АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 16 | МАЙ, 1980 | ВЫПУСК 2

УДК 523.035.2

ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОЙ АТМОСФЕРЕ ПРИ АНИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ. РАЗДЕЛЕНИЕ УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Э. Г. ЯНОВИЦКИЙ

Поступила 6 февраля 1979

Рассматривается плоская атмосфера оптической толщины τ_0, освещенная параллельными лучами. Показано, что интенсивность излучения в среде на некоторой оптической глубине τ выражается через приведенную функцию источника $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$ (см. (7)), зависящую только от одной угловой переменной. При этом вычисление интенсивности не требует какого-либо интегрирования по τ: следует лишь знать $D^m(\tau, \mu^0; \tau_0)$ на этой глубине и границах. Получено сингулярное уравнение для функции $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$ (см. (28)). Дана новая схема этапов вычисления поля излучения в плоском слое.

Интенсивность излучения в плоской атмосфере, освещенной параллельными лучами, после разложения ее в ряд по азимуту для каждой азимутальной гармоники будет характеризоваться двумя угловыми переменными μ и μ_0, которые определяют направления рассеянного и падающего излучения. Иными словами, если дискретизировать эти переменные, то можно сказать, что поле излучения в слое на заданной глубине определяется прямоугольной матрицей $(-1 \leqslant \mu \leqslant 1; \quad 0 \leqslant \mu_0 \leqslant 1)$. Введенные В. А. Амбарцумяном [1] в начале 40-х годов принципы инвариантности позволили разделить переменные в задаче о диффузном отражении и пропускании. Именно, оказалось возможным вместо вычисления матриц интенсивности отраженного и пропущенного излучения вычислять лишь две функции, зависящие только от одной угловой переменной (то есть при учете дискретизации — два вектора). Этим самым задача существенно упрощалась. В дальнейшем стройная теория, основанная на разделении переменных для неизотропно рассеивающих атмосфер, была создана в работах

В. В. Соболева, изложенных в его монографии [2]. Было, в частности, показано, что вместо функции источника, зависящей от μ и μ_0, достаточно вычислить введенную им функцию $D(\tau, \mu_0)$ (см. первый раздел настоящей работы). Что же касается интенсивности излучения в слое, то разделение переменных для этой величины удалось провести лишь сравнительно недавно (см. [3—8]).

В статье автора [6] было выполнено разделение переменных для интенсивности излучения в полубесконечной атмосфере при анизотропном рассеянии. Был получен ряд новых соотношений и предложен метод численного решения задачи. Настоящая работа является продолжением предыдущей [6] и посвящена изучению поля излучения в плоской атмосфере конечной оптической толщины, освещенной параллельными лучами. План изложения здесь таков. В первых трех разделах статьи без вывода приводятся основные формулы, позволяющие разделить переменные для интенсивности излучения в плоском слое, а лишь затем дан вывод тех новых соотношений, которые встречаются в предыдущих разделах. Это делается для того, чтобы облегчить читателю восприятие схемы этапов вычисления поля излучения в плоском слое, которая приводится в третьем разделе настоящей статьи.

В следующей работе мы получим соотношения инвариантности и рассмотрим некоторые их следствия.

1. *Интенсивность излучения в плоском слое.* Рассмотрим плоский однородный слой атмосферы оптической толщины τ_0, освещенный параллельными лучами, падающими на границу под углом $\arccos \mu_0$ к внешней нормали при азимуте φ_0. Обозначим через μ косинус угла между направлением распространения излучения в азимуте φ и положительным направлением оси τ, так что $\mu > 0$ для излучения, идущего в сторону роста τ (вниз). Пусть на границе падающее излучение создает освещенность $\pi\mu_0$. Оптические свойства атмосферы характеризуются альбедо однократного рассеяния λ и индикатрисой рассеяния $\chi(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0)$, которую будем считать представимой в виде суммы n членов ее разложения в ряд по полиномам Лежандра. В таком случае азимутальные гармоники функции источника $B(\tau, \mu, \mu_0, \varphi; \tau_0)$ и интенсивности диффузного излучения $I(\tau, \mu, \mu_0, \varphi; \tau_0)$ можно представить в виде

$$B^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) = \sum_{i=m}^{n} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} B_i^m(\tau, \mu_0; \tau_0)\, P_i^m(\mu), \tag{1}$$

$$I^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) = \sum_{i=m}^{n} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} I_i^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)\, P_i^m(\mu), \tag{2}$$

