АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА
ТОМ 16 МАЙ, 1980 ВЫПУСК 2

УДК 523.035.2

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОГО СЛОЯ

О. В. ПИКИЧЯН

Поступила 16 апреля 1978
Пересмотрена 20 февраля 1979

Исследована задача приближенного определения функции Грина (ФГ) слоя конечной оптической толщины в случае анизотропного рассеяния. Получены асимптотические формулы, которые в явном виде весьма просто выражают ФГ оптически толстого слоя через ФГ полубесконечной среды и милновскую интенсивность. С помощью построенных асимптотик ФГ получены явные выражения, позволяющие по известной милновской интенсивности и решению соответствующей задачи для полубесконечной среды просто рассчитать интенсивность внутреннего поля излучения в оптически толстом слое при произвольных первичных источниках энергии.

1. *Введение.* В теории переноса излучения представляют определенный интерес соотношения, которые позволяют при выполнении некоторых условий приближенно свести решение какой-либо задачи к решению более простой и хорошо исследованной задачи. Их точность оказывается достаточной для исследования многих астрофизических явлений. Первой задачей, решенной в такой постановке в теоретической астрофизике, явилась задача о нахождении асимптотического режима светового поля на больших глубинах полубесконечной плоскопараллельной среды (односторонняя бесконечность), освещенной параллельными лучами. Она была поставлена и решена В. А. Амбарцумяном в работе [1]. При этом рассматривались случаи как изотропного, так и анизотропного рассеяния. Приближенное (асимптотическое) решение сводилось к нахождению поля диффузного излучения в бесконечной среде (двухсторонняя бесконечность) с бесконечно удаленным от приемника источником. Аналогичным же образом В. В. Ивановым недавно была решена задача нахождения глубинных асимптотик функции Грина (ФГ) полубесконечной плоскопараллельной среды [2] (см. также [3]). Рассмотрению же более сложных задач об

определении диффузного поля излучения в оптически толстом, но конечном слое посвящено много работ [4—6] (см. также [7], гл. VIII, § 8.4), а также [8—10], причем в последних двух исследование ведется при помощи метода Кейза [11]. В указанных работах для решения задач о плоских слоях большой, но конечной оптической толщины получены представления через решения задач о полубесконечных слоях. Следует отметить, что для задач диффузного отражения и пропускания при изотропном рассеянии подобные решения впервые были получены Амбарцумяном (см., например, [12], гл. III, § 7, а также [13], стр. 345).

Целью настоящей работы является построение асимптотического приближения для ФГ конечного слоя большой оптической толщины при анизотропном рассеянии и с помощью построенных асимптотик ФГ получение простых выражений для внутренних полей излучения в толстых слоях при произвольных первичных источниках энергии.

2. *Асимптотическое приближение для ФГ.* Будем исходить из вероятностной трактовки явлений переноса, предложенной В. В. Соболевым. Функция Грина $G_{(0,\tau_0)}(\tau', \vec{\Omega}' \to \tau, \vec{\Omega})\, d\vec{\Omega}$ представляет собой вероятность того, что квант, летевший на оптической глубине τ' в направлении $\vec{\Omega}'\{\arccos\zeta, \varphi'\}$ к внешней (относительно границы $\tau = 0$) нормали слоя толщины τ_0, вообще говоря, после рассеяний будет двигаться на глубине τ в направлении $\vec{\Omega}\{\arccos\eta, \varphi\}$ внутри телесного угла $d\vec{\Omega}$. Здесь $\zeta = \vec{n}\cdot\vec{\Omega}'$, $\eta = \vec{n}\cdot\vec{\Omega}$, $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный в сторону убывания оптических толщин, а φ' и φ — азимуты $\vec{\Omega}'$ и $\vec{\Omega}$. ФГ полубесконечной среды обозначим через $G_{(0,\infty)}(\tau', \vec{\Omega}' \to \tau, \vec{\Omega})$. Исходя из вероятностного смысла ФГ и проведя мысленно разрез на глубине $\tau = \tau_0$ полубесконечной среды, очевидно получим (см. также [14—15])

$$G_{(0,\infty)}(\tau', \vec{\Omega}' \to \tau, \vec{\Omega}) = G_{(0,\tau_0)}(\tau', \vec{\Omega}' \to \tau, \vec{\Omega}) + \int_{\Omega_+} G_{(0,\tau_0)}(\tau_0 - \tau', -\vec{\Omega}' \to 0, \vec{\Omega}'')\, G_{(0,\infty)}(\tau_0, -\vec{\Omega}'' \to \tau, \vec{\Omega})\, d\vec{\Omega}'', \tag{1}$$

