ можно использовать приближение (22) в явном виде, то есть в решениях (11)—(16) пренебречь величиной

$$\beta_\eta(\tau_0) = \frac{1}{\varphi(\eta)} \left[\frac{\tilde{F}(\tau_0, \eta)}{\eta} - \frac{C(\tau_0)}{1 + k\eta} \right] \to 0. \tag{27}$$

Тогда мы получим решения, найденные в [6]. Они имеют вид (11) и (14), где s_η и h_η определяются теперь уже из

$$s_\eta = S_\eta - a_\eta(\tau_0)\, s_k, \quad h_\eta = H_\eta + a_\eta(\tau_0)\, h_k. \tag{28}$$

Эти решения справедливы для всех λ. В частности, в задаче о функции источников при консервативном рассеянии, $\lambda = 1$, они совпадают с «интуитивным» решением Ямамото [6].

Заметим, что при $\eta \leqslant 1$ при толщинах слоя $\tau_0 \gtrsim 1$ члены, содержащие β_η, становятся меньше погрешности самих решений и ими можно пренебречь. В этом отношении сохранение членов с β_η при $\tau_0 \lesssim 1$ приводит к более точным, по сравнению с найденными в [6], решениям.

В случае, если значение λ не очень близко к 1, в [6] приведены сравнительно простые выражения для приближенных решений. Они следуют подстановкой наряду с (27) также

$$\beta_k(\tau_0) = \frac{1}{\varphi(1/k)} \left[\tilde{F}(\tau_0, 1/k) - \frac{C(\tau_0)}{2k} \right] \to 0 \tag{29}$$

и имеют вид (11), где s_η и h_η определяются из (28), а s_k и h_k из

$$s_k = \frac{S_k}{1 + a_k(\tau_0)}, \quad h_k = \frac{H_k}{1 - a_k(\tau_0)}. \tag{30}$$

Погрешность этих решений тем меньше, чем меньше значение λ. Это следует из того, что при $\lambda \to 0$ значение $k \to 1$ и величина β_k стремится к $[\tilde{F}(\tau_0, 1) - C(\tau_0)/2] \to 0$, что точно совпадает с определением (24) для $C(\tau_0)$ при $k \to 1$. Кстати, определение (24) для $C(\tau_0)$ в [6] было найдено из других соображений. Выражение (16) для случая консервативного рассеяния было получено другим путем в работе [6].

Понятно, что решения (11—16) можно вывести, обратившись к выводу «квазиасимптотических» решений [6], устранив при этом в соответствующих местах неточности, вводимые приближением (22) в явном виде, сохранив это приближение только под интегралами. Такой путь является, однако, менее последовательным и уступает выводу, данному в Приложении II, в четкости и компактности.

7. *Асимптотические выражения.* При больших толщинах слоя из (11)—(16) можно вывести сравнительно простые выражения, жертвуя, понятно, точностью решений. При этом случаи малых и больших значений углового аргумента η следует рассматривать в отдельности.

При $\tau_0 \gg 1$

$$C(\tau_0) \to Ae^{-k\tau_0}, \qquad A = \left[\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 \frac{\mu\varphi(\mu)}{(1-k\mu)^2}\,d\mu\right]^{-1},$$
$$a(\tau,\eta) = \frac{\lambda}{2}\,\frac{Ae^{-k\tau}\,\eta\varphi(\eta)}{1-k\eta}. \tag{31}$$

Это соответствует пренебрежению в решениях (11)—(15) величинами

$$\beta_k(\tau_0) \to 0, \quad \beta_\eta(\tau_0) \to 0. \tag{32}$$

При значениях $\eta \leqslant 1$ полагаем

$$\beta_k(\tau_0, \eta) = P(\tau_0, \eta) - a(\tau_0, \eta) \to 0. \tag{33}$$

Тогда получаем общую форму асимптотических решений:

$$s(\eta) = S(\eta) - a(\tau_0, \eta)\,s_k, \quad h(\eta) = H(\eta) + a(\tau_0, \eta)\,h_k, \tag{34}$$

где

$$s_k = \frac{S_k}{1 + a_k(\tau_0)}, \qquad h_k = \frac{H_k}{1 - a_k(\tau_0)}, \qquad a_k(\tau_0) = \frac{Ae^{-k\tau_0}}{2k\varphi(1/k)}. \tag{35}$$