где

$$I_i^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) = \int_0^\tau B_i^m(t, \mu_0; \tau_0)\, e^{-\frac{\tau-t}{\mu}} \frac{dt}{\mu}, \tag{3}$$

$$(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$$

$$I_i^m(\tau, -\mu, \mu_0; \tau_0) = \int_\tau^{\tau_0} B_i^m(t, \mu_0; \tau_0)\, e^{-\frac{t-\tau_0}{\mu}} \frac{dt}{\mu}. \tag{4}$$

Как показал В. В. Соболев, функции $B_i^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$ $(i = m, m + 1, \ldots, n)$ можно выразить через одну введенную им функцию $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$, которую мы будем называть, как и ранее [6], приведенной функцией источника. Формулы для нахождения функций $B_i^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$, полученные В. В. Соболевым ([2], гл. VI, § 1,3), нетрудно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} B_i^m(\tau, \mu_0; \tau_0) = {} & R_i^m(\mu_0) D^m(\tau, \mu_0; \tau_0) + \\ & + P_m^m(\mu_0) \Big\{ X^m(\mu_0, \tau_0) \int_0^1 [Q_i^m(\mu_0, \mu) D^m(\tau, \mu; \tau_0) + \\ & + S_i^m(\mu_0, \mu) D^m(\tau_0 - \tau, \mu; \tau_0)]\, d\mu + \\ & + (-1)^{i+m} Y^m(\mu_0, \tau_0) \int_0^1 [S_i^m(-\mu_0, \mu) D^m(\tau, \mu; \tau_0) + \\ & + Q_i^m(-\mu_0, \mu) D^m(\tau_0 - \tau, \mu; \tau_0)]\, d\mu \Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} Q_i^m(\mu_0, \mu) &= \sum_{k=m+1}^{n} \left[q_k^m(\mu_0, \tau_0) + \frac{k+m-1}{k-m} q_{k-2}^m(\mu_0, \tau_0) \right] g_{ik}^m(\mu), \\ S_i^m(\mu_0, \mu) &= \sum_{k=m+1}^{n} \left[s_k^m(\mu_0, \tau_0) + \frac{k+m-1}{k-m} s_{k-2}^m(\mu_0, \tau_0) \right] g_{ik}^m(-\mu), \end{aligned} \tag{6}$$

а функция $D^m(\tau, \mu; \tau_0)$ определяется интегральным уравнением

$$D^m(\tau, \mu; \tau_0) = \int_0^{\tau_0} K^m(|\tau - t|)\, D^m(t, \mu; \tau_0)\, dt + \frac{\lambda}{4} e^{-\tau/\mu}, \tag{7}$$

где

$$K^m(\tau) = \int_0^1 \Psi^m(\mu)\, e^{-\tau/\mu} \frac{d\mu}{\mu}, \tag{8}$$

причем

$$D^m(0, \mu; \tau_0) = \frac{\lambda}{4} X^m(\mu, \tau_0); \quad D^m(\tau_0, \mu; \tau_0) = \frac{\lambda}{4} Y^m(\mu, \tau_0). \tag{9}$$

Этим самым осуществляется разделение переменных для функции источника (1).

Характеристическую функцию $\Psi^m(\mu)$, функции $R_i^m(\mu)$ и $g_{ik}^m(\mu)$ можно легко вычислить, если известны коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния x_i (см. [2], гл. V, § 1). Величины же $q_k^m(\mu_0, \tau_0)$ и $s_k^m(\mu_0, \tau_0)$ есть полиномы степени $n-m$ по μ_0. Они могут быть найдены путем решения систем линейных алгебраических уравнений, если функции $X^m(\mu, \tau_0)$ и $Y^m(\mu, \tau_0)$ считать известными (см. [2], гл. VI, § 3; гл. VII, § 7).