где Ω_+ — верхняя полусфера ($\vec{\Omega}\cdot\vec{n} > 0$). Предположим, как обычно, что индикатриса рассеяния разложена по полиномам Лежандра

$$x(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = \sum_{m=0}^{N} (2 - \delta_{0m})\, x^m(\zeta, \eta) \cos m(\varphi' - \varphi),$$

где

$$\chi^m(\zeta, \eta) = \sum_{i=m}^{N} C_i^m P_i^m(\zeta) P_i^m(\eta), \quad C_i^m = x_i \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \quad \delta_{im} = \begin{cases} 0 & i \neq m \\ 1 & i = m. \end{cases}$$

Представим ФГ в виде

$$G_{(0, \tau_0)}(\tau', \vec{\Omega}' \to \tau, \vec{\Omega}) = \sum_{m=0}^{N} (2 - \delta_{0m}) G^m_{(0, \tau_0)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) \cos m(\varphi' - \varphi),$$

тогда для азимутальных гармоник соотношение (1) примет вид

$$\begin{gathered} G^m_{(0, \infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) = G^m_{(0, \tau_0)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) + \\ + 2\pi \int_0^1 G^m_{(0, \tau_0)}(\tau_0 - \tau', -\zeta \to 0, \mu)\, G^m_{(0, \infty)}(\tau_0, -\mu \to \tau, \eta)\, d\mu. \end{gathered} \tag{1a}$$

Для главного члена m-ой диффузионной гармоники ФГ полубесконечной среды в [2, 3] получено асимптотическое выражение, которое в наших обозначениях имеет вид (диффузионной называется гармоника, для которой соответствующее характеристическое уравнение (3) имеет корень, в [16] подобные гармоники названы также милновскими):

$$G^m_{(0, \infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) = (2\pi)^{-1} |\eta| \cdot 2 I^m_M(\tau, \eta)\, i^m(\zeta)\, e^{-k_m \tau'}, \tag{2}$$

$I^m_M(\tau, \eta)$ — диффузионная азимутальная гармоника интенсивности в неконсервативной задаче Милна, определяемая из уравнения переноса

$$\eta \frac{\partial I^m_M(\tau, \eta)}{d\tau} = I^m_M(\tau, \eta) - S^m_M(\tau, \eta),$$

где $S^m_M(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \chi^m(\eta, \mu) I^m_M(\tau, \mu)\, d\mu$ — функция источника, причем

$$I^m_M(0, \eta) = u^m(\eta), \qquad I^m_M(0, -\eta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0,$$

k_m — диффузионный показатель, т. е. наименьшее по абсолютной величине собственное значение, соответствующее собственной функции $i^m(\zeta)$ характеристического уравнения

$$(1 - k_m \eta)\, i^m(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \chi^m(\eta, \mu)\, i^m(\mu)\, d\mu. \tag{3}$$

При этом уравнение переноса для $G^m_{(0, \infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta)$ имеет вид (напомним, что изложение ведется в вероятностной трактовке)

$$\zeta\frac{\partial G^m_{(0,\infty)}}{\partial\tau'}+G^m_{(0,\infty)}=P^m_{(0,\infty)}(\tau',\zeta\to\tau,\eta)+|\eta|\frac{\delta(\eta-\zeta)\delta(\tau'-\tau)}{2\pi},$$

где величина

$$P^m_{(0,\infty)}(\tau',\zeta\to\tau,\eta)=\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1}\chi^m(\zeta,\mu)\,G^m_{(0,\infty)}(\tau',\mu\to\tau,\eta)\,d\mu=$$

$$=2\pi\int_0^1 P^m_{(0,\infty)}(0,\zeta\to 0,\mu)\,G^m_{(0,\infty)}(\tau',\mu\to\tau,\eta)\,d\mu$$

