

Свободные А-биполугруппы

Ю. М. Мовсисян, С. С. Давидов, М. Г. Сафарян

Ереванский государственный университет

E-mail: yurimovsisyan@yahoo.com, davidov@ysu.am, mher.safaryan@gmail.com

Предварительные понятия и результаты

Определение 1. Алгебра $(A, \neg, \vdash)$ с двумя бинарными операциями называется А-биполугруппой, если она удовлетворяет следующим тождествам:

$$(A1) (x \neg y) \neg z = x \neg (y \neg z),$$

$$(A2) (x \neg y) \neg z = x \neg (y \vdash z),$$

$$(A3) (x \neg y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),$$

$$(A4) (x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z).$$

Пусть ϵ – произвольный символ, введем следующие множества индексов:

$$I^n = \{0, 1\}^{n-1} = \{\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}) : \epsilon_k \in \{0, 1\}, k = \overline{1, n-1}\}, n > 1,$$

$$I^1 = \{\epsilon\}, I = \bigcup_{n \geq 1} I^n.$$

Определение 3. Пусть $(A, \neg, \vdash)$ – А-биполугруппа. Для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ и любого $\epsilon \in I^n$ по индукции определим элемент

$$x_1 x_2 \dots x_n \epsilon \in A \quad (*)$$

следующим образом:

$$x_1 \epsilon = x_1,$$

$$x_1 x_2 \dots x_n (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-2}, 0) = x_1 \vdash x_2 \dots x_n (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-2}),$$

$$x_1 \dots x_{n-1} x_n (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-2}, 1) = x_1 \dots x_{n-1} (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-2}) \neg x_n.$$

В частности, если $\epsilon = (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n-1})$ то $x_1 \dots x_n \epsilon = x_1 \neg \dots \neg x_n$, если $\epsilon = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1})$ то $x_1 \dots x_n \epsilon = x_1 \vdash \dots \vdash x_n$.

Теорема 1. Пусть $t = x_1 \dots x_n$ – терм в А-биполугруппе. Тогда существует такой индекс $\epsilon \in I^n$, что

$$t = x_1 x_2 \dots x_n \epsilon.$$

В силу теоремы 1 в А-биполугруппе, каждый терм t приводится к виду $(*)$, который будем называть канонической формой терма t . Например, для терма $((x_1 \neg x_2) \vdash (x_3 \neg x_4)) \neg (x_5 \vdash x_6)$ каноническая форма будет:

$$((x_1 \neg x_2) \vdash (x_3 \neg x_4)) \neg (x_5 \vdash x_6) = (x_1 x_2 (1) \vdash x_3 x_4 (1)) \neg x_5 x_6 (0) =$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 (1, 0, 0) \dashv x_5 x_6 (0) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 (1, 0, 0, 1, 1).$$

Покажем, что каноническая форма для каждого термина единственна, для чего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Алгебра индексов $(I, \dashv, \vdash)$ является А-биполугруппой, где операции $\dashv, \vdash$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \dashv (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}) &= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^m), \\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \vdash (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}) &= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^n). \end{aligned}$$

2. Основные результаты

Теорема 2. В А-биполугруппе каноническая форма единственна для любого термина.

Перейдем к определению свободной А-биполугруппы. Пусть X — произвольное непустое множество, $n \in N$. Обозначим:

$$A(X) = \bigcup_{n \geq 1} X^n \times I^n,$$

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in X, k = \overline{1, n}\}.$$

Для удобства элементы $A(X)$ обозначим через $(x_1, x_2, \dots, x_n)\varepsilon$, вместо $((x_1, x_2, \dots, x_n), \varepsilon)$, а множества $X \times I^1$ и X не будем различать: то есть символ $x \in X$ будем отождествлять с элементом $x\varepsilon \in A(X)$. Определим операции $\dashv, \vdash$ на $A(X)$ следующим образом:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k)\varepsilon \dashv (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_l)\theta = (x_1, x_2, \dots, x_l)\varepsilon \dashv \theta,$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_k)\varepsilon \vdash (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_l)\theta = (x_1, x_2, \dots, x_l)\varepsilon \vdash \theta.$$

Обозначим: $Y_n = X^n \times I^n$, $n \in N$.

Теорема 3. Бинарная алгебра $(A(X), \dashv, \vdash)$ является свободной А-биполугруппой с системой свободных образующих X .

Приведем другое описание для свободной А-биполугруппы. Пусть $F[X]$ — свободная полугруппа с системой свободных образующих X . Для каждого слова $\omega \in F[X]$ через $|\omega|$ обозначим длину слова ω . Определим операции $\dashv, \vdash$ на множестве

$$FA = \{(\omega, \varepsilon) \in F[X] \times I : \varepsilon \in I^{|\omega|}\}$$

следующим образом:

$$(\omega_1, \varepsilon) \dashv (\omega_2, \theta) = (\omega_1 \omega_2, \varepsilon \dashv \theta),$$

$$(\omega_1, \varepsilon) \vdash (\omega_2, \theta) = (\omega_1 \omega_2, \varepsilon \vdash \theta),$$

где $(\omega_1, \varepsilon), (\omega_2, \theta) \in FA$. Непосредственно проверяется, что бинарная алгебра $(FA, \dashv, \vdash)$ является А-биполугруппой, которую будем обозначать через $FA[X]$.

Теорема 4. А-биполугруппы $(A(X), \dashv, \vdash)$ и $FA[X]$ изоморфны. Следовательно бинарная алгебра $FA[X]$ также является свободной А-биполугруппой с системой

свободных образующих X .

Теорема 5. A -биполугруппа индексов $(I, -, \vdash)$ свободна, и изоморфна A -биполугруппе $FA[X]$, где $|X| = 1$.

Таким образом, свободная A -биполугруппа ранга 1 совпадает с A -биполугруппой $(I, -, \vdash)$ с точностью до изоморфизма.

Список литературы

- [1] Yu.M.Movsisyan, *Boolean bisemigroup, Bigroups and Local Bigroups*, Computer Science and Information Technologies, September 19-23, 2005, p.97-105.
- [2] А.В.Жучок, *Димоноты, Алгебра и Логика*, 50, 4(2011), 471-496.
- [3] J.-L.Loday, *Dialgebras* in J.-L.Loday, A.Frabetty, F.Chapton, and F.Goichot (editors), *Dialgebras and Related Operads*, Springer(2001), p.7-66.