Так же, как и в случае полубесконечной атмосферы [6] рассмотрим псевдоуравнение переноса (терминология Чандрасекара [9], § 89. 3), определяющее приведенную интенсивность $J^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)$:

$$\mu \frac{dJ^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)}{d\tau} + J^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) = D^m(\tau, \mu_0; \tau_0), \tag{10}$$

где

$$D^m(\tau, \mu_0; \tau_0) = \int_{-1}^{+1} J^m(\tau, \mu', \mu_0; \tau_0)\, \Psi^m(\mu')\, d\mu' + \frac{\lambda}{4} e^{-\tau/\mu_0}, \tag{11}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} J^m(0, \mu, \mu_0; \tau_0) &= 0 \qquad (\mu > 0), \\ J^m(\tau_0, \mu, \mu_0; \tau_0) &= 0 \qquad (\mu < 0). \end{aligned} \tag{12}$$

В таком случае из (10)—(12) имеем

$$J^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) = \int_0^{\tau} D^m(t, \mu_0; \tau_0)\, e^{-\frac{\tau - t}{\mu}} \frac{dt}{\mu}, \tag{13}$$

$$(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$$

$$J^m(\tau, -\mu, \mu_0; \tau_0) = \int_{\tau}^{\tau_0} D^m(t, \mu_0; \tau_0)\, e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu}. \tag{14}$$

Следовательно, из (3)—(5) и (13), (14) легко получаем $(-1 \leqslant \mu \leqslant 1)$

$$
\begin{aligned}
I_i^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) = R_i^m(\mu_0) J^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) + \\
+ P_m^m(\mu_0) \Big\{ X^m(\mu_0, \tau_0) \int_0^1 [Q_i^m(\mu_0, \mu') J^m(\tau, \mu, \mu'; \tau_0) + \\
+ S_i^m(\mu_0, \mu') J^m(\tau_0 - \tau, -\mu, \mu'; \tau_0)] d\mu' + \\
+ (-1)^{i+m} Y^m(\mu_0, \tau_0) \int_0^1 [S_i^m(-\mu_0, \mu') J^m(\tau, \mu, \mu'; \tau_0) + \\
+ Q_i^m(-\mu_0, \mu') J^m(\tau_0 - \tau, -\mu, \mu'; \tau_0)] d\mu' \Big\}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Как видим, составляющая интенсивности непосредственно выражается через приведенную интенсивность. В свою очередь, как будет показано ниже, приведенная интенсивность следующим образом связана с приведенной функцией источника:

$$
\begin{aligned}
X^m(\mu, \tau_0) J^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) \mu_0^{-1} = \\
= \frac{D^m(\tau, \mu; \tau_0) X^m(\mu_0, \tau_0) - D^m(\tau, \mu_0; \tau_0) X^m(\mu, \tau_0)}{\mu - \mu_0} + \\
+ \left[Z^m(\tau_0 - \tau, \mu; \tau_0) X^m(\mu, \tau_0) - \frac{4}{\lambda} Z^m(\tau_0, \mu; \tau_0) D^m(\tau, \mu; \tau_0) \right] s^m(\mu, \mu_0; \tau_0),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
X^m(\mu, \tau_0) J^m(\tau, -\mu, \mu_0; \tau_0) \mu_0^{-1} = \\
= \frac{X^m(\mu, \tau_0) D^m(\tau, \mu_0; \tau_0) - Y^m(\mu_0, \tau_0) D^m(\tau_0 - \tau, \mu; \tau_0)}{\mu + \mu_0} + \\
+ \left[X^m(\mu, \tau_0) Z^m(\tau, \mu; \tau_0) - \frac{4}{\lambda} D^m(\tau_0 - \tau, \mu; \tau_0) Z^m(\tau_0, \mu; \tau_0) \right] r^m(\mu, \mu_0, \tau_0),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где

$$
Z^m(\tau, \mu; \tau_0) = \frac{4}{\lambda} \mu \int_0^1 \frac{D^m(\tau, \mu'; \tau_0)}{\mu + \mu_0} \Psi^m(\mu') d\mu', \tag{18}
$$