представляет собой азимутальную гармонику функции источника (ФИ) с точностью до δ-функций. Подставляя формулу (2) в соотношение (1а), можно получить асимптотическое выражение для ФГ оптически толстого слоя в виде (впредь верхние индексы „m“ будем опускать, чтобы не загромождать обозначения)

$$G^{As}_{(0,\tau_0)}(\tau',\zeta\to\tau,\eta)=G_{(0,\infty)}(\tau',\zeta\to\tau,\eta)-$$
$$-2|\eta|I_M(\tau,\eta)e^{-k\tau_0}D(\tau_0-\tau',\tau_0,-\zeta),\tag{4}$$
$$\text{при }\tau_0-\tau\gg 1,\quad 0\leqslant\tau'\leqslant\tau_0,$$

где

$$D(\tau',\tau_0,\zeta)\equiv\int_0^1 G_{(0,\tau_0)}(\tau',\zeta\to 0,\mu)\,i(-\mu)\,d\mu.\tag{5}$$

Принимая в формуле (4) $\tau=0$ и подставляя в (5), нетрудно получить

$$D^{As}(\tau',\tau_0,\zeta)=\frac{D(\tau',\zeta)-Ne^{-k\tau_0}D(\tau_0-\tau',-\zeta)}{1-N^2e^{-2k\tau_0}},\tag{6}$$
$$\text{при }\tau_0\gg 1,$$

где $D(\tau',\zeta)\equiv D(\tau',\infty,\zeta)$ и определяется из выражения [3]

$$2\pi D(\tau',\zeta)=i(-\zeta)e^{k\tau'}-MI_M(\tau',-\zeta),\tag{7}$$

а

$$N=2\int_0^1 I_M(0,\mu)\,i(-\mu)\,\mu d\mu,\qquad M=\int_{-1}^{+1}i^2(\mu)\,\mu d\mu.$$

Для диффузионной гармоники соответствующей ФИ из соотношения (4) нетрудно найти выражение

$$P^{As}_{(0,\tau_0)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) = P_{(0,\infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) -$$

$$- 2|\eta| I_M(\tau, \eta) e^{-k\tau_0} \widetilde{D}(\tau_0 - \tau', \tau_0, -\zeta), \tag{8}$$

$$\text{при } \tau_0 - \tau \gg 1, \ 0 \leqslant \tau' \leqslant \tau_0,$$

где

$$\widetilde{D}(\tau', \tau_0, \zeta) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} \chi^m(\zeta, \mu) D(\tau', \tau_0, \mu)\, d\mu. \tag{9}$$

С учетом (6) из (9) приходим к соотношению

$$\widetilde{D}(\tau', \tau_0, \zeta) = \frac{\widetilde{D}(\tau', \zeta) - Ne^{-k\tau_0}\widetilde{D}(\tau_0 - \tau', -\zeta)}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}}, \text{ при } \tau_0 \gg 1, \tag{10}$$

а вспомогательная функция $\widetilde{D}(\tau', \zeta)$ определяется из выражений

$$\widetilde{D}(\tau', \zeta) \equiv \widetilde{D}(\tau', \infty, \zeta) = \int_0^1 P_{(0,\infty)}(\tau', \zeta \to 0, \mu)\, i(-\mu)\, d\mu,$$

$$2\pi \widetilde{D}(\tau', \zeta) = (1 + k\zeta)\, i(-\zeta)\, e^{k\tau'} - MS_M(\tau', -\zeta). \tag{11}$$

Формулы (4) и (8) в совокупности с (6) и (10) представляют асимптотическое приближение для ФГ и ФИ оптически толстого слоя в случае, когда *приемник достаточно удален* ($\tau_0 - \tau \gg 1$) от одной ($\tau = \tau_0$) из границ слоя, а *местонахождение источника произвольно* ($0 \leqslant \tau' \leqslant \tau_0$). Применяя принцип обратимости оптических явлений

$$|\zeta|\, G_{(0,\tau_0)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) = |\eta|\, G_{(0,\tau_0)}(\tau, -\eta \to \tau', -\zeta)$$