При консервативном рассеянии $\lambda = 1$, $k \to 0$

$$f_k \to f_0, \ s_0 = 1, \ h_0 = 1 - 2\,\frac{\tau + q(\tau) - q(\tau_0 - \tau) + q(\infty)}{\tau_0 + 2q(\infty)}. \tag{36}$$

Асимптотические решения для внутреннего светового поля следуют из (2):

$$j(\tau, \eta) \approx J(\tau, \eta) - P^*(\tau, \tau_0, \eta)\,j_k, \tag{37}$$

причем,

$$j_k = J_k(0)/[1 + P_k^*(0, \tau_0)]. \tag{38}$$

Здесь $P^*(\tau, \tau_0, \eta) = J_M(\tau, \eta)\,e^{-k\tau_0}$ — внутреннее решение в задаче Милна [11].

Решения (34)—(38) справедливы и для случая анизотропного рассеяния, если в них заменить

$$f_k \to \int\limits_0^1 \frac{f(\mu)\,b(-\mu)}{1 + k\mu}\,d\mu \tag{39}$$

где $b(\mu)$ определяет «глубинный режим» [1, 3]. Тогда они будут относиться к величинам, усредненным по азимуту. Для высших же гармоник из соотношения (1), записанного с учетом азимутальной зависимости, следует, вообще говоря, что $j^m_{(\tau,\eta)} = J^m_{(\tau,\eta)}$, $m \geqslant 1$.

Заметим, что асимптотические решения (37) верны при всех $\tau \leqslant \tau_0$, (при условии $\tau_0/2 \gg 1$), поскольку в качестве $j(\eta)$ в них может подразумеваться каждая из величин $j^+(\eta)$ или $j^-(\eta)$ из задачи (3).

Из вышеприведенных решений можно сделать интересное заключение: если первичные кванты сосредоточены вблизи границ слоя, то при консервативном рассеянии суммарное угловое распределение излучений, выходящих по обе границы слоя, в асимптотическом приближении не зависит от толщины слоя τ_0.

В случае больших значений углового аргумента $\eta > 1$ при переходе к асимптотическим выражениям опять используем приближения (32), но сохраняем величину $\beta(\tau_0, \eta)$ в приближении, соответствующем асимптотике (4.40), гл. VIII, [4]:

$$\beta(\tau_0, \eta) \to \beta_{as}(\tau_0, \eta) = \frac{\lambda}{2} \frac{e^{-\tau_0/\eta}}{\Lambda(\eta)}. \tag{38}$$

Заметим, что знаменатели в (12) можно переписать в виде:

$$D(\tau_0, \eta) \approx 1 - \frac{2}{\lambda} \Lambda(\eta) \beta_\eta(\tau_0) [\beta_{as}(\tau_0, \eta) - \beta(\tau_0, \eta)].$$

Теперь асимптотики имеют следующий общий вид:

$$\begin{aligned} s(\eta) &= S(\eta) - a(\tau_0, \eta) s_k - \eta\beta_{as}(\tau_0, \eta) s_\tau, \\ h(\eta) &= H(\eta) + a(\tau_0, \eta) h_k + \eta\beta_{as}(\tau_0, \eta) h_\eta, \end{aligned} \tag{39}$$

где s_k и h_k определяются из (35), а s_η и h_η из (28). При $\lambda = 1$ опять используются выражения (36).

В частности, полагая в (39) $\zeta = 0$, находим асимптотическое выражение для вероятности выхода кванта, поглощенного на глубине τ:

$$\begin{aligned} p(\tau, \tau_0, \eta) = P(\tau, \eta) &- \\ - \lambda k a_k(\tau_0) \frac{\eta\varphi(\eta)}{1 - k\eta} \frac{\bar{F}(\tau_0 - \tau, 1/k) - a_k(\tau_0)\bar{F}(\tau, 1/k)}{1 - a_k^2(\tau_0)} &- \\ - \frac{\lambda}{2} \frac{e^{-\tau_0/\eta}}{\Lambda(\eta)\varphi(\eta)} \Bigg[\bar{F}(\tau_0 - \tau, \eta) - 2k a_k(\tau_0) \frac{\eta}{1 + k\eta} &\times \\ \times \frac{\bar{F}(\tau_0, 1/k) - a_k(\tau_0)\bar{F}(\tau_0 - \tau, 1/k)}{1 - a_k^2(\tau_0)} \Bigg]&. \end{aligned} \tag{40}$$