а, как мы будем называть, приведенные коэффициенты отражения и пропускания даются соответственно формулами

$$r^m(\mu, \mu_0; \tau_0) = \frac{\lambda}{4} \frac{X^m(\mu, \tau_0) X^m(\mu_0, \tau_0) - Y^m(\mu, \tau_0) Y^m(\mu_0, \tau_0)}{\mu + \mu_0}, \quad (19)$$

$$s^m(\mu, \mu_0; \tau_0) = \frac{\lambda}{4} \frac{X^m(\mu_0, \tau_0) Y^m(\mu, \tau_0) - X^m(\mu, \tau_0) Y^m(\mu_0, \tau_0)}{\mu - \mu_0}, \quad (20)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} J^m(0, -\mu, \mu_0; \tau_0) &= r^m(\mu, \mu_0; \tau_0)\mu_0, \\ J^m(\tau_0, \mu, \mu_0; \tau_0) &= s^m(\mu, \mu_0; \tau_0)\mu_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Таким образом, нахождение азимутальной гармоники функции источника $B^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)$ сводится к нахождению приведенной функции источника $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$, которая заметно проще, поскольку зависит лишь от одной угловой переменной. После определения $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$ и ее моментов по μ_0 задача отыскания функции $B^m(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)$ становится чисто алгебраической. Наконец (и это наиболее важно), как следует из (2), (9), (15)—(18), задача отыскания интенсивности излучения в атмосфере на глубине τ также сводится лишь к нахождению функции $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$ на этой глубине и границах. Какого-либо интегрирования по пространственной координате τ производить не нужно. Как видим, формулы (16) и (17) по существу обобщают на произвольную оптическую глубину при анизотропном рассеянии известный результат В. А. Амбарцумяна [1], получившего решение задачи о диффузном отражении и пропускании света плоским слоем.

Учитывая отмеченную выше важность функции $D^m(\tau, \mu; \tau_0)$, в следующем разделе настоящей статьи мы запишем основные уравнения, которые могут служить для ее нахождения. При этом, для простоты, мы будем опускать верхний индекс m, так что все приводимые ниже соотношения (если противное не оговорено) будут считаться справедливыми для любой азимутальной гармоники. Кроме того, с той же целью мы не будем отмечать зависимость функций от параметра τ_0, то есть будем писать $D(\tau, \mu)$ вместо $D^m(\tau, \mu; \tau_0)$, $X(\mu)$ вместо $X^m(\mu, \tau_0)$ и т. д.

2. *Приведенная функция источника.* 1) Как уже говорилось, функция $D(\tau, \mu)$ может быть найдена путем численного решения уравнения Фредгольма второго рода (7), которое мы перепишем еще раз

$$D(\tau, \mu) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|) D(t, \mu)\, dt + \frac{\lambda}{4} e^{-\tau/\mu}. \quad (22)$$

При этом приведенная функция источника должна удовлетворять следующему интегральному соотношению:

$$\frac{\lambda}{4} e^{-k\tau} = \int_0^1 \frac{D(\tau, \mu)}{1 - k\mu} \Psi(\mu)\, d\mu + e^{-k\tau_0} \int_0^1 \frac{D(\tau_0 - \tau, \mu)}{1 + k\mu} \Psi(\mu)\, d\mu, \tag{23}$$

где k — минимальный положительный корень характеристического уравнения

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(\mu)\, d\mu}{1 - k\mu} = 1, \tag{24}$$

лежащий в интервале [0, 1]. Соотношение (23) справедливо для всех азимутальных гармоник, для которых характеристическое уравнение (24) имеет указанный корень (то есть для всех милновских гармоник; подробнее см. [10]). Формула (23) следует из легко проверяемого тождества

$$e^{-k\tau} = \int_0^1 e^{-kt} K(|\tau - t|)\, dt + \int_0^1 \frac{\Psi(\mu)\, e^{-\tau/\mu}}{1 - k\mu}\, d\mu + e^{-k\tau_0} \int_0^1 \frac{\Psi(\mu)\, e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\mu}}}{1 + k\mu}\, d\mu \tag{25}$$

при сопоставлении его с уравнением (22).