к выражениям (4) и (8), получим асимптотики для случая, когда *источник расположен на достаточном удалении* ($\tau_0 - \tau' \gg 1$) от одной ($\tau = \tau_0$) из границ слоя, а *приемник находится на произвольной глубине* ($0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$)

$$G^{As}_{(0,\tau_0)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) = G_{(0,\infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) -$$

$$- 2|\eta| I_M(\tau', -\zeta) e^{-k\tau_0} D(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta), \tag{12}$$

$$P^{As}_{(0,\tau_0)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) = P_{(0,\infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) -$$

$$- 2|\eta| S_M(\tau', -\zeta) e^{-k\tau_0} D(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta), \tag{13}$$

$$\text{при } \tau_0 - \tau' \gg 1, \ 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0.$$

Примечательно, что в частном случае, когда $\tau_0 - \max(\tau, \tau') \gg 1$, формулы (4) и (12) совпадают и принимают более простую и симметричную форму. Действительно, в этом случае левые части соотношений (4) и (12) равны, поэтому из равенства правых частей можно заключить, что

$$D(\tau_0 - \tau', \tau_0, \zeta) = f(\tau_0) I_M(\tau', \zeta) e^{-k\tau_0}, \quad \tau_0 - \tau' \gg 1. \tag{14}$$

Функцию $f(\tau_0)$ можно легко найти из (14) при $\tau' = 0$, если использовать формулу (6) с учетом выражений (см. формулу (7))

$$D(\tau_0, \zeta) = (2\pi)^{-1} N i(\zeta) e^{-k\tau_0}, \quad \tau_0 \gg 1,$$

$$2\pi D(0, -\zeta) = i(\zeta) - Mu(\zeta).$$

Подставляя последние в указанные выражения, получаем

$$f(\tau_0) = (2\pi)^{-1} \frac{NM}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}}. \tag{15}$$

С помощью (15), (14) и (4) приходим к соотношениям

$$G_{(0,\tau_0)}^{As}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) =$$

$$= G_{(0,\infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) - (\pi)^{-1} |\eta| I_M(\tau, \eta) I_M(\tau', -\zeta) \frac{NMe^{-2k\tau_0}}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}}, \tag{16}$$

$$P_{(0,\tau_0)}^{As}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) =$$

$$= P_{(0,\infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) - (\pi)^{-1} |\eta| I_M(\tau, \eta) S_M(\tau', -\zeta) \frac{NMe^{-2k\tau_0}}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}}, \tag{17}$$

при $\tau_0 - \max(\tau, \tau') \gg 1$.

Условие $\tau_0 - \max(\tau, \tau') \gg 1$ означает, что и приемник, и источник находятся на достаточном удалении от нижней границы слоя. При $\tau' = \tau = 0$, $\zeta < 0$ из (16) сразу следует известная формула для коэффициента яркости оптически толстого слоя.

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta) - u(\eta) u(\zeta) \frac{NMe^{-2k\tau_0}}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}},$$

поскольку

$$2\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{2\pi}{\eta} G_{(0,\tau_0)}(0, -\zeta \to 0, \eta).$$

В приведенных выше выражениях (4), (8) и (12), (13) подразумевалось выполнение соответственно условий $\tau_0 - \tau \gg 1$ и $\tau_0 - \tau' \gg 1$, а в более частных выражениях (16) и (17) принималось $\tau_0 - \max(\tau, \tau') \gg 1$, т. е. обязательно или приемник, или источник, или же оба вместе должны были находиться на достаточном удалении ($\gg 1$) от одной из границ (за таковую принималась нижняя граница слоя $\tau = \tau_0$). Эти формулы являются прямыми обобщениями обычных асимптотик для частной задачи с внешним освещением слоя. Однако нетрудно получить и асимптотику, которая присуща только задаче об определении ФГ (т. е. асимптотику, которая не превращается в обычные асимптотики более частных задач). Для этого достаточно воспользоваться тем фактом, что ФГ конечного слоя в явном виде выражается через свое граничное значение $\tau = 0$, т. е. через поверхностную ФГ (ПФГ). Принимая в (4) $\tau = 0$, заменяя $\tau' \to \tau_0 - \tau'$ и подставляя в (1а), можно получить