При консервативном рассеянии это решение имеет вид

$$p(\tau, \tau_0, \eta) = P(\tau, \eta) +$$

$$+ \frac{h_0-1}{\eta} a(\tau_0, \eta) + \beta_{as}(\tau_0, \eta) \frac{\eta}{\varphi(\eta)} \left[\sqrt{3} \frac{h_0+1}{2} - \frac{\tilde{F}(\tau_0 - \tau, \eta)}{\eta} \right]. \quad (41)$$

В частных случаях $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ из (40) и (41) следуют известные асимптотические решения (при $\eta > 1$) для функций $\varphi(\tau_0, \eta)$ и $\psi(\tau_0, \eta)$, найденные В. В. Ивановым ([4], гл. VIII, формулы (4.41)—(4.44)).

Приложение I

Вспомогательные формулы. Согласно (6, 7), формулы п. 3 дают приближенное аналитическое решение задачи о нахождении излучения $I^{\pm}(\eta)$, выходящего через границы слоя толщины τ_0, при произвольном распределении первичных квантов $g(\tau, \zeta)$. Они выражаются через решения $J^{\pm}(\eta)$ задачи об излучении, выходящем из полубесконечной среды, содержащей в пограничном слое толщины τ_0 первичные кванты, распределенные по тому же закону $g(\tau, \zeta)$ или $g(\tau_0 - \tau, -\zeta)$. После определения $I^{\pm}(\eta)$ задача о внутреннем световом поле в слое толщины τ_0 сводится к вычислению интеграла (2).

Для мононаправленного источника, когда $g(\tau', \zeta') = \delta(\tau' - \tau)\,\delta(\zeta' - \zeta)$, в качестве $J^{\pm}(\eta)$ служит поверхностная функция Грина полубесконечного слоя

$$\Gamma(0, \tau, \eta, \zeta) \equiv X(\tau, \eta, \zeta) = \begin{cases} Y(\tau, \eta, \zeta), & \zeta \geqslant 0, \\ Z(\tau, \eta, \zeta), & \zeta \leqslant 0, \end{cases}$$

выражаемая посредством формул

$$\begin{aligned} Y(\tau, \eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{2} \eta\varphi(\eta) \frac{F(\tau, \eta) - F(\tau, \zeta)}{\eta - \zeta} + e^{-\tau/\zeta} \delta(\eta - \zeta), \\ Z(\tau, \eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{2} \eta\varphi(\eta) \frac{F(\tau, \eta) + \tilde{F}(\tau, \zeta)}{\eta + \zeta}, \end{aligned} \quad (I.1)$$

через две функции от двух аргументов $F(\tau, \eta)$ и $\tilde{F}(\tau, \zeta)$, определенные в п. 5. В итоге, через эти две функции алгебраически выражается решение задачи (4), (5).

В случае же произвольной функции $g(\tau, \zeta)$ величины $J^{\pm}(\eta)$ находятся интегрированием функции Грина по распределению g:

$$J^{+}(\eta) = \int_0^{\tau_0}\int_{-1}^{1} X(\tau', \eta, \mu')\, g(\tau', \mu')\, d\tau' d\mu',$$

$$J^{-}(\eta) = \int_0^{\tau_0}\int_{-1}^{1} X(\tau', \eta, \mu')\, g(\tau_0 - \tau', -\mu')\, d\tau' d\mu'.$$

Здесь существенно то обстоятельство, что операции интегрирования по распределению g проводятся над характеристиками полубесконечного слоя, а не слоя конечной толщины. Благодаря этому в ряде случаев возможно аналитическое интегрирование; численное же интегрирование по распределению g характеристик слоя конечной толщины привело бы к возникновению дополнительных погрешностей.

Приведем сводку вспомогательных формул, выражающих характеристики полубесконечной среды (при изотропном рассеянии) через функции F и $\tilde{F}$.