Для нулевой азимутальной гармоники при консервативном рассеянии ($\lambda = 1$; $k = 0$) вместо (23) очевидно имеем:

$$4 \int_0^1 [D(\tau, \mu) + D(\tau_0 - \tau, \mu)]\, \Psi(\mu)\, d\mu = 1. \tag{26}$$

Кроме того, в этом же случае из (23) следует еще одно интегральное соотношение:

$$\tau = 4 \int_0^1 [D(\tau_0 - \tau, \mu)(\tau_0 + \mu) - D(\tau, \mu)\, \mu]\, \Psi(\mu)\, d\mu. \tag{27}$$

Его можно найти, дифференцируя обе части (23) по k и полагая $k = 0$.

2) Приведенная функция источника удовлетворяет также следующему сингулярному уравнению:

$$T(\mu) D(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{4} e^{-\tau/\mu} + \\ + \mu \int_0^1 \frac{D(\tau, \mu')}{\mu' - \mu} \Psi(\mu')\, d\mu' + \mu e^{-\tau_0/\mu} \int_0^1 \frac{D(\tau_0 - \tau, \mu')}{\mu' + \mu} \Psi(\mu')\, d\mu', \tag{28}$$

где

$$T(\mu) = 1 + \mu \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(\mu')\,d\mu'}{\mu' - \mu}. \tag{29}$$

В этом уравнении оптическая глубина τ уже входит как параметр. Из (28), в частности, следует, что функция $D(\tau, \mu)$ при конечных τ_0 существует и при $-1 \leqslant \mu \leqslant 0$. В таком случае

$$D(\tau_0 - \tau, -\mu)\, e^{-\tau_0/\mu} = D(\tau, \mu). \tag{30}$$

3) Для расчета функции $D(\tau, \mu)$ может служить также одно из двух следующих интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода:

$$D(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{4} X(\mu, \tau_0 - \tau)\, e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} D(t, \mu)\, L(\tau - t, \tau_0 - \tau)\, dt, \tag{31}$$

$$D(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{4} Y(\mu, \tau) + \int_{\tau}^{\tau_0} D(t, \mu)\, L(t - \tau, \tau)\, dt, \tag{32}$$

где

$$L(x, y) = \int_0^1 e^{-x/\mu} X(\mu, y)\, \Psi(\mu) \frac{d\mu}{\mu}. \tag{33}$$

Вывод уравнений (28), (31) и (32) будет дан в 4-м разделе статьи. А сейчас на основании формул, приведенных выше, изложим этапы вычислений, которые необходимо выполнить для расчета поля излучения в плоском слое, освещенном параллельными лучами.

3. *Схема этапов вычисления поля излучения в плоском слое.*

Введем обозначения:

$$x_{\pm}(\mu) = \mu \int_0^1 \frac{X(\mu')\,\Psi(\mu')}{\mu \pm \mu'}\, d\mu', \tag{34}$$

$$y_{\pm}(\mu) = \mu \int_0^1 \frac{Y(\mu')\,\Psi(\mu')}{\mu \pm \mu'}\, d\mu'. \tag{35}$$

Предлагаемая схема включает следующие этапы:

1. Решение граничной задачи, сводящейся к вычислению функций $X(\mu)$ и $Y(\mu)$ путем решения системы уравнений Амбарцумяна—Чандрасекара

$$X(\mu) = 1 + X(\mu)\,x_+(\mu) - Y(\mu)\,y_+(\mu), \tag{36}$$

$$Y(\mu) = e^{-\tau_0/\mu} + Y(\mu)\,x_-(\mu) - X(\mu)\,y_-(\mu), \tag{37}$$

или же системы уравнений

$$T(\mu)\,X(\mu) = 1 - x_-(\mu) - e^{-\tau_0/\mu}\,y_+(\mu), \tag{38}$$

$$T(\mu)\,Y(\mu) = e^{-\tau_0/\mu} - y_-(\mu) - e^{-\tau_0/\mu}\,x_+(\mu) \tag{39}$$

(см. [2], гл. VI, § 3). При этом в общем случае для милновских гармоник должны выполняться соотношения

$$x_-(1/k) + e^{-k\tau_0}\,y_+(1/k) = 1, \tag{40}$$

$$y_-(1/k) + e^{-k\tau_0}\,x_+(1/k) = e^{-k\tau_0}, \tag{41}$$

которые следуют из (23) и (9) соответственно при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$. Мы предполагаем, что задача расчета поля излучения в бесконечной среде решена, то есть величина k известна.