$$G^{As}_{(0,\,\tau_0)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) = G_{(0,\,\infty)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) - \Delta_1(\tau_0 - \tau', -\zeta; \tau_0; \tau, \eta) + \\ + 2\pi\Delta_2(\tau_0; \tau, \eta)\, e^{-k\tau_0} D(\tau', \tau_0, \zeta), \tag{18}$$

$$\text{при } \tau_0 \gg 1,$$

где

$$\Delta_1(\tau', \zeta; \tau_0; \tau, \eta) = 2\pi \int_0^1 G_{(0,\,\infty)}(\tau', \zeta \to 0, \mu)\, G_{(0,\,\infty)}(\tau_0, -\mu \to \tau, \eta)\, d\mu,$$

$$\Delta_2(\tau_0; \tau, \eta) = 2 \int_0^1 G_{(0,\,\infty)}(\tau_0, -\mu \to \tau, \eta)\, u(\mu)\, \mu d\mu.$$

При этом очевидно, что при $\tau' \gg 1$

$$\Delta_1(\tau', \zeta; \tau_0; \tau, \eta) = i(\zeta)\, e^{-k\tau'} \Delta_2(\tau_0; \tau, \eta). \tag{19}$$

Переход от (18) к соответствующей формуле для ФИ тривиален. Для справедливости формулы (18) достаточно лишь выполнения условия $\tau_0 \gg 1$, а местонахождение и источника, и приемника произвольно $(0 \leqslant (\tau, \tau') \leqslant \tau_0)$. Однако формулы (4), (12) и (16) намного просты и удобны по сравнению с (18), т. к. не требуют вычисления дополнительных и довольно громоздких интегралов Δ_1 и Δ_2. При $\tau = 0$ формула (18) соответствует второму приближению для ПФГ, когда в (1а) под интегралом ПФГ конечного слоя заменена своей асимптотикой при $\tau_0 \gg 1$. Из выражения (18) с учетом соотношения (19), очевидно, можно получить асимптотики и для рассмотренных выше частных случаев $\tau_0 - \tau \gg 1$ и $\tau_0 - \tau' \gg 1$, которое, однако, будут более грубыми, чем (4) и (12), т. к. соответствуют переходу к асимптотикам на обоих множителях подынтегрального выражения формулы (1а) (при выводе (4) и (12) был заменен асимптотикой лишь второй множитель).

3. *Асимптотический режим при произвольных источниках энергии.* Рассмотрение приближенного решения задач оптически толстого слоя при произвольных первичных источниках энергии, после определения ФГ, очевидно сводится к простому интегрированию по глубине местонахождения источника и по угловой переменной. Найдем в асимптотическом приближении интенсивность $I^{As}(\tau, \eta; \tau_0)$ излучения в оптически толстом слое толщины τ_0, на глубине τ в направлении, характеризуемом величиной η. Пусть в среде находятся произвольные первичные источники, m-ая азимутальная гармоника мощности которых есть $Q(\tau', \zeta)$.

Рассмотрим три случая:

а) Ищется световой режим на достаточном удалении от нижней границы, когда источники распределены по всему слою, т. е. когда выполняются условия

$$\tau_0 - \tau \gg 1, \quad 0 \leqslant \tau' \leqslant \tau_0, \quad -1 \leqslant (\zeta, \eta) \leqslant 1.$$

Действуя оператором $Q = 2\pi \int\limits_{-1}^{+1} d\zeta \int\limits_{0}^{\tau_0} \cdots Q(\tau', \zeta) \dfrac{d\tau'}{|\eta|}$ на соотношение (4), нетрудно получить

$$I^{As}(\tau, \eta; \tau_0) = I_{(\tau_0)}(\tau, \eta) - 2I_M(\tau, \eta)\, e^{-k\tau_0} \frac{Q_1(\tau_0) - Ne^{-k\tau_0} Q_2(\tau_0)}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}}, \tag{20}$$

$$\text{при } \tau_0 - \tau \gg 1,$$

где $I_{(\tau_0)}(\tau, \eta)$ — азимутальная гармоника интенсивности внутреннего поля в полубесконечной среде с теми же источниками $Q(\tau', \zeta)$, сконцентрированными в пограничном слое толщиной τ_0, а величины $Q_1(\tau_0)$ и $Q_2(\tau_0)$ определяются из выражений