Интегралы типа (9):

$$Y_\eta(\tau, \zeta) = \frac{\tilde{F}(\tau, \eta) + F(\tau, \zeta)}{(\eta+\zeta)\,\varphi(\eta)}, \qquad Y_k(\tau, \zeta) = \frac{\tilde{F}\left(\tau, \dfrac{1}{k}\right) + F(\tau, \zeta)}{(1+k\zeta)\,\varphi(1/k)},$$

$$Z_\eta(\tau, \zeta) = \frac{\tilde{F}(\tau, \eta) - \tilde{F}(\tau, \zeta)}{(\eta-\zeta)\,\varphi(\eta)}, \qquad Z_k(\tau, \zeta) = \frac{\tilde{F}\left(\tau, \dfrac{1}{k}\right) - \tilde{F}(\tau, \zeta)}{(1-k\zeta)\,\varphi(1/k)},$$

$$Y_{-\eta}(\tau, \zeta) = \frac{e^{-\tau/\eta}}{\eta-\zeta} - \frac{2}{\lambda}\frac{\Lambda(\eta)}{\eta}\left[Y(\tau, \eta, \zeta) - e^{-\tau/\zeta}\,\delta(\eta-\zeta)\right], \tag{1.2}$$

$$Y_{-k}(\tau, \zeta) = \frac{e^{-k\tau}}{1-k\zeta}, \qquad Z_{-\eta}(\tau, \zeta) = \frac{e^{-\tau/\eta}}{\eta+\zeta} - \frac{2}{\lambda}\frac{\Lambda(\eta)}{\eta} Z(\tau, \eta, \zeta),$$

$$Z_{-k}(\tau, \zeta) = \frac{e^{-k\tau}}{1+k\zeta}.$$

При $\zeta = 0$:

$$Y(\tau, \eta, 0) = Z(\tau, \eta, 0) = P(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2}\varphi(\eta) F(\tau, \eta),$$

$$P_\eta(\tau) = \frac{\tilde{F}(\tau, \eta)}{\eta\varphi(\eta)}, \qquad P_k(\tau) = \frac{\tilde{F}(\tau, 1/k)}{\varphi(1/k)},$$

$$P_{-\eta}(\tau) = \frac{e^{-\tau/\eta}}{\eta} - \frac{2}{\lambda}\frac{\Lambda(\eta)}{\eta} P(\tau, \eta), \qquad P_{-k}(\tau) = e^{-k\tau}. \tag{1.3}$$

В частности, при $\tau = 0$:

$$\frac{\lambda}{2}\eta\varphi_\eta = 1 - \frac{1}{\varphi(\eta)}, \quad \frac{\lambda}{2}\varphi_k = 1 - \frac{1}{\varphi(1/k)},$$
$$\frac{\lambda}{2}\eta\varphi_{-\eta} = 1 - \Lambda(\eta)\varphi(\eta), \quad \frac{\lambda}{2}\varphi_{-k} = 1. \tag{I.4}$$

Интегралы от величины $a(\tau, \eta)$:

$$a_\eta(\eta) = \frac{C(\tau)}{(1+k\eta)\varphi(\eta)}, \quad a_k(\tau) = \frac{C(\tau)}{2k\varphi(1/k)}. \tag{I.5}$$

Функции $F(\tau, \eta)$ и $\bar{F}(\tau, \zeta)$ табулированы в работе [12]. Практически наиболее простой способ вычисления этих функций предоставляется рекуррентной формулой

$$F(\tau + t, \eta) = F(\tau, \eta)e^{-t/\eta} + \eta\int_0^1\left[\frac{\lambda}{2}\varphi(\mu)\frac{F(t, \mu) - F(t, \eta)}{\mu - \eta}\right]F(\tau, \mu)\,d\mu \tag{I.6}$$

и следующим выражением $\bar{F}$ через F:

$$\bar{F}(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2}\zeta\varphi(\zeta)\int_0^1\frac{F(\tau, \mu)}{\eta + \mu}\varphi(\mu)\,d\mu. \tag{I.7}$$

При малом шаге t функция $F(t, \eta)$ легко может быть посчитана с помощью резольвентной функции $\Phi(\tau)$ [2] (см., например, [12]):

$$F(t, \eta) = e^{-t/\eta} + \int_0^t \Phi(\tau)\,e^{-\frac{t-\tau}{\eta}}\,d\tau. \tag{I.8}$$

Приведем также частные значения функций $F(\tau, \eta)$ и $\bar{F}(\tau, \zeta)$:

$$F(0, \eta) = 1, \quad \bar{F}(0, \zeta) = \varphi(\zeta) - 1, \quad \Phi(\tau) = \lim_{\eta\to 0}\frac{F(\tau, \eta)}{\eta} = \lim_{\zeta\to 0}\frac{\bar{F}(\tau, \zeta)}{\zeta}, \tag{I.9}$$

а также отметим, что

$$\frac{1}{\eta}F(\tau, \eta) = \lim_{\mu\to 0}\frac{Y(\tau, \mu, \eta)}{\mu}, \quad \frac{1}{\zeta}\bar{F}(\tau, \zeta) = \lim_{\mu\to 0}\frac{Z(\tau, \mu, \zeta)}{\mu}. \tag{I.10}$$

Приложение II

Решение уравнений. Соотношения (4), (5) являются уравнениями относительно неизвестных функций $s(\eta)$ и $h(\eta)$ только при значениях $\eta \leqslant 1$ Для других значений η вне интервала (0.1) они представляют собой явные выражения для неизвестных функций s и h через их значения при $\eta \leqslant 1$. Так что, если бы были известны точные аналитические решения $s(\eta)$ и $h(\eta)$ для $\eta \in (0, 1)$ соотношения (4), (5) позволили бы аналитически продолжить их на всю комплексную плоскость значений η. Поскольку найти точное решение для s и h при $\eta \leqslant 1$ не представляется возможным, тем более затруднительным становится вопрос об их аналитическом продолжении. Ведь, вообще говоря, приближенные решения, справедливые при $\eta \leqslant 1$, не могут быть распространены на другие значения η. Например, не могут быть аналитически продолжены приближенные решения, найденные в работе [6] — при этом не может быть обеспечена одинаковая степень погрешности для всех значений η. Для справедливости приближенных решений на всей комплексной плоскости (η) необходимо, чтобы само приближение, в котором решается задача, с данной точностью выполнялось для всех значений η. Таким свойством как раз обладает используемое в настоящей статье приближение (23), но не (22).

Введем интегральные операторы

$$\bar{f}_{\pm\eta} = \int_0^1 \frac{\bar{F}(\tau, \mu)}{\eta \pm \mu} f(\mu)\, d\mu, \qquad \bar{f}_{\pm k} = \int_0^1 \frac{\bar{F}(\tau, \mu)}{1 \pm k\mu} f(\mu)\, d\mu. \tag{II.1}$$

Действуя ими на уравнение (4), находим

$$\begin{gathered} S_\eta = s_\eta + \eta P_\eta(\tau_0)\, s_{-\eta} - \tilde{s}_{-\eta}/\varphi(\eta), \quad S_k = s_k + P_k(\tau_0)\, s_{-k} - \bar{s}_{-k}/\varphi(1/k), \\ S_{-\eta} = s_{-\eta} + e^{-\tau_0/\eta} s_\eta - \frac{2}{\lambda}\frac{\Lambda(\eta)}{\eta}[S(\eta) - s(\eta)], \quad S_{-k} = s_{-k} + e^{-k\tau_0} s_k. \end{gathered} \tag{II.2}$$

Аналогично, из уравнения (5) получаем

$$\begin{gathered} H_\eta = h_\eta - \eta P_\eta(\tau_0)\, h_{-\eta} + \bar{h}_{-\eta}/\varphi(\eta), \quad H_k = h_k - P_k(\tau_0)\, h_{-k} + \bar{h}_{-k}/\varphi(1/k), \\ H_{-\eta} = h_{-\eta} - e^{-\tau_0/\eta} h_\eta + \frac{2}{\lambda}\frac{\Lambda(\eta)}{\eta}[h(\eta) - H(\eta)], \quad H_{-k} = h_{-k} - e^{-k\tau_0} h_k. \end{gathered} \tag{II.3}$$

Сами исходные уравнения (4.5) в обозначениях (II.1) имеют вид

$$\begin{gathered} S(\eta) = s(\eta) + \eta P(\tau_0, \eta)\, s_\eta + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\tilde{s}_\eta, \\ H(\eta) = h(\eta) - \eta P(\tau_0, \eta)\, h_\eta - \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\tilde{h}_\eta. \end{gathered} \tag{II.4}$$

Выразим во всех уравнениях величины $s_{\pm\eta}$ и $h_{\pm\eta}$ через $\bar{s}_{\pm\eta}$ и $\bar{h}_{\pm\eta}$, а для вычисления последних используем приближение (23). Тогда получим

$$S_\eta = s_\eta + \eta\beta_\eta(\tau_0)\, s_{-\eta} + a_\eta(\tau_0)\, s_k, \quad S_k = s_k + \beta_k(\tau_0)\, s_{-k} + a_k(\tau_0)\, s_k,$$

$$S_{-\eta} = s_{-\eta} + e^{-\tau_0/\eta} s_\eta - \frac{2}{\lambda}\frac{\Lambda(\eta)}{\eta}[S(\eta) - s(\eta)], \quad S_{-k} = s_{-k} + e^{-k\tau_0} s_k, \tag{II.5}$$