2. Вычисление приведенной функции источника $D(\tau, \mu)$, которое может быть выполнено путем решения уравнения классического типа (22) или уравнений (28), (31), (32). Каждое из перечисленных уравнений с вычислительной точки зрения имеет свои преимущества и недостатки. Наиболее удобным, с нашей точки зрения, является уравнение (28), поскольку мы заранее можем задать дискретизацию по τ в зависимости от степени детальности, с которой хотим вычислить поле излучения внутри слоя. Однако здесь имеются свои вычислительные трудности, связанные с наличием интеграла типа Коши в правой части этого уравнения.

В свою очередь, уравнение (31) удобно в том смысле, что позволяет (коль скоро функция $X(\mu, \tau)$ вычислена с достаточно большой дискретизацией по τ), путем перехода от малых значений τ ко все бо́льшим и бо́льшим, сравнительно легко вычислить функцию $D(\tau, \mu)$. Но в этом случае требуется высокая степень детальности вычисления функции $X(\mu, \tau)$ по τ. В следующей работе будет изложена еще одна схема расчета функций $X(\mu)$, $Y(\mu)$ и $D(\tau, \mu)$.

3. Заключительным этапом предлагаемой схемы является использование формул (16) и (17), а затем (15) и (2), последняя из которых дает искомый результат — интенсивность излучения на любой заданной глубине в плоском слое, освещенном параллельными лучами.

Предлагаемая схема расчета поля излучения в плоском слое, видимо, является с вычислительной точки зрения более выгодной, чем схема решения этой задачи, предложенная В. В. Соболевым ([2], гл. VI, § 4), которая предусматривает на первом этапе вычисление функции

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{4}{\lambda}\int_0^1 D(\tau, \mu; \tau_0)\,\Psi(\mu)\frac{d\mu}{\mu}. \tag{42}$$

Однако эта величина может понадобиться в том случае, если решается задача о расчете поля излучения в плоском слое с произвольно распределенными источниками излучения внутри, функция распределения которых зависит только от пространственной координаты τ. Но и в этом случае мы можем в нашу схему ввести расчет функции Соболева $\Phi(\tau, \tau_0)$ по формуле (42) или же по формуле $(\tau > 0)$

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{4}{\lambda}\lim_{\mu\to 0}\frac{D(\tau, \mu; \tau_0)}{\mu}, \tag{43}$$

которая вытекает из соотношений (28) и (29). Формула (43) может в некоторых случаях оказаться более выгодной, поскольку расчеты по ней требуют знания функции $D(\tau, \mu)$ лишь для одного достаточно малого значения μ.

Теперь перейдем к непосредственному выводу основных формул, которые были приведены нами выше без доказательства.

4. *Вывод основных формул.* Как легко показать (см. [2], гл. VI, § 2),

$$\begin{gathered}\frac{dD(\tau, \mu_0)}{d\tau} = -\frac{1}{\mu_0}D(\tau, \mu_0) + \\ + X(\mu_0)\int_0^1 D(\tau, \mu')\,\Psi(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} - Y(\mu_0)\int_0^1 D(\tau_0 - \tau, \mu')\,\Psi(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'}.\end{gathered} \tag{44}$$

Отсюда, воспользовавшись (13) и (14), находим

$$\begin{gathered}J(\tau, \mu, \mu_0)(\mu - \mu_0)\mu_0^{-1} = -D(\tau, \mu_0) + \\ + X(\mu_0)\left[\frac{\lambda}{4}e^{-\tau/\mu} + \mu\int_0^1 J(\tau, \mu, \mu')\,\Psi(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'}\right] - \\ - Y(\mu_0)\mu\int_0^1 J(\tau_0 - \tau, -\mu, \mu')\,\Psi(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'},\end{gathered} \tag{45}$$

$$J(\tau, -\mu, \mu_0)(\mu+\mu_0)\mu_0^{-1} = D(\tau, \mu_0) + \\ + X(\mu_0)\mu \int_0^1 J(\tau, -\mu, \mu')\Psi(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} - \\ - Y(\mu_0)\left[\frac{\lambda}{4}e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\mu}} + \mu\int_0^1 J(\tau_0-\tau, \mu, \mu')\Psi(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'}\right]. \tag{46}$$