$$Q_{\left\{ 1 \atop 2 \right\}}(\tau_0) = \int\limits_0^{\tau_0} e^{k\tau'} A_{\left\{ 1 \atop 2 \right\}}(\tau')\, d\tau' - M \int\limits_{-1}^{+1} d\zeta \int\limits_0^{\tau_0} I_M(\tau', \zeta) \left\{ \begin{matrix} Q(\tau_0 - \tau', \zeta) \\ Q(\tau', -\zeta) \end{matrix} \right\} d\tau',$$

$$A_{\left\{ 1 \atop 2 \right\}}(\tau') = \int\limits_{-1}^{+1} i(\zeta) \left\{ \begin{matrix} Q(\tau_0 - \tau', \zeta) \\ Q(\tau', -\zeta) \end{matrix} \right\} d\zeta. \tag{21}$$

б) Ищется интенсивность на произвольной глубине τ оптически толстого слоя τ_0, при первичных источниках, сконцентрированных в пограничном слое толщиной τ', нижняя граница $(\tau = \tau')$ которого находится на достаточном удалении от нижней границы ($\tau = \tau_0$) основного слоя. Этому случаю соответствуют условия

$$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0, \quad \tau_0 - \tau' \gg 1, \quad -1 \leqslant (\zeta, \eta) \leqslant 1.$$

Заменяя в (12) $\tau' \to t$ и действуя затем оператором $\bar{Q} = 2\pi \int\limits_{-1}^{+1} d\zeta \int\limits_{0}^{\tau'} \cdots$ $\cdots Q(t, \zeta) \dfrac{dt}{|\eta|}$, можно получить выражение

$$I^{As}(\tau, \eta; \tau_0) = I_{(\tau')}(\tau, \eta) - 4\pi Q_M(\tau') e^{-k\tau'} D(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta), \tag{22}$$

$$\text{при } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0, \quad \tau_0 - \tau' \gg 1,$$

где

$$Q_M(\tau') = \int\limits_{-1}^{+1} d\zeta \int\limits_{0}^{\tau'} I_M(t, \zeta)\, Q(t, -\zeta)\, dt,$$

причем из (21) видно, что

$$Q_2(\tau) = \int\limits_{0}^{\tau} e^{kt} A_2(t)\, dt - MQ_M(\tau).$$

в) Ищется интенсивность на произвольной глубине τ, когда источники заполняют весь слой. В этом случае имеем условия

$$\tau_0 \gg 1, \quad 0 \leqslant (\tau, \tau') \leqslant \tau_0, \quad -1 \leqslant (\zeta, \eta) \leqslant 1.$$

Действуя оператором примера (а) на формулу (18), получаем

$$I^{As}(\tau, \eta; \tau_0) = I_{(\tau_0)}(\tau, \eta) - 2\pi \int\limits_{0}^{1} \bar{I}_{(\tau_0)}(0, \mu)\, G_{(0, \infty)}(\tau_0, -\mu \to \tau, \eta)\, \mu \frac{d\mu}{|\eta|} +$$

$$+ |\eta|^{-1} \Delta_2(\tau_0; \tau, \eta)\, e^{-k\tau_0} \frac{Q_2(\tau_0) - Ne^{-k\tau_0} Q_1(\tau_0)}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}}, \tag{23}$$

$$\text{при } \tau_0 \gg 1, \quad 0 \leqslant \tau \ll \tau_0,$$

где $\bar{I}_{(\tau_0)}(0, \eta)$ — интенсивность выходящего из полубесконечной среды излучения при источниках $\bar{Q}(\tau', \zeta) = Q(\tau_0 - \tau', -\zeta)$, сконцентрированных в пограничном слое толщиной τ_0. Если ту же процедуру к выражению (18) применять после предварительного использования принципа обратимости, вместо соотношения (23) можно получить эквивалентное, но иное представление для интенсивности внутреннего поля излучения:

$$I^{As}(\tau, \eta; \tau_0) = I_{(\tau_0)}(\tau, \eta) - 2\pi \int_0^1 G_{(0, \infty)}(\tau_0 - \tau, \eta \to 0, \mu) I_{(\tau_0)}(\tau_0, \mu) d\mu +$$

$$+ 4\pi e^{-k\tau_0} D(\tau, \tau_0, -\eta) \int_0^1 I_{(\tau_0)}(\tau_0, \mu) u(\mu) \mu d\mu, \tag{24}$$

$$\text{при } \tau_0 \gg 1, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0,$$