и, аналогично,

$$H_\eta = h_\eta - \eta\beta_\eta(\tau_0)\, h_{-\eta} - a_\eta(\tau_0)\, h_k, \quad H_k = h_k - \beta_k(\tau_0)\, h_{-k} - a_k(\tau_0)\, h_k,$$

$$H_{-\eta} = h_{-\eta} - e^{-\tau_0/\eta} h_\eta + \frac{2}{\lambda}\frac{\Lambda(\eta)}{\eta}[h(\eta) - H(\eta)], \; H_{-k} = h_{-k} - e^{-k\tau_0} h_k. \tag{II.6}$$

Решение системы алгебраических уравнений (II.4)—(II.6) дается выражениями (11)—(15) раздела 3.

Чтобы перейти от этих решений к решениям для случая консервативного рассеяния, нужно в них совершить предельный переход $\lambda \to 1$. При этом в выражении для s_k достаточно ограничиться разложениями с точностью до первой степени k, а в выражении для h_k необходимо сохранить также члены, содержащие k^2. Заметим, что при $k \to 0$ неопределенность возникает только в выражении для h_k.

Для вывода формулы (16) мы получили разложение по малым k резольвентной функции:

$$\Phi_\lambda(\tau) = \Phi_1(\tau) + \sqrt{3}(e^{-k\tau} - 1) - k\sqrt{3}[(e^{-k\tau} - 1)\, q(\infty) + q(\tau)] \tag{II.7}$$

и с ее помощью построили разложения функций F_λ и $\tilde{F}_\lambda$;

$$F_\lambda(\tau, \eta) = F_1(\tau, \eta)(1 + k\eta) -$$
$$-\eta\sqrt{3}\left(1 - \frac{e^{-k\tau}}{1 - k\eta} + e^{-\tau/\eta}\frac{k\eta}{1 - k\eta}\right)(1 - kq(\infty)) -$$
$$- k\eta\sqrt{3}[q(\tau) + \eta(1 - e^{-\tau/\eta})]. \tag{II.8}$$

$$\tilde{F}_\lambda(\tau, \eta) = \tilde{F}_1(\tau, \eta)(1 - k\eta) +$$
$$+ \sqrt{3}\,\eta(1 - kq(\infty))\left(\frac{e^{-k\tau}}{1 + k\eta} - 1\right) - \sqrt{3}\,k\eta[q(\tau) - \eta]. \tag{II.9}$$

Разложение функции $C_\lambda(\tau)$ следует подстановкой выражения (II.9) в формулу (24).

Заметим, что последние соотношения для s_{-k} и h_{-k} в (II.5) и (II.6) являются точными. В консервативном случае они имеют вид

$$\bar{s}_0 = \sqrt{3}[S_1 - q(\tau_0)], \quad h_1 = \frac{1 - h_0}{2}\tau_0 - \tau + \zeta, \tag{II.10}$$

где обозначено $f_1 = \int\limits_0^1 \mu f(\mu)\, d\mu$.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

THE ANALYTIC SOLUTIONS OF HIGH ACCURACY OF MONOCHROMATIC LIGHT SCATTERING PROBLEM IN A FLAT LAYER

M. A. MNATSAKANIAN

The approximate analytic solutions of monochromatic and isotropic light scattering problem for an optically finite layer are obtained which are valid with high accuracy for any value of angular argument η on all the complex plane. By $\eta \to \infty$ they give the high-accurate solutions of the problem of the mean number of scattering of a photon in the layer.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
2. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
3. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
4. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
5. *H. C. van de Hulst*, Icarus, 3, 336, 1964.
6. *М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 11, 659, 1975; 12, 451, 1976.
7. *М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 225, 1049, 1975.
8. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., 113, 449, 1966.
9. *J. Buell, R. Kalaba, S. Ueno*, Астрофизика, 7, 23, 1970.
10. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 3, 5, 1967.
11. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 10, 193, 1974.
12. *Р. Р. Андреасян*, Сообщ. Бюраканской обс., 50, 79, 1978.