Сделаем в (46) замену $\tau_1 = \tau_0 - \tau$, умножим обе части (45) и (46) на $\Psi(\mu_0)\mu_0^{-1}$ и проинтегрируем по μ_0 от 0 до 1. В результате получим систему уравнений для нахождения $\int_0^1 J(\tau, \mu, \mu')\Psi(\mu')d\mu'/\mu'$ и $\int_0^1 J(\tau_0-\tau, -\mu, \mu')\Psi(\mu')d\mu'/\mu'$. Ее решение при учете обозначений (34) и (35) и соотношения Басбридж ([11], § 40)

$$T(\mu) = [1-x_+(\mu)][1-x_-(\mu)] - y_+(\mu)y_-(\mu) \tag{47}$$

имеет вид:

$$T(\mu)\int_0^1 J(\tau, \mu, \mu')\Psi(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} = \frac{\lambda}{4\mu}e^{-\tau/\mu}[1-x_+(\mu)-T(\mu)] - \\ -[1-x_+(\mu)]\int_0^1 \frac{D(\tau, \mu')\Psi(\mu')}{\mu-\mu'}d\mu' - y_-(\mu)\int_0^1\frac{D(\tau_0-\tau, \mu')\Psi(\mu')}{\mu+\mu'}d\mu', \tag{48}$$

$$T(\mu)\int_0^1 J(\tau_0-\tau, -\mu, \mu')\Psi(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} = -\frac{\lambda}{4\mu}e^{-\tau/\mu}y_+(\mu) + \\ + y_+(\mu)\int_0^1\frac{D(\tau, \mu')\Psi(\mu')}{\mu-\mu'}d\mu' + [1-x_-(\mu)]\int_0^1\frac{D(\tau_0-\tau, \mu')\Psi(\mu')}{\mu+\mu'}d\mu'. \tag{49}$$

Если подставить (48) и (49) в (45) и положить $\mu_0 = \mu$, то придем к интегральному уравнению (28). С другой стороны, подставив эти же соотношения в (45) и (46), воспользовавшись (36) и освободившись в полученных формулах от интегралов Коши с помощью (28), получим формулы (16) и (17).

Некоторые пояснения общего характера, относящиеся к полученным выше результатам, а также библиографические замечания мы намерены сделать в следующей работе.

Главная астрономическая
обсерватория АН УССР

THE FIELD OF RADIATION IN A PLANE ATMOSPHERE WITH ANISOTROPIC SCATTERING. THE SEPARATION OF ANGULAR VARIABLES

E. G. YANOVITSKIJ

A plane atmosphere of optical thickness τ_0 illuminated by parallel rays is considered. The intensity of radiation in the medium at optical depth τ is shown to be expressed in terms of the reduced source function $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$ depending only on one angular variable (see (7)). More over the integration over τ is not needed for calculation of the intensity; in this case it is necessary to know the function $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$ only at this depth and at the boundaries. Singular equation for the function $D^m(\tau, \mu_0; \tau_0)$ is also obtained. A new scheme for the computation of radiation field is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
2. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
3. *T. W. Mullikin*, Proc. Interdisciplinary Conference on Electromagnetic Scattering, Univ. Massachusetts, 1965, p. 697.
4. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 101, 1975.
5. *Э. Г. Яновицкий*, ДАН СССР, 227, 1319, 1976.
6. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 53, 1063, 1976.
7. *Э. Х. Даниелян*, Астрофизика, 12, 579, 1976.
8. *A. L. Fymat, R. E. Kalaba*, Astrophys. Space Sci., 47, 195, 1977.
9. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
10. *Ж. М. Длугач, Э. Г. Яновицкий*, Физика атмосферы и океана, 13, 699, 1977.
11. *I. W. Busbridge*, Mathematics of Radiative Transfer, Cambridge Univ. Press, 1960.