причем при $\tau \gg 1$ имеет место соотношение

$$2\pi \int_0^1 G_{(0, \infty)}(\tau, \eta \to 0, \mu) I_{(\tau_0)}(\tau_0, \mu) d\mu = 2i(\eta) e^{-k\tau} \int_0^1 I_{(\tau_0)}(\tau_0, \mu) u(\mu) \mu d\mu. \tag{25}$$

Заметим, что из выражений (24) и (25), а также из (23) и (2) следуют асимптотики для более частного случая $\tau_0 - \tau \gg 1$ примера (а), однако по указанной выше причине (см. раздел 2) эти формулы будут более грубыми, чем выражение, приведенное в примере (а). Сказанное легко распространяется и на случай примера (б). Из приведенных в этом разделе формул тривиальным образом можно перейти к асимптотикам функций источников рассмотренных задач.

4. *Заключение*. Приведенные в данной работе выражения позволяют по известным ФГ полубесконечной среды $G_{(0, \infty)}$, милновской интенсивности $I_M(\tau, \eta)$ и характеристическому угловому распределению $i(\zeta)$ для бесконечной среды весьма просто рассчитать ФГ оптически толстого слоя, а также интенсивность внутреннего поля излучения при произвольных первичных источниках энергии. Уместно отметить, что милновскую интенсивность, следуя В. В. Иванову, легко можно рассчитать как дополнительную процедуру к расчету ПФГ (см. [3], формула (56)) без решения интегро-дифференциального уравнения переноса.

В заключение следует подчеркнуть, что в данной работе условия справедливости приближенных формул требуют достаточной удаленности лишь от одной из границ слоя (кроме формул (18), (23) и (24), в которых вообще не требуется удаленности от границ) и хотя всюду за таковую была принята нижняя, тем самым мы не ограничивали общности из-за произвольности ее выбора. Напомним, что $G^m_{(0, \tau_0)}(\tau', \zeta \to \tau, \eta) = G^m_{(0, \tau_0)}(\tau_0 - \tau', -\zeta \to \tau_0 - \tau, -\eta)$.

Автор искренне признателен В. А. Амбарцумяну за внимание к работе, а также В. В. Иванову за предоставленную возможность ознакомления с не вышедшей еще из печати работой [3] и Э. Х. Даниеляну за обсуждение результатов и ценные замечания.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

GREEN'S FUNCTION OF THE OPTICALLY THICK SLAB

H. V. PIKIDJIAN

The problem of approximate determination of Green's function (GF) has been investigated for the slab of finite optical thickness. For the case of anisotropic scattering, asymptotic formulas that quite simply express the GF of the optically thick slab in terms of GF for semi-infinite medium and Milne's intensity have been obtained. As an illustration, simple asymptotic expressions are given to determine the internal field of radiation in the optically thick slab at arbitrary initial sources of energy.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 97, 1942.
2. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 10, 193, 1974.
3. *В. В. Иванов, Е. А. Волков*, Труды АО ЛГУ, 55, 3, 1979.
4. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
5. *Т. А. Гермогенова*, Журн. выч. мат. и мат. физики, 1, 1001, 1961.
6. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 316, 1964.
7. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
8. *H. C. van de Hulst*, Bull. Astron. Inst., Netherlands, 20, 77, 1968.
9. *Н. В. Коновалов*, Препринт ИПМ АН СССР, № 65, 1974.
10. *Т. А. Гермогенова*, Препринт ИПМ АН СССР, № 133, 1974.
11. *К. Кейз, П. Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
12. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
13. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
14. *М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 11, 659, 1975; 12, 451, 1976.
15. *Э. Х. Даниелян, О. В. Пикичян*, Астрофизика, 13, 275, 1977.
16. *Ж. М. Длугач, Э. Г. Яновицкий*, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 13, 699, 1977.