

Новые логические связки в суперинтуиционистских логиках: подход П.С.Новикова

А. Д. Яшин

Московский городской психолого – педагогический университет

E-mail: yashin.alexandr@ya.ru

В классической двузначной, а также интуиционистской, логике высказываний рассматриваются *стандартные* логические связки $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$. Эквиваленция $\leftrightarrow$ вводится как сокращение:

$$A \leftrightarrow B \doteq (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Кроме того, можно вводить в язык стандартные логические константы 0 (ложь) и 1 (истина).

Класс Fm формул строится индуктивно из пропозициональных переменных и констант с помощью связок обычным путём.

Разные способы представления классической логики Cl и интуиционистской Int логик (семантические и дедуктивные) хорошо известны. Из них вытекает, в частности включение

$$Int \subset Cl,$$

причём это включение собственное.

Отметим некоторые свойства этих логик:

а) Cl и Int замкнуты относительно правил подстановки и модус поненс ($A, A \rightarrow B / B$);

б) обе содержат т.н. *аксиомы (эквивалентной) замены* для стандартных связок:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q),$$

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s) \rightarrow (p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge s),$$

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s) \rightarrow (p \vee r) \leftrightarrow (q \vee s),$$

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow s).$$

Из этих аксиом вытекает *схема замены эквивалентных для произвольных формул*:

$$(p_1 \leftrightarrow q_1) \wedge \dots \wedge (p_n \leftrightarrow q_n) \rightarrow (D(p_1, \dots, p_n) \leftrightarrow D(q_1, \dots, q_n)).$$

Из схемы замены эквивалентных вытекает замкнутость относительно правил замены эквивалентных (но не наоборот!):

$$\frac{(A_1 \leftrightarrow B_1) \wedge \dots \wedge (A_n \leftrightarrow B_n)}{D(A_1, \dots, A_n) \leftrightarrow D(B_1, \dots, B_n)}.$$

Суперинтуиционистской логикой (с.и.л.) называют произвольное подмножество L Fm , включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int и замкнут относительно правил *modus ponens* и подстановки.

Через $L + A$ обозначается наименьшая с.н.л., включающая логику L и содержащая формулу A .

Семейство с.н.л. активно изучалось, в частности, оно оказалось континуальным.

В 50-е гг. 20 в. П.С. Новиков, по видимому, имея в виду активно развивающиеся разделы модальной логики (на основе классической двузначной логики), поставил задачу о возможности присоединения к данной с.н.л. (в частности, Int и Cl) новой одноместной операции. При этом он предложил свою трактовку "новизны" (в опубликованных работах самого П.С.Новикова описание его подхода найти не удалось, положение основано на работах Я.С.Сметанича [1959,1960]).

Добавив к языку одноместную связку $\varphi(\cdot)$, расширенный класс формул обозначим через $Fm(\varphi)$, при этом формулы без φ будем называть *чистыми* (Я.С.Сметанич изменял термин *формулы чистой логики*).

Под φ -логикой будем понимать произвольное подмножество $L \subset Fm(\varphi)$, включающее Int и замкнутое относительно правил *modus ponens*, подстановки и замены равносильных (распространённые на расширенный класс формул).

φ -Логика L называется *консервативным расширением* с.н.логики L , если для всякой чистой формулы A из $A \in L$ следует $A \in L$.

Далее, *явным соотношением для φ* называется формула вида $\varphi(p) \leftrightarrow B$, где B — чистая.

Естественно, что связка φ может считаться новой по отношению к стандартным связкам в φ -логике L , если последняя не содержит никакого явного соотношения для

П.С. Новиков предлагает более сильную трактовку: не только не содержит явного соотношения, но никакое явное соотношение не может быть присоединено! Точная формулировка такова:

Пусть L - с.н.л. φ -логика L определяет новую логическую связку в L , если выполнены следующие условия:

- L содержит аксиому замены для φ ;
- L консервативна над L ;
- для любой чистой формулы B φ -логика $L + \varphi(p) \leftrightarrow B$ не консервативна над L (*невозможность присоединения явных соотношений*).

Первое условие введено, видимо, потому, что для стандартных связок оно выполнено (это условие сразу отмечает целый ряд кажущихся возможными примеров типа аналогов классических модальностей, прецедентное отрицание, и др.). Второе условия означает, что связка φ является "экстраполяцией" по отношению к "исходной теории" L , и оно вместе с новыми способами умозаключений не должно "нарушать" исходную теорию. Наконец, "невозможность присоединения" трактуется с точки зрения нарушения консервативности.

В упомянутых выше работах Я.С.Сметанич привёл пример φ -логики, определяющей новую одноместную связку в Int , причём эта связка оказалась константной. А.В. Бессонов [1977] модификацией примера Я.С. Сметанича показал, что существует континуум φ -логик, каждая из которых определяет новую связку в Int .

Какие же из φ -логик заслуживают рассмотрения? П.С. Новиков предлагает рассмотреть максимальные консервативные расширения. Именно, φ -логика L *полна* по Новикову над L , если

- $\mathcal{L}$ содержит аксиому замены для φ ;
- $\mathcal{L}$ консервативна над L ;
- для любой формулы $B \in Fm(\varphi) \setminus \mathcal{L}$ φ -логика $\mathcal{L} + B$ не консервативна над L (невозможность присоединения новых аксиом).

Проблемой-минимум Новикова для L называется задача построения явного примера полной над L φ -логики с новой связкой. Проблемой максимум называется задача описания всего семейства пополнений для L .

В докладе предполагается рассказать о продвижениях в решении проблемы-минимум и проблемы-максимум.

Список литературы

- [1] Сметанич Я.С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1960. — Т. 9. — С. 357–371.
- [2] Сметанич Я.С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией // ДАН СССР. — 1959. — Т. 139, № 2. — С. 309–312.
- [3] Бессонов А.Б. О новых операциях в интуиционистском исчислении высказываний // Матем. заметки. — 1977. — Т. 22. Вып. 1. — С. 23